Lektion 9, Envariabelanalys den 4 november 1999

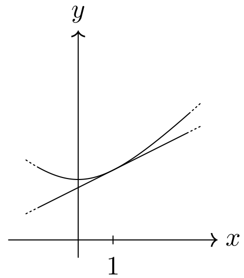
4.7.4 Finn linjäriseringen av $y = \sqrt{3+x^2}$ i punkten $x = 1$.

Linjäriseringen har ekvationen

$$L(x) = y(1) + y'(1)(x-1).$$

Eftersom

$$\begin{aligned} y(1) &= \sqrt{4} = 2, \\ y'(1) &= \frac{d}{dx}\sqrt{3+x^2}\,\bigg|_{x=1} \\ &= \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}\,\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$



blir ekvationen

$$L(x) = \tfrac{1}{2}(x-1) + 2.$$

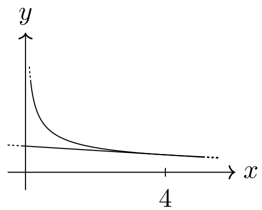
4.7.6 Finn linjäriseringen av $y = 1/\sqrt{x}$ i punkten $x = 4$.

Linjäriseringen har ekvationen

$$L(x) = y(4) + y'(4)(x-4).$$

Eftersom

$$\begin{aligned} y(4) &= 1/\sqrt{4} = 1/2, \\ y'(4) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\bigg|_{x=4} = \frac{-\frac{1}{2}}{x^{3/2}}\,\bigg|_{x=4} = -\frac{1}{16}, \end{aligned}$$



blir ekvationen

$$L(x) = -\tfrac{1}{16}(x-4) + \tfrac{1}{2}.$$

4.7.16 Använd en lämplig linjärisering för att bestämma en approximation av värdet $\sqrt{47}$.

Bestäm felets tecken och skatta dess storlek. Använd denna information för att bestämma ett intervall som helt säkert innehåller värdet $\sqrt{47}$.

Det verkar naturligt att använda funktionen $f(x) = \sqrt{x}$. Vi ska alltså bestämma $f(47)$. I den närbelägna punkten $x = 49$ vet vi f:s exakta värde, $f(49) = 7$. Vi väljer därför att linjärisera f kring punkten $x = 49$.

Linjäriseringen blir

$$L(x) = f(49) + f'(49)(x-49) = 7 + \tfrac{1}{14}(x-49).$$

Ett approximativt värde på $\sqrt{47}$ är alltså

$$L(47) = 7 + \tfrac{1}{14}\cdot(-2) = \tfrac{48}{7} \approx 6{,}85714.$$

Felet i approximationen ges av uttrycket

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x-49)^2,$$

där $x < \xi < 49$. För $x = 47$ har vi alltså att felet är

$$2f''(\xi) = \frac{-2}{4\xi\sqrt{\xi}}.$$

Vi ser att $f'' < 0$ i intervallet $(47, 49)$ så feltermen är alltså negativt.

Vidare ser vi också att f'' är en växande funktion varför vi har att

$$\begin{aligned} f''(\xi) &< f''(49) = \frac{-1}{4\cdot 49\cdot\sqrt{49}} = \frac{-1}{1372}, \\ f''(\xi) &> f''(47) = \frac{-1}{4\cdot 47\cdot\sqrt{47}} > \frac{-1}{4\cdot 47\cdot\sqrt{36}} = \frac{-1}{1176}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$-\frac{1}{588} < 2f''(\xi) < -\frac{1}{686}.$$

Felet ligger alltså inom intervallet $(\frac{-1}{588}, \frac{-1}{686})$ och därmed ligger det sanna värdet av $\sqrt{47}$ inom intervallet

$$\sqrt{47} \in \bigl(L(74) + \tfrac{-1}{588}, L(47) + \tfrac{-1}{686}\bigr) = (\tfrac{48}{7} - \tfrac{1}{588}, \tfrac{48}{7} - \tfrac{1}{686}) \approx (6{,}85544;\ 6{,}85568).$$

Jämför detta med det sanna värdet

$$\sqrt{47} = 6{,}85565\cdots$$

4.7.22 Använd en lämplig linjärisering för att bestämma ett approximativt värde av $\sin 33°$.

Bestäm felets tecken och skatta dess storlek. Använd denna information för att bestämma ett intervall som helt säkert innehåller värdet $\sin 33°$.

Sätt

$$f(x) = \sin x.$$

Vi ska bestämma $f(33°)$. Den närmsta punkt vi vet det exakta värdet på f är $x = 30°$. Vi linjäriserar kring denna punkt

$$L(x) = f(\tfrac{\pi}{6}) + f'(\tfrac{\pi}{6})(x - \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x - \tfrac{\pi}{6}) + \tfrac{1}{2}.$$

Ett approximativt värde på $\sin 33° = \sin(\frac{33}{170}\pi)$ är alltså

$$L(\tfrac{33}{180}\pi) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\bigl(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\bigr) + \tfrac{1}{2} \approx 0{,}54534.$$

Den linjära approximationen uppfyller sambandet

$$f\bigl(\tfrac{33}{180}\pi\bigr) = L\bigl(\tfrac{33}{180}\pi\bigr) + \tfrac{1}{2}f''(\xi)\bigl(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\bigr)^2$$

där $\frac{1}{6}\pi < \xi < \frac{33}{180}\pi$. För att skatta feltermen behöver vi alltså bestämma

$$f''(x) = -\sin x.$$

Vi ser att $f'' < 0$ i intervallet $\bigl(\frac{1}{6}\pi, \frac{33}{180}\pi\bigr)$ varför felet är negativt.

Eftersom sinusfunktionen är växande i intervallet $\bigl(\frac{1}{6}\pi, \frac{33}{180}\pi\bigr)$ är f'' avtagande i samma intervall och vi har att

$$\begin{aligned} f''(\xi) &> f''\bigl(\tfrac{33}{180}\pi\bigr) = -\sin\bigl(\tfrac{33}{180}\pi\bigr) > -\sin\tfrac{\pi}{4} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}},\\ f''(\xi) &< f''\bigl(\tfrac{1}{6}\pi\bigr) = -\sin\tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\bigl(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\bigr)^2 < \tfrac{1}{2}f''(\xi)\bigl(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\bigr)^2 < -\tfrac{1}{4}\bigl(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\bigr)^2,$$

eller med siffror och avrundat

$$-9{,}6929\cdot 10^{-4} < \tfrac{1}{2}f''(\xi)\bigl(\tfrac{33}{180}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\bigr)^2 < -6{,}8539\cdot 10^{-4}.$$

Därmed ligger det sanna värdet av $\sin 33°$ inom intervallet

$$\begin{aligned} \sin 33° &\in \bigl(L(\tfrac{33}{180}\pi) - 9{,}6929\cdot 10^{-4};\ L(\tfrac{33}{180}\pi) - 6{,}8539\cdot 10^{-4}\bigr)\\ &\approx (0{,}5443757;\ 0{,}5446596). \end{aligned}$$

Jämför detta med det sanna värdet $\sin 33° = 0{,}5446390\cdots$

4.8.2 Bestäm Taylorpolynomet till $\cos x$ av grad 3 kring punkten $x = \pi/4$.

Taylors formel säger att

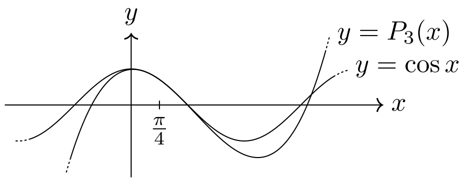
$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3,$$

där $a = \pi/4$. Vi behöver alltså beräkna

$$\begin{aligned} f(\pi/4) &= \cos\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\ f'(\pi/4) &= \frac{d}{dx}\cos x\,\Big|_{x=\pi/4} = -\sin\tfrac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\ f''(\pi/4) &= \frac{d}{dx} -\sin x\,\Big|_{x=\pi/4} = -\cos\tfrac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\ f'''(\pi/4) &= \frac{d}{dx} -\cos x\,\Big|_{x=\pi/4} = \sin\tfrac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vi får att

$$P_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - (x - \tfrac{1}{4}\pi) - \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^2 + \tfrac{1}{6}(x - \tfrac{1}{4}\pi)^3\Big).$$



4.8.6 Bestäm Taylorpolynomet av grad n till $\frac{1}{2+x}$ kring punkten $x = 1$.

För att bestämma Taylorpolynomet av grad n kring $x = 1$ behöver vi bestämma derivatorna

$$f'(1),\quad f''(1),\quad \dots,\quad f^{(n-1)}(1)\quad \text{och}\quad f^{(n)}(1).$$

Med ett induktivt resonemang får vi att (se anteckningarna till gruppstudium 7)

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\,k!}{(2+x)^{k+1}}.$$

I punkten $x = 1$ fås speciellt

$$f^{(k)}(1) = \frac{(-1)^k\,k!}{3^{k+1}}.$$

Taylorpolynomet blir

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-1) + \frac{1}{3^3}(x-1)^2 - \dots + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n. \end{aligned}$$

4.8.8 Använd Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \sqrt{x}$ kring punkten $x = 64$ för att approximera $\sqrt{61}$. Skatta felet och skriv upp det minsta intervall som säkert innehåller det sanna värdet.

Taylors formel av grad 2 kring $x = a$ lyder

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

där ξ ligger mellan a och x. I vårt fall är

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{och} \quad a = 64.$$

så vi behöver först bestämma

$$\begin{aligned} f(64) &= \sqrt{64} = 8, \\ f'(64) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x}\,\Big|_{x=64} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=64} = \frac{1}{16}, \\ f''(64) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\Big|_{x=64} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\Big|_{x=64} = -\frac{1}{2048}, \\ f'''(\xi) &= \frac{d}{dx} - \frac{1}{4x\sqrt{x}}\,\Big|_{x=\xi} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}\Big|_{x=\xi} = \frac{3}{8\xi^{5/2}}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\sqrt{x} = 8 + \tfrac{1}{16}(x-64) - \tfrac{1}{4096}(x-64)^2 + \frac{1}{16\xi^{5/2}}(x-64)^3.$$

Om vi sätter $x = 61$ och ignorerar resttermen så får vi approximationen

$$\sqrt{61} \approx 8 + \tfrac{1}{16}(61-64) - \tfrac{1}{4096}(61-64)^2 \approx 7{,}81030.$$

Istället för att göra en noggrann undersökning av resttermens tecken och dess storlek gör vi en ganska grov skattning. Vi vet att $61 < \xi < 64$ och därför är

$$|R_3(61)| = \left|\frac{1}{16\cdot\xi^{5/2}}\cdot(-3)^3\right| < \frac{1}{16\cdot 61^{5/2}}\cdot 3^3 < \frac{1}{16\cdot 61^2\cdot\sqrt{49}}\cdot 3^3 \lessapprox 6{,}48\cdot 10^{-5}.$$

Vi kan därför säga att

$$\sqrt{61} \in (7{,}81030 - 6{,}48\cdot 10^{-5};\ 7{,}81030 + 6{,}48\cdot 10^{-5}) \approx (7{,}81023;\ 7{,}81037).$$

Detta kan jämföras med det sanna värdet

$$\sqrt{61} = 7{,}81024967\ldots$$

Anm. Om termerna har alternerande tecken i Taylorserien kan man visa att felet alltid är mindre än beloppet av den först försummade termen (se sats 9.4.15, sid 549).

4.8.10 Använd Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x) = \arctan x$ kring punkten $x = 1$ för att approximera $\arctan 0{,}97$. Skatta felet och skriv upp det minsta intervall som säkert innehåller det sanna värdet.

Taylors formel av grad 2 kring $x = a$ lyder

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3,$$

där ξ ligger mellan a och x. I vårt fall med $f(x) = \arctan x$ och $a = 1$ är

$$\begin{aligned}
f(1) &= \pi/4,\\
f'(1) &= \frac{d}{dx}\arctan x\,\Big|_{x=1} = \frac{1}{1+x^2}\,\Big|_{x=1} = 1/2,\\
f''(1) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}\,\Big|_{x=1} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,\Big|_{x=1} = -1/2,\\
f'''(\xi) &= \frac{d}{dx}\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,\Big|_{x=1} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\,\Big|_{x=\xi} = \frac{2(3\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^3}.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\arctan x = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{3\xi^2-1}{(\xi^2+1)^3}(x-1)^3.$$

Om vi sätter $x = 0{,}97$ och ignorerar resttermen så får vi approximationen

$$\arctan 0{,}97 \approx \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(0{,}97-1) - \tfrac{1}{4}(0{,}97-1)^2 \approx 0{,}77017.$$

I feltermen vet vi att $0{,}97 < \xi < 1$, varför vi kan skatta feltermen till

$$|R_3(0{,}97)| = \left|\frac{1}{3}\frac{3\xi^2-1}{(\xi^2+1)^3}\cdot 0{,}03^3\right| < \frac{1}{3}\frac{3\cdot 1^2-1}{(0{,}97^2+1)^3}\cdot 0{,}03^3 \lessapprox 2{,}47\cdot 10^{-6}.$$

Vi kan därför säga att

$$\begin{aligned}
\arctan 0{,}97 &\in (0{,}770173 - 2{,}47\cdot 10^{-6};\ 0{,}770173 + 2{,}47\cdot 10^{-6})\\
&\approx (0{,}770170;\ 0{,}770176).
\end{aligned}$$

Detta kan jämföras med det sanna värdet

$$\arctan 0{,}97 = 0{,}770170914\cdots$$

4.8.20 Bestäm Taylorpolynomet $P_8(x)$ till e^{-x^2} kring punkten $x = 0$.

Taylorutvecklingen för e^x kring $x = 0$ lyder

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + O(x^5).$$

Om vi ersätter x med $-x^2$ i formeln ovan får vi att

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{24}x^8 + O(x^{10}).$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_8(x) = 1 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{24}x^8.$$

4.8.22 Bestäm Taylorpolynomet $P_5(x)$ till $\sin x$ kring punkten $x = \pi$.

Vi skriver om funktionen med hjälp av trigonometriska formler

$$\sin x = \sin\big((x-\pi)+\pi\big) = \sin(x-\pi)\cdot\cos\pi + \cos(x-\pi)\cdot\sin\pi = -\sin(x-\pi).$$

Sätter vi $s = x - \pi$ ska vi alltså Taylorutveckla $-\sin s$ kring $s = 0$,

$$\begin{aligned}\sin x = -\sin s &= -\Big(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + O(s^7)\Big)\\ &= -(x-\pi) + \tfrac{1}{6}(x-\pi)^3 - \tfrac{1}{120}(x-\pi)^5 + O(x-\pi)^7.\end{aligned}$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_5(x) = -(x-\pi) + \tfrac{1}{6}(x-\pi)^3 - \tfrac{1}{120}(x-\pi)^5.$$

4.8.29 Vilken är den bästa 2:a gradsapproximationen till $f(x) = (x-1)^2$ kring $x = 0$? Hur stort är felet i denna approximation?

Besvara samma frågor för $g(x) = x^3+2x^2+3x+4$. Kan konstanten $\frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$ i resttermen för andragradsapproximationen förbättras (göras mindre)?

Eftersom f kan skrivas som

$$f(x) = 1 - 2x + x^2 = 1 - 2x + x^2 + O(x^3)$$

ger entydighetssatsen för Taylorpolynom att Taylorpolynomet $P_2(x)$ till f är

$$P_2(x) = 1 - 2x + x^2.$$

Eftersom $P_2(x) = f(x)$ är felet 0.

Funktionen g kan skrivas som

$$g(x) = 4 + 3x + 2x^2 + O(x^3).$$

Taylorutvecklingens unikhet ger att Taylorpolynomet $P_2(x)$ till g är

$$P_2(x) = 4 + 3x + 2x^2.$$

Resttermen i Taylorutvecklingen är

$$R_3(x) = \frac{g'''(\xi)}{3!}(x-0)^3.$$

Eftersom $g'''(x) \equiv 6$ blir restermen

$$R_3(x) = x^3.$$

Vi ska jämföra detta med det exakta felet

$$g(x) - R_3(x) = x^3.$$

Resttermen $R_3(x)$ är alltså lika med det exakta felet, och då finns inte rum för någon förbättring av feluppskattningen.

Bestäm Taylorpolynomet $P_3(x)$ till $e^x \cos x$ kring punkten punkten $x = 0$.

Antag att vi vet Taylorutvecklingen av e^x och $\cos x$ i $x = 0$,

$$\begin{aligned}e^x &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4),\\ \cos x &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4).\end{aligned}$$

Då är

$$\begin{aligned}e^x\cos x &= \Big(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)\Big)\Big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)\Big)\\ &= \big\{x^nO(x^m) = O(x^{m+n});\ O(x^n)O(x^m) = O(x^{m+n})\big\}\\ &= 1 + x - \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^4).\end{aligned}$$

Entydighetssatsen för Taylorpolynom ger att

$$P_3(x) = 1 + x - \tfrac{1}{3}x^3.$$