Lektion 5, Envariabelanalys den 7 oktober 1999

Lös ekvationen $\sqrt{x^2+1} = 2x$.

Vi börjar med att kvadrera båda led,

$$x^2 + 1 = 4x^2.$$

Samla x i ena ledet,

$$3x^2 = 1.$$

Lösningarna blir

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Om vi som en extra kontroll sätter in $x = 1/\sqrt{3}$ i ursprungsekvationen får vi att $\text{VL} = \text{HL}$, men om vi däremot sätter in $x = -1/\sqrt{3}$ så får vi istället att

$$\begin{aligned}\text{VL} &= \sqrt{\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)^2 + 1} = \sqrt{\tfrac{1}{3}+1} = 2/\sqrt{3},\\ \text{HL} &= 2\big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\big) = -2/\sqrt{3},\end{aligned}$$

d.v.s. $\text{VL} \neq \text{HL}$.

Varför stämmer inte den andra lösningen?

För att kunna besvara frågan behöver vi använda ett litet annorlunda synsett på hur vi löser ekvationer.

När vi t.ex. bestämmer oss för att addera talet 1 till båda led i en ekvation

$$\text{VL} = \text{HL}$$

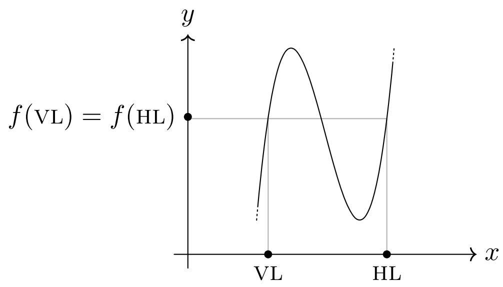
så betyder det att vi ersätter den ekvation vi har med en ny ekvation mellan funktionsvärdena

$$f(\text{VL}) = f(\text{HL})$$

där f är funktionen $x \mapsto x+1$. Denna nya ekvation antar vi, ibland lite aningslöst, att den är ekvivalent med den ursprungliga ekvationen $\text{VL} = \text{HL}$, d.v.s. har samma lösningsmängd. Med andra ord, vi antar och hoppas att

$$\text{VL} = \text{HL} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(\text{VL}) = f(\text{HL}). \qquad (*)$$

För en allmän funktion är detta antagande inte sant. Titta t.ex. på exemplet



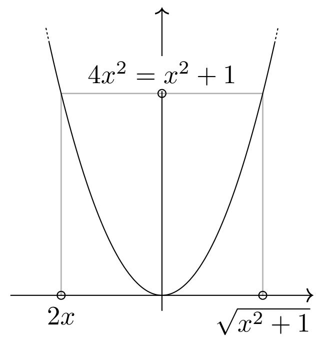
Här kan VL och HL vara olika trots att $f(\text{VL}) = f(\text{HL})$.

Det enda tillfälle då vi kan garantera ekvivalensen $(*)$ är om f är en-entydig, då gäller nämligen $(*)$ per definition.

Vad som skapade den falska roten $x = -1/\sqrt{3}$ i vårt ursprungsexempel,

$$\sqrt{x^2+1} = 2x,$$

var att vi kvadrerade ekvationen. Funktionen $x \mapsto x^2$ är nämligen inte en-entydig vilket man lätt ser genom att rita grafen.



Sensmoralen är *inte* att man ska undvika funktioner som inte är en-entydiga när man löser ekvationer (du gör vad du måste för att lösa ekvationen), utan sensmoralen är att man måste vara beredd på att pröva sina lösningar om man använder icke en-entydiga funktioner.

Visa att $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, för $x > -1$, är en-entydig.

För att f ska vara en-entydig måste följande implikation gälla

$$f(x) = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad x = y.$$

Vi börjar med den vänstra delen av implikationen,

$$f(x) = f(y) \quad \text{d.v.s.} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y}}.$$

Vi kvadrerar (kom ihåg att vi med detta steg riskerar att introducera falska rötter),

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+y}.$$

Vi inverterar båda led (funktionen $x \mapsto 1/x$ är en-entydig)

$$1 + x = 1 + y.$$

Slutligen subtraherar vi 1 från båda led ($x \mapsto x - 1$ är en-entydig),

$$x = y.$$

Vi har alltså lyckats visa att

$$f(x) = f(y) \qquad \Rightarrow \qquad x = y,$$

d.v.s. att f är en-entydig.

3.1.8 Visa att funktionen $f(x) = (1-2x)^3$ är en-entydig och bestäm inversfunktionen $f^{-1}(x)$. Bestäm också definitionsmängden och värdemängden till f och f^{-1}.

Funktionen f är sammansatt av två enklare funktioner $f = g \circ h$, där

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3, \\ h(x) &= 1 - 2x. \end{aligned}$$

Både g och h är en-entydiga (g är välkänt strängt växande och h har derivata <0), varför f också är en-entydig.

Vidare har vi att

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) &= x^{1/3}, \\ h^{-1}(x) &= \tfrac{1}{2}(1-x), \end{aligned}$$

vilket ger att

$$f^{-1}(x) = (g \circ h)^{-1}(x) = h^{-1} \circ g^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(1 - x^{1/3}).$$

Eftersom f är ett polynom är f definierad överallt, d.v.s. $D_f = (-\infty, \infty)$.

Eftersom f är strängt monoton och definitionsmängden saknar ändpunkter är f:s definitionsmängd ett öppet intervall med ändpunkter

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Alltså är $V_f = (-\infty, \infty)$.

Slutligen har vi att

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= V_f = (-\infty, \infty), \\ V_{f^{-1}} &= D_f = (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

3.1.10 Visa att funktionen $f(x) = \frac{x}{1+x}$ är en-entydig och bestäm inversfunktionen f^{-1}. Bestäm också definitionsmängden och värdemängden till f och f^{-1}.

Funktionen f är en-entydig om den är strängt monoton, vilket vi kan undersöka med derivatan av f,

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x) - x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Eftersom derivatans täljare och nämnare alltid är positiva är derivatan alltid positiv, och f är därmed strängt växande. Detta visar att f är en-entydig.

Inversen kan vi få fram genom att lösa ekvationen

$$x = f \circ f^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)}{1 + f^{-1}(x)}$$

med avseende på $f^{-1}(x)$. För enkelhets skull kallar vi $f^{-1}(x)$ för y,

$$x = \frac{y}{1+y}.$$

Vi förlänger med $1+y$,

$$x \cdot (1+y) = y.$$

Samla y i ena ledet,

$$x = y \cdot (1-x) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{x}{1-x}.$$

Inversen är alltså $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

Funktionen f är en rationell funktion och definierad överallt utom i punkter där nämnarpolynomet är noll, d.v.s. f är definierad överallt utom i $x = -1$. Definitionsmängden är $D_f = (-\infty, -1)$ och $(-1, \infty)$.

Eftersom f är strängt monoton och definitionsmängden är två öppna intervall är f:s värdemängd två öppna intervall med ändpunkter

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \quad \text{och} \qquad \lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty,$$

respektive

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \quad \text{och} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

Alltså är $V_f = (-\infty, 1)$ och $(1, \infty)$.

Slutligen har vi att

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= V_g = (-\infty, 1) \;\text{ och }\; (1, \infty), \\ V_{f^{-1}} &= D_f = (-\infty, -1) \;\text{ och }\; (1, \infty). \end{aligned}$$

3.1.24 Visa att

$$f(x) = \frac{4x^3}{x^2+1}$$

har en invers och finn $\bigl(f^{-1}\bigr)'(2)$.

Vi har att

$$f'(x) = \frac{12x^2 \cdot (x^2+1) - 4x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 \cdot (x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Nämnaren är alltid positiv varför derivatans tecken bestäms av täljaren. Täljaren i sin tur är produkten av två faktorer där den andra faktorn x^2+3 alltid är positiv. Den första faktorn $4x^2$ är positiv överallt utom i $x = 0$.
Alltså är

$$f'(x) > 0 \quad \text{utom i } x = 0.$$

Detta betyder att f är strängt växande i intervallen $(-\infty, 0)$ och $(0, \infty)$. Eftersom f är kontinuerlig i $x = 0$ är f strängt växande överallt. Därmed får vi att f är en-entydig och har en invers.

Derivatan av inversen f^{-1} ges av formeln

$$\bigl(f^{-1}\bigr)'(2) = \frac{1}{f'\bigl(f^{-1}(2)\bigr)}.$$

För att kunna använda denna formel behöver vi först bestämma $f^{-1}(2)$. Kancellationsidentiteten ger att

$$2 = f \circ f^{-1}(2) = \frac{4\bigl(f^{-1}(2)\bigr)^3}{\bigl(f^{-1}(2)\bigr)^2 + 1}.$$

För att underlätta skrivandet sätter vi $y = f^{-1}(2)$.

$$2 = \frac{4y^3}{y^2+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2(y^2+1) = 4y^3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2y^3 - y^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

Genom prövning upptäcker vi att denna ekvation har lösningen $y = 1$. Alltså är

$$f^{-1}(2) = 1.$$

Notera att eftersom vi vet att f är en-entydig så kan inte ekvationen $(*)$ har fler än en reell rot.

Vi får nu att

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\dfrac{4 \cdot 1^2 \cdot (1^2+3)}{(1^2+1)^2}} = 1/4.$$

Hur många rötter har ekvationen $\sin x + \cos 2x = 4x$.

Sätt $f(x) = \sin x + \cos 2x - 4x$. Vi ska bestämma hur många nollställen funktionen f har.

Derivatan av f är

$$f'(x) = \cos x - 2\sin 2x - 4$$

Eftersom både sinus- och cosinusfunktionen ligger mellan -1 och $+1$ är derivatan

$$f'(x) \le (+1) - 2 \cdot (-1) - 4 = -1 < 0.$$

Alltså är f strängt avtagande och en-entydig. Detta betyder att f kan högst ha en rot.

För att bestämma om f överhuvudtaget har en rot ska vi undersöka f:s värdemängd. Om talet 0 tillhör värdemängden antar f värdet 0.

Eftersom f är definierad överallt är f:s värdemängd ett öppet intervall med ändpunkterna

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

Alltså är värdemängden $V_f = (-\infty, \infty)$ och eftersom $0 \in V_f$ har ekvationen exakt en rot.

3.3.22 Derivera $y = x^2 e^{x/2}$.

Produktregeln ger att

$$y' = (x^2)' \cdot e^{x/2} + x^2 \cdot (e^{x/2})' = 2x \cdot e^{x/2} + x^2 \cdot e^{x/2} \cdot \tfrac{1}{2} = e^{x/2}(x^2/2 + 2x).$$

3.3.26 Derivera $y = 2\log\sqrt{x^2+2}$.

Vi skriver först om uttrycket med logaritmlagarna

$$y = \log(x^2+2).$$

Kedjeregeln ger att

$$y' = \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+2}.$$

3.3.40 Derivera $y = 2^{x^2-3x+8}$.

Vi använder deriveringsregeln

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \log a$$

och kedjeregeln

$$y' = 2^{x^2-3x+8} \cdot \log 2 \cdot (x^2 - 3x + 8)' = 2^{x^2-3x+8} \cdot \log 2 \cdot (2x-3).$$

3.3.42 Derivera $h(t) = t^x - x^t$.

Den första termen är en potensfunktion och har derivatan

$$xt^{x-1}.$$

Den andra termen är en exponentialfunktion och har derivatan

$$x^t \cdot \log x.$$

Sammantaget är

$$h'(t) = xt^{x-1} + x^t \log x.$$

3.3.61 Låt $f(x) = xe^{-x}$. Bestäm var f är växande respektive avtagande. Skissera grafen till f.

Produktregeln ger att

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x).$$

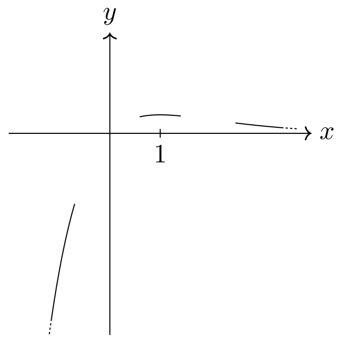
Eftersom exponentialfunktionen alltid är positiv avgörs derivatans tecken av den andra faktorn. Vi får att

$$\begin{aligned} f' &\geq 0 \quad \text{då } x \leq 1 &\quad\Rightarrow\quad & f \text{ är växande i intervallet } (-\infty, 1]. \\ f' &\leq 0 \quad \text{då } x \geq 1 &\quad\Rightarrow\quad & f \text{ är avtagande i intervallet } [1, \infty). \end{aligned}$$

När $x \to \infty$ blir funktionen nästan exponentiellt avtagande p.g.a. faktorn e^{-x}. När $x \to -\infty$ växer faktorn e^{-x} exponentiellt och faktorn x ger funktionen ett negativt värde. Vi har alltså att

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

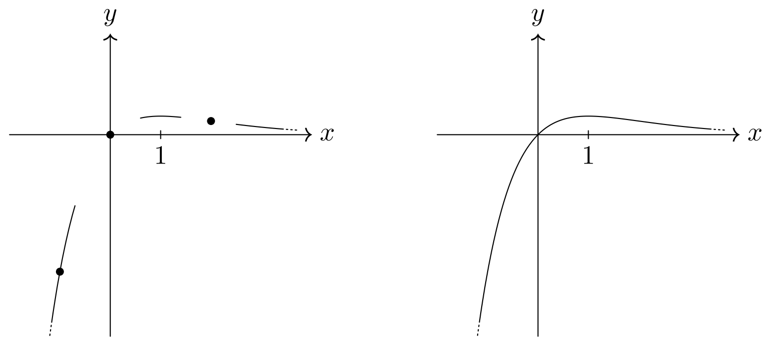
Ritar vi upp det vi vet om funktionen får vi att delar av grafen har utseendet



Som stöd när vi ritar grafen kan vi dessutom räkna ut funktionens värde i några punkter

$$\begin{aligned} f(-1) &= -e^1 \approx -2{,}7181, \\ f(0) &= 0, \\ f(2) &= 2e^{-2} \approx 0{,}2707. \end{aligned}$$

Sedan är det bara att fylla i mellanrummen.



UU mars 60 Visa att funktionen $y = \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a}$, där a är en reell konstant > 0, är en avtagande funktion för $x > a$.

För att visa att f är en avtagande funktion undersöker vi dess derivata. Eftersom x förekommer både i basen och exponenten använder vi oss av logaritmisk derivering. Vi har att

$$\log y = (x + a) \cdot \log\left(1 + \frac{a}{x}\right).$$

Deriverar vi, fås

$$\frac{y'}{y} = \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) + (x + a) \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{a}{x}} \cdot \left(-\frac{a}{x^2}\right) = \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x}.$$

Funktionen $y(x)$ är positiv för $x > a$ så derivatan y':s tecken bestäms av HL. Vi behöver alltså bara visa att HL är negativ. Vi kan dock inte direkt avgöra om HL är negativt, utan detta kräver en liten utredning. Sätt

$$g(x) = \log\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x}.$$

Vi har att $g(a) = \log 2 - 1 < 0$. Om vi kan visa att g är avtagande i intervallet (a, ∞) då följer att $g(x) \leq g(a) < 0$ för alla $x > a$.

För att visa att g är strängt avtagande undersöker vi derivatan

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \dfrac{a}{x}}\left(-\frac{a}{x^2}\right) - \left(-\frac{a}{x^2}\right) = -\frac{a^2}{x^2 \cdot (x + a)}.$$

Eftersom alla faktorer i uttrycket ovan är positiva för $x > a$ har vi att $g'(x) < 0$ för $x > a$. Alltså är $g'(x)$ negativ för $x > a$, och $g(x)$ avtagande för $x > a$. Detta visar att y' är negativ i intervallet (a, ∞), d.v.s. att $y(x)$ är avtagande för $x > a$.