Tommy Ekola
Institutionen för matematik
KTH
100 44 Stockholm

rum	3734, plan 7
telefon	08–790 66 59
epost	`ekola@math.kth.se`
mottagningstid	måndagar kl. 14–17

Allt utdelat, datorskrivet, material finns på hemsidan

`http://www.math.kth.se/~ekola/envarre.html`

Om du är först med att rapportera om något fel i utdelat material får du 

som hittelön.

Kvantorer

$\forall$	för alla
$\exists$	existerar
$:$	sådan att
$\Rightarrow$	medför (implicerar)
$\Leftrightarrow$	om och endast om (ekvivalent)
$\in$	tillhör

Gränsvärdesdefinitionen

Egentliga gränsvärden

$\lim_{x\to a} f(x) = b$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b| < \varepsilon.$$

$\lim_{x\to \infty} f(x) = b$ om

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : x > N \quad \Rightarrow \quad |f(x)-b| < \varepsilon.$$

Oegentliga gränsvärden

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ om

$$\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

$\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$ om

$$\forall M > 0 \;\; \exists N : x > N \quad \Rightarrow \quad f(x) > M.$$

Höger- och vänstergränsvärden

$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ om

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 : a < x < a + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$ om

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 : a - \delta < x < a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Räkneregler

Om $\lim_{x\to a} f(x)$ och $\lim_{x\to a} g(x)$ existerar (ändliga) då är

1. $\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$
2. $\lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x).$
3. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big) \cdot \big(\lim_{x\to a} g(x)\big).$
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad$ om $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$

Räkneregler för oegentliga gränsvärden

Obestämt uttryck	Ett obestämt uttryck är i formen $$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0 \text{ eller } 1^\infty.$$

Räknereglerna för gränsvärden gäller även för oegentliga gränsvärden förutsatt att de inte leder till obestämda uttryck.

Anm. Uttrycket $\frac{1}{0}$ är odefinierat, medan $\frac{1}{0^+} = +\infty$ och $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

Instängningsprincipen

Om $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ och $f(x), h(x) \to b$ då $x \to a$, då är

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Anm. både a och b kan vara $\pm\infty$.

Kontinuitet

Kontinuitet i en punkt Funktionen f sägs vara kontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Kontinuitet i ett öppet intervall Funktionen f är kontinuerlig i ett öppet intervall (a, b) om f är kontinuerlig i varje punkt i (a, b).

Höger- och vänsterkontinuitet

Funktionen f är högerkontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Funktionen f är vänsterkontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Kontinuitet i ett slutet intervall Funktionen f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$ om den är kontinuerlig i (a, b), och höger- och vänsterkontinuerlig i $x = b$ respektive $x = a$.

Kontinuerliga elementära funktioner

Sats Följande funktioner är alla kontinuerliga:

1. polynom,
2. rationella funktioner,
3. logaritmfunktionen,
4. exponentialfunktionen,
5. potensfunktioner,
6. de trigonometriska funktionerna,
7. de cyklometriska funktionerna, och
8. de hyperboliska funktionerna.

Sats Om f och g är kontinuerliga i en punkt $x = a$, då är följande funktioner också kontinuerliga i denna punkt

1. $f(x) + g(x)$,
2. $f(x) - g(x)$,
3. $f(x) \cdot g(x)$,
4. $f(x)/g(x)$ om $g(a) \neq 0$,
5. $\sqrt[n]{f(x)}$ om $f(a) > 0$ för n jämn.

Sats Om g är kontinuerlig i $x = a$ och f är kontinuerlig i $g(a)$, då är $f \circ g$ kontinuerlig i $x = a$, d.v.s.

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x \to a} g(x)\big).$$

Satsen om extremvärden

Om en funktion f är kontinuerlig på ett slutet och begränsat intervall $[a, b]$, så antar f såväl ett största som ett minsta värde i detta intervall.

Satsen om mellanliggande värden

Om funktionen f är kontinuerlig på $[a, b]$ och y_0 är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, då finns åtminstone ett $x = x_0$ s.a. $f(x_0) = y_0$.

Derivata

Derivatan till en funktion f i en punkt $x = a$ definieras som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

om gränsvärdet existerar.

Höger- och vänsterderivata

Högerderivata	$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
Vänsterderivata	$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tangent och normal

Tangentlinje	Tangentlinjen till funktionen f i punkten $x = a$ är en rät linje med lutning $f'(a)$ och som går genom punkten $\big(a, f(a)\big)$.
Normallinje	Normallinjen till funktionen f i punkten $x = a$ är en rät linje med lutning $-1/f'(a)$ (vinkelrät mot tangentlinjen) och som går genom punkten $\big(a, f(a)\big)$.

Tabell över elementära funktioners derivata

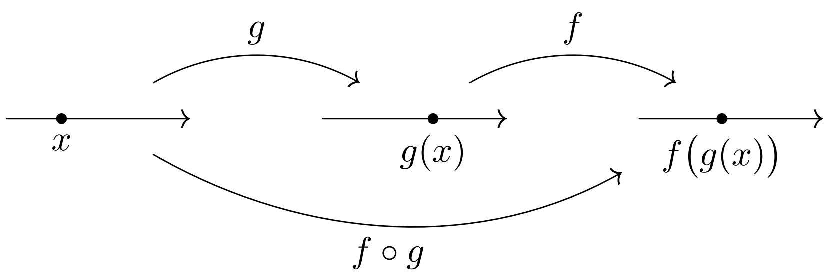
$f(x)$	$f'(x)$
x^r	rx^{r-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Deriveringsregler

Om f och g är deriverbara i $x = a$ då är

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$
3. $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. $(f/g)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$ $\quad$ där $g(a) \neq 0$

Sammansatta funktioner



$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

Kedjeregeln

Om f och g är deriverbara då är

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x),$$

eller med en annan formulering

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Sats $\quad$ $$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n)'(x) = (f_1' \circ f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n)(x) &\cdot \\ (f_2' \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n)(x) &\cdot \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\; & \\ (f_{n-1}' \circ f_n)(x) &\cdot \\ f_n'(x) &\end{aligned}$$

Bevis $\quad$ Kedjeregeln och induktion.

Högre ordningars derivata

Om f och g är n ggr deriverbara, då är

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$,
2. $(f-g)^{(n)} = f^{(n)} - g^{(n)}$,
3. $(f \cdot g)^{(n)} =$ Leibniz regel (uppgift 9.9.9),
4. $(f/g)^{(n)} =$ använd Leibniz regel på $f \cdot 1/g$,
5. $(f \circ g)^{(n)} =$ Faa di Brunos formel.

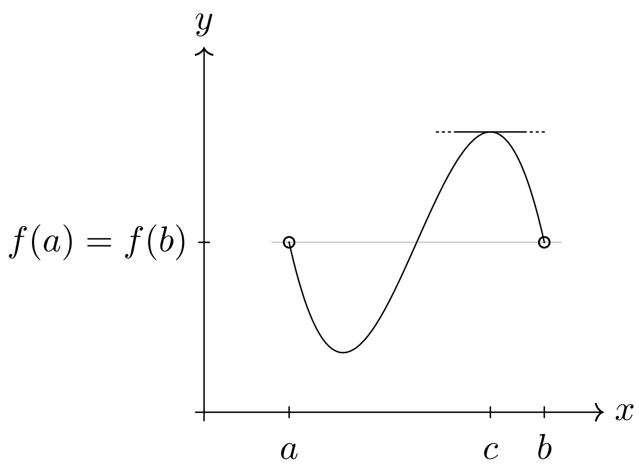
Rolles sats

Antag att

1. f är kontinuerlig i det ändliga intervallet $[a, b]$,
2. f är deriverbar i det öppna intervallet (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

Då finns ett $c \in (a, b)$ så att

$$f'(c) = 0.$$



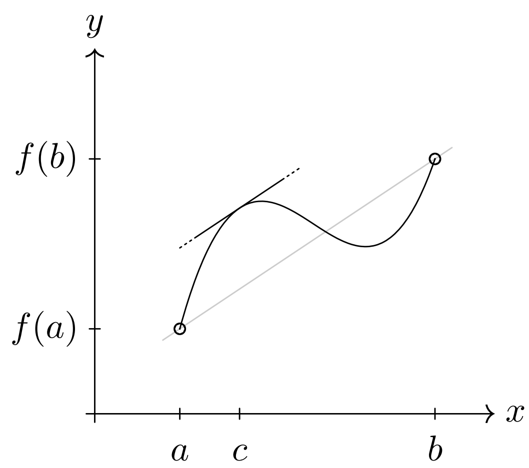
Differentialkalkylens medelvärdessats

Antag att

1. f är kontinuerlig i det ändliga intervallet $[a, b]$,
2. f är deriverbar i det öppna intervallet (a, b).

Då finns ett $c \in (a, b)$ så att

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Monotona funktioner

Funktionen f sägs vara

$$\begin{array}{rcccc} \text{växande} & \text{om} & x < y & \Leftrightarrow & f(x) \leq f(y) \\ \text{strängt växande} & \text{om} & x < y & \Leftrightarrow & f(x) < f(y) \\ \text{avtagande} & \text{om} & x < y & \Leftrightarrow & f(x) \geq f(y) \\ \text{strängt avtagande} & \text{om} & x < y & \Leftrightarrow & f(x) > f(y) \end{array}$$

Monotonicitetssatsen

Antag att f är deriverbar i intervallet (a, b). Då gäller att

1. $f' \geq 0$ i (a, b) $\quad\Leftrightarrow\quad$ f är växande i (a, b),
2. $f' > 0$ i (a, b) $\quad\Rightarrow\quad$ f är strängt växande i (a, b).
3. $f' \leq 0$ i (a, b) $\quad\Leftrightarrow\quad$ f är avtagande i (a, b).
4. $f' < 0$ i (a, b) $\quad\Rightarrow\quad$ f är strängt avtagande i (a, b).

Cauchys medelvärdessats

Antag att

1. f och g är kontinuerliga i det ändliga intervallet $[a, b]$,
2. f och g är deriverbara i det öppna intervallet (a, b),
3. $g \neq 0$ i intervallet (a, b).

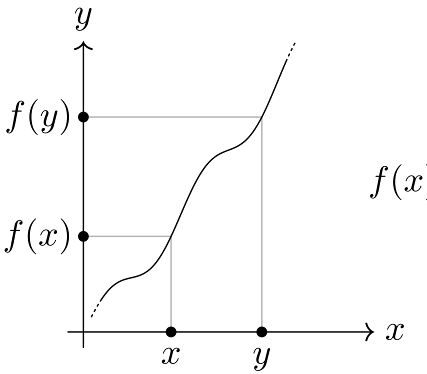
Då finns ett $c \in (a, b)$ s.a.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

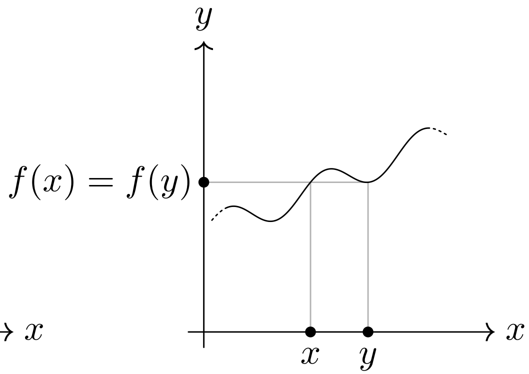
En-entydiga funktioner

En funktion f är en-entydig (injektiv) om

$$x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = f(y).$$



en-entydig



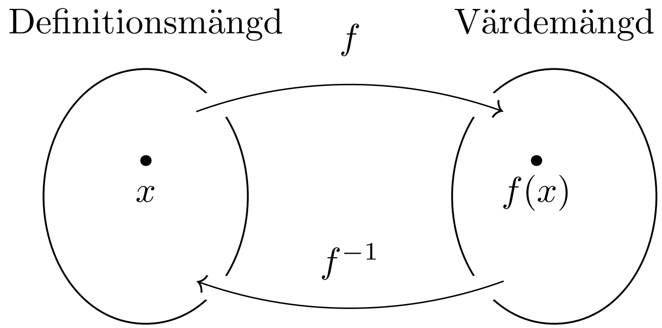
inte en-entydig

Sats $\quad f$ strängt monoton $\Rightarrow$ f en-entydig.

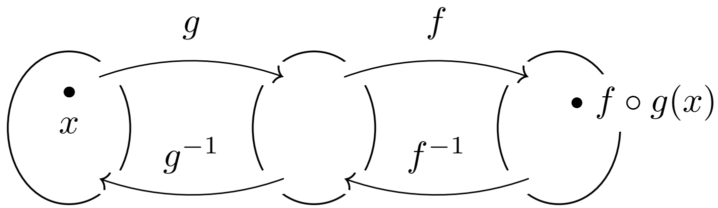
Sats $\quad f$ och g en-entydiga $\Rightarrow$ $f \circ g$ en-entydig.

Inversfunktion

Antag att f är en en-entydig funktion. Den funktion som avbildar värdet $f(x)$ tillbaka på x kallas för inversfunktionen till f och betecknas f^{-1}.



Sats $\quad \left(f \circ g\right)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ (analogi: matrisinvers)



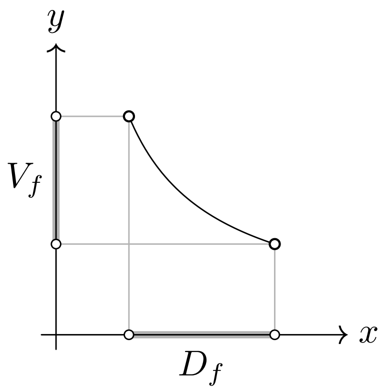
Sats $\quad$ Om $f' \circ f^{-1}(a) \neq 0$ då är $\left(f^{-1}\right)'(a) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(a)}$.

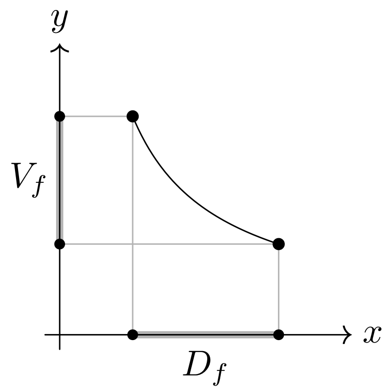
Värdemängd

Sats Om f är en kontinuerlig, monoton funktion med $D_f = (a, b)$, då är V_f ett öppet intervall med ändpunkter

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{och} \quad \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Sats Om f är en kontinuerlig, monoton funktion med $D_f = [a, b]$, då är V_f ett slutet intervall med ändpunkter $f(a)$ och $f(b)$.





Sats $D_{f^{-1}} = V_f \qquad V_{f^{-1}} = D_f$

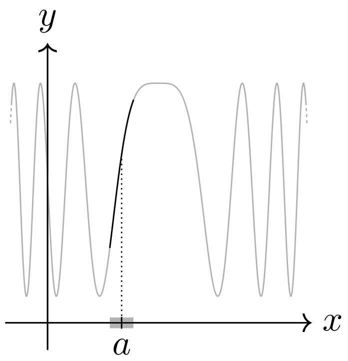
Kancellationsidentiteterna

Om f är en-entydig då är

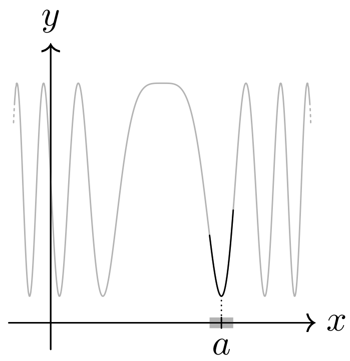
1. $f \circ f^{-1}(x) = x \qquad \forall\, x \in V_f$
2. $f^{-1} \circ f(x) = x \qquad \forall\, x \in D_f$

Lokalt en-entydiga funktioner

En funktion f är lokalt en-entydig i punkten $x = a$ om det finns en omgivning I till $x = a$ så att $f|_I$ är en-entydig.



Lokalt en-entydig i $x = a$



Ej lokalt en-entydig i $x = a$

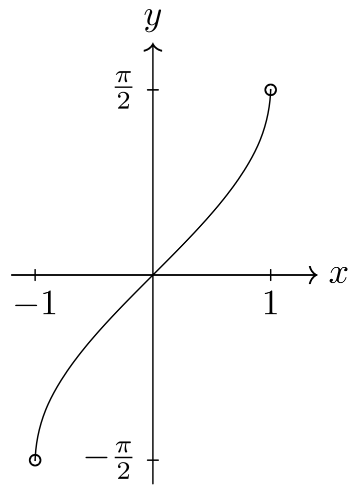
Sats Om f är en kontinuerligt deriverbar funktion i en omgivning av $x = a$ och $f'(a) \neq 0$, då är f lokalt en-entydig i $x = a$.

Sats Om f är en kontinuerligt deriverbar funktion som är lokalt en-entydig i ett intervall, då är är f en-entydig i intervallet.

Cyklometriska funktioner

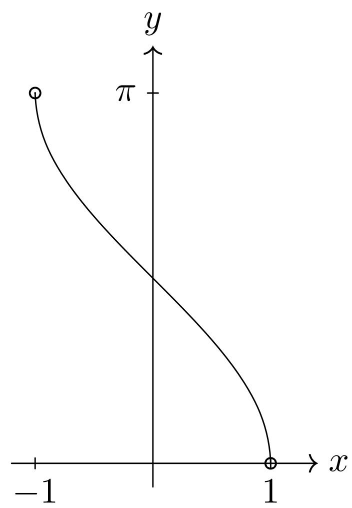
$y = \sin x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ har inversen $y = \arcsin x$.

$$D_{\text{arcsin}} = [-1, 1]$$
$$V_{\text{arcsin}} = [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



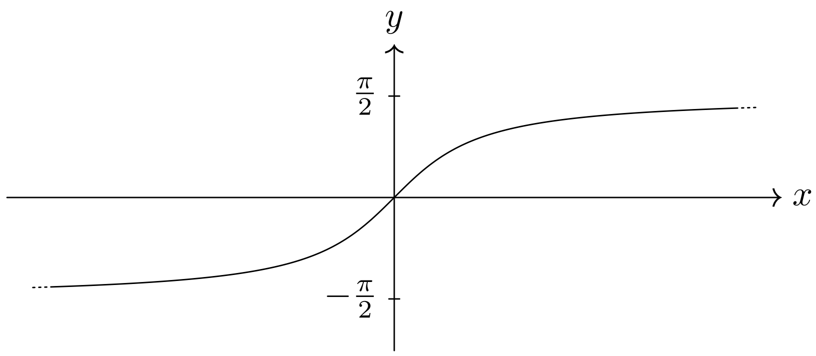
$y = \cos x \quad (0 < x < \pi)$ har inversen $y = \arccos x$.

$$D_{\text{arccos}} = [-1, 1]$$
$$V_{\text{arccos}} = [0, \pi]$$
$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



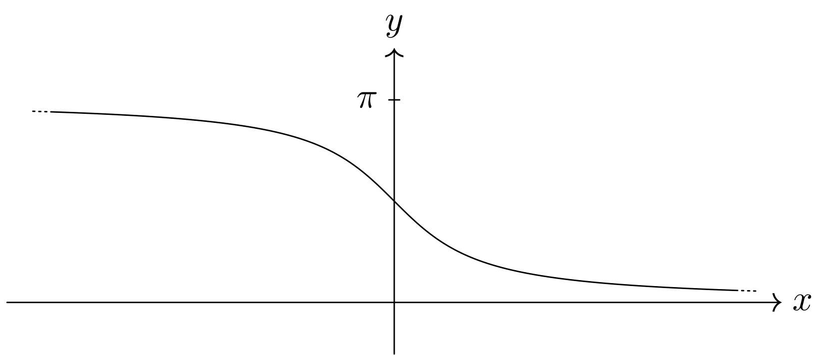
$y = \tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ har inversen $y = \arctan x$.

$$D_{\arctan} = (-\infty, \infty) \qquad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$V_{\arctan} = (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$



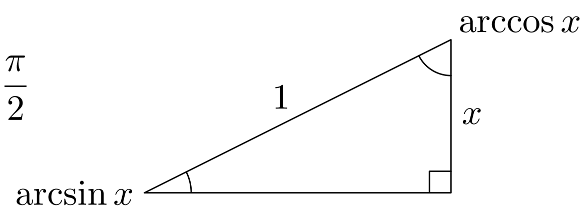
$y = \cot x \quad (0 < x < \pi)$ har inversen $y = \operatorname{arccot} x$.

$$D_{\operatorname{arccot}} = (-\infty, \infty) \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$$
$$V_{\operatorname{arccot}} = (0, \pi)$$

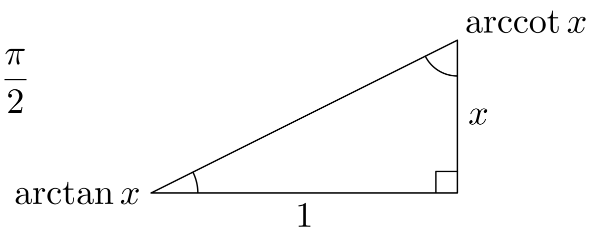


Cyklometriska samband

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$



$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$



Vektorrumsbegrepp

Linjärt oberoende

Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ är linjärt oberoende om

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

Bas

Vektorerna $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ är en bas till V om

1. $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ är linjärt oberoende,
2. $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$.

Dimension

Dimensionen för ett vektorrum V är det ändliga antal vektorer en bas till V har.

Linjära ODE med konstanta koefficienter

Homogena ekvationer

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$$

Sats Lösningarna till $(*)$ bildar ett vektorrum med dimension 2 (om $a \neq 0$).

Om vi ansätter $y = e^{rt}$ ger $(*)$ den karakteristiska ekvationen

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Om r_1 och r_2 är rötterna till den karakteristiska ekvationen då har lösningsrummet basen

$r_1 \neq r_2$ båda reella	$\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$
$r_1 = r_2$ båda reella	$\{e^{r_1 t}, te^{r_1 t}\}$
$r_1 \neq r_2$ komplexa	$\{e^{kt}\cos\omega t, e^{kt}\sin\omega t\}$ där $r_{1,2} = k \pm i\omega$.

Inhomogena ekvationer

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\dagger)$$

Partikulär-lösning	En enstaka lösning till ($\dagger$).
Homogen lösning	En lösning till motsvarande homogena ekvation.

Allmän lösning

Låt y_P vara en partikulärlösning till ($\dagger$). Då består lösningsmängden till ($\dagger$) av funktioner i formen

$$y = y_P + (\text{homogen lösning}).$$

Hur hittar vi en partikulärlösning?

$f(x) =$	Ansätt $y =$
polynom av grad n	$x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)$
(polynom av grad n)e^{rx}	$x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)e^{rx}$
$\left.\begin{array}{l}(\text{polynom av grad } n)e^{rx}\cos kx \\ (\text{polynom av grad } n)e^{rx}\sin kx\end{array}\right\}$	$x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)\, e^{rx}\cos kx + x^m \cdot (\text{polynom av grad } n)\, e^{rx}\sin kx$

där det naturliga talet m väljs minimalt så att ingen term i ansatsen är en lösning till den homogena ekvationen.

Lokala extremvärden

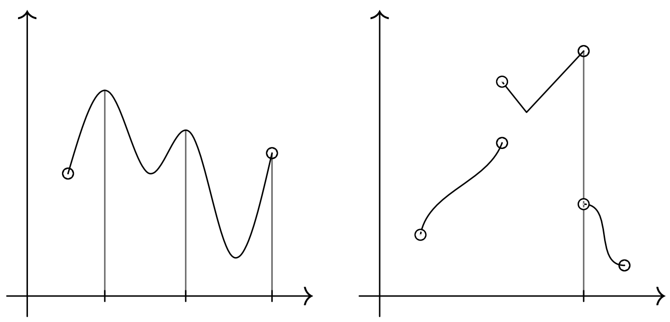
En funktion f har en lokal maximipunkt i $x = x_0$ om det finns en omgivning U till x_0 där

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{för alla } x \in U \text{ och } D_f.$$

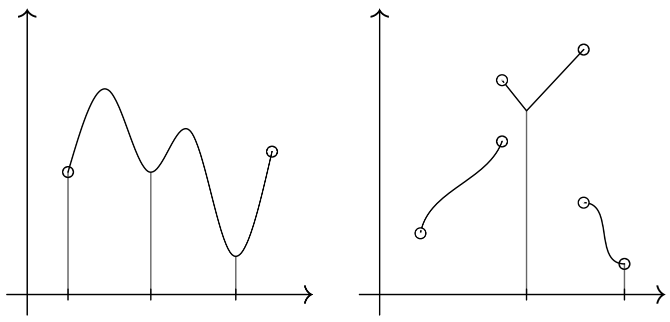
Om det finns en omgivning V till x_1 där

$$f(x_1) \leq f(x) \qquad \text{för alla } x \in V \text{ och } D_f.$$

så har f en lokal minimipunkt i x_1.



Lokala maximipunkter



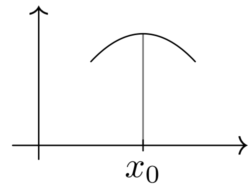
Lokala minimipunkter

Satser om lokala extremvärden

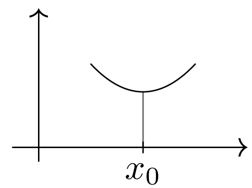
Sats De lokala extrempunkterna till en funktion f, som är definierad i ett intervall, återfinns bland följande punkter,

1. kritiska punkter (d.v.s. punkter där derivatan är noll),
2. punkter där funktionen inte är deriverbar,
3. ändpunkter som tillhör intervallet.

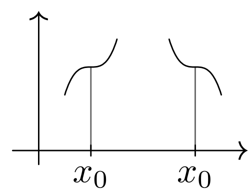
Sats Om funktionen f är deriverbar och $f' > 0$ i en vänsteromgivning av $x = x_0$ och $f' < 0$ i en högeromgivning, då har f ett lokalt maximum i $x = x_0$.



Sats Om funktionen f är deriverbar och $f' < 0$ i en vänsteromgivning av $x = x_0$ och $f' > 0$ i en högeromgivning, då har f ett lokalt minimum i $x = x_0$.



Sats Om funktionen f är deriverbar och $f'(x_0) = 0$ samt $f' > 0$ (eller < 0) i en vänster- och högeromgivning av $x = x_0$, då har f en terasspunkt i $x = x_0$.



Största och minsta värde

Om en funktion f är definierad i ett intervall I och $x_0 \in I$ samt

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \text{för alla } x \in I,$$

då sägs $f(x_0)$ vara funktionens största värde i intervallet I.

Om $x_1 \in I$ och

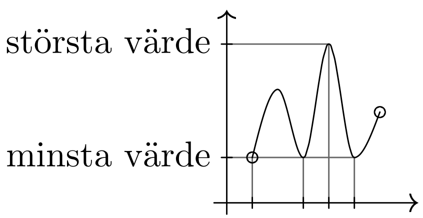
$$f(x_1) \leq f(x) \qquad \text{för alla } x \in I,$$

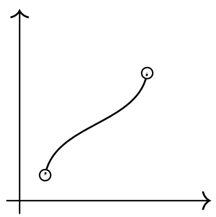
då sägs $f(x_1)$ vara funktionens minsta värde i intervallet I.

Sats Största och minsta värdet av en kontinuerlig funktion f, definierad i ett slutet och begränsat intervall, antas i lokala extrempunkter.

Sats Största och minsta värdet av en kontinuerlig funktion f, definierad i ett öppet intervall, antas antingen i lokala extrempunkter eller så gäller då $x \to$ ändpunkt att

- $\lim f(x) >$ lokala extremvärden $\quad \Rightarrow$ f saknar största värde.
- $\lim f(x) <$ lokala extremvärden $\quad \Rightarrow$ f saknar minsta värde.



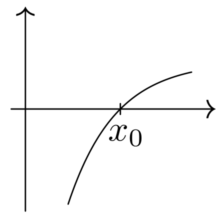


Andra-derivata-testet

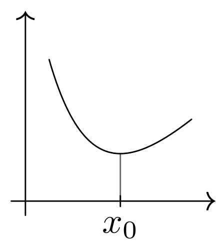
Låt f vara en två gånger deriverbar funktion.
Om $f'(x_0) = 0$ och

- $f''(x_0) > 0$, $\quad$ då är x_0 en lokal minimipunkt,
- $f''(x_0) < 0$, $\quad$ då är x_0 en lokal maximipunkt.

Bevis Att $f''(x_0) > 0$ betyder att f' är strängt växande kring $x = x_0$. Alltså har f':s graf utseendet



Den stränga monotoniciteten ger att f' är negativ till vänster om x_0 och positiv till höger om x_0. Enligt tidigare sats får vi att f har ett lokalt minimum i $x = x_0$.



I fallet $f''(x_0) < 0$ resonerar man på ett liknande sätt.

Linjär approximation

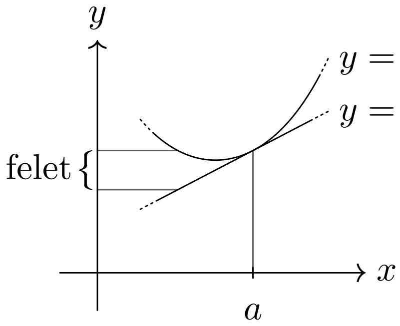
Linjäriseringen av f i punkten $x = a$,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

approximerar f med felet

$$f(x) = L(x) + \tfrac{1}{2} f''(\xi)(x - a)^2,$$

där ξ ligger mellan a och x.



Taylors formel

Taylorpolynomet till den n ggr. deriverbara funktionen f,

$$P_{n-1}(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1},$$

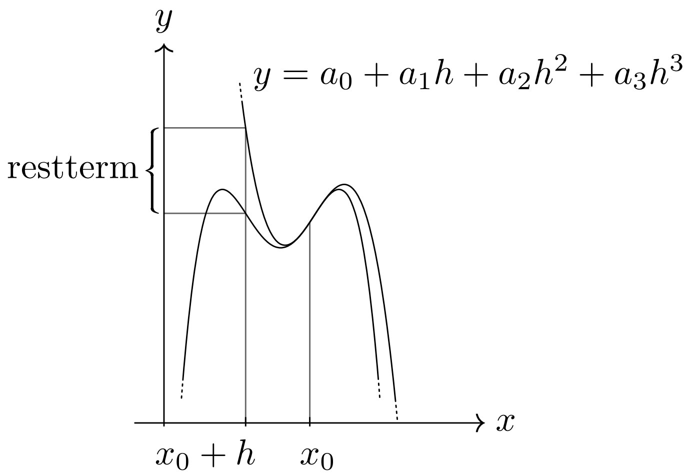
approximerar f med felet

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n,$$

där ξ ligger mellan a och x. Uttrycket

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^n$$

kallas för Lagranges restterm.



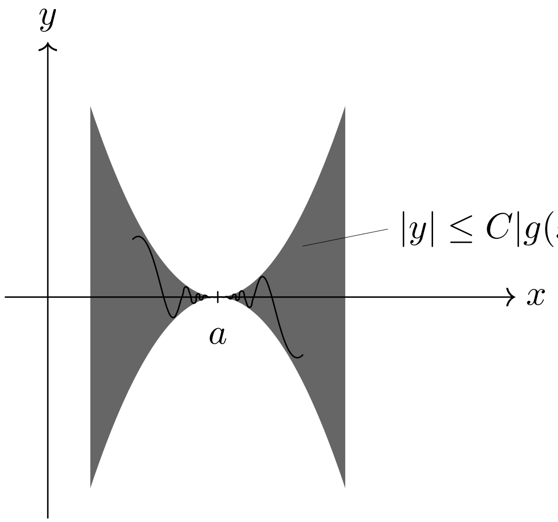
Stort Ordo

Uttrycket

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \qquad \text{då } x \to a,$$

betyder att det finns en konstant $C > 0$ så att

$|f(x)| \le C|g(x)|$ för alla x i en punkterad omgivning av a.



Grafen till f inskränkt till omgivningen av a ligger helt inom det gråa området.

Räkneregler för Ordo

Följande räkneregler gäller då $x \to 0$

- $x^n = O(x^n)$,
- $O(x^m) \pm O(x^n) = O(x^{m\wedge n}) \quad$ där $m \wedge n = \min\{m, n\}$,
- $O(x^m) \cdot O(x^n) = O(x^{m+n})$.

Obs! $O(x^3) = O(x^2)$ men $O(x^2) \ne O(x^3)$.

Taylorpolynomens entydighetssats

Om

$$f(x) = Q_n(x) + O(x-a)^{n+1} \quad \text{då } x \to a,$$

där Q_n är ett polynom av grad högst n. Då är Q_n Taylorpolynomet av grad n till f i punkten $x = a$.

l'Hôpitals regel 0/0

Om f och g är definierade i en punkterad omgivning av $x = a$, och

- f och g är deriverbara med $g' \neq 0$ i omgivningen av a,
- $f(x), g(x) \to 0$ då $x \to a$.

Då gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

om gränsvärdet i högerledet existerar eller är $\pm\infty$.

Anm. Regeln gäller även för $a = \pm\infty$ och ensidiga gränsvärden.

Obs! Gränsvärdet i högerledet är $\dfrac{f'}{g'}$ och *inte* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$.

l'Hôpitals regel ∞/∞

Om f och g är definierade i en punkterad omgivning av $x = a$, och

- f och g är deriverbara med $g' \neq 0$ i omgivningen av a,
- $f(x), g(x) \to \pm\infty$ då $x \to a$.

Då gäller att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

om gränsvärdet i högerledet existerar eller är $\pm\infty$.

Anm. Regeln gäller även för $a = \pm\infty$ och ensidiga gränsvärden.

Taylors formel

Taylorpolynomet $P_{n-1}(x)$ till den n ggr deriverbara funktionen f i punkten $x = a$, approximerar f med felet

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

Uttrycket

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

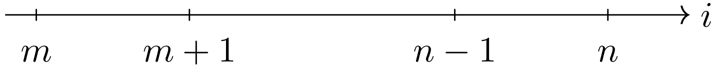
kallas för Cauchys restterm.

Maclaurinutvecklingar

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3}) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})
\end{aligned}$$

Summasymbolen

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n-1) + f(n)$$



Räkneregler $\quad \sum(a_i + b_i) = \sum a_i + \sum b_i$

$$\sum c a_i = c \sum a_i$$

Summaformler

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

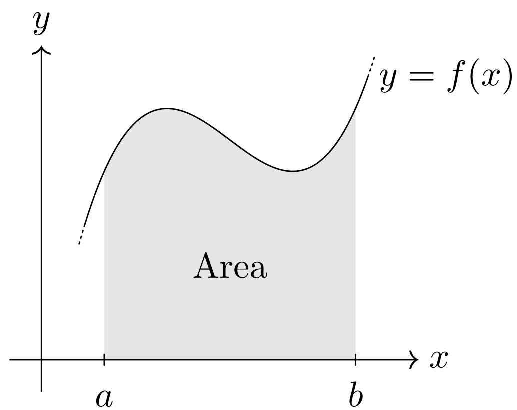
$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)(k-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{om } x \neq 1$$

Areaberäkning

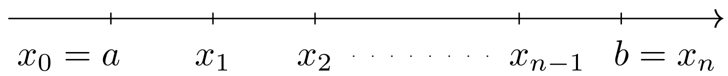
Problem

Bestäm arean under kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$.

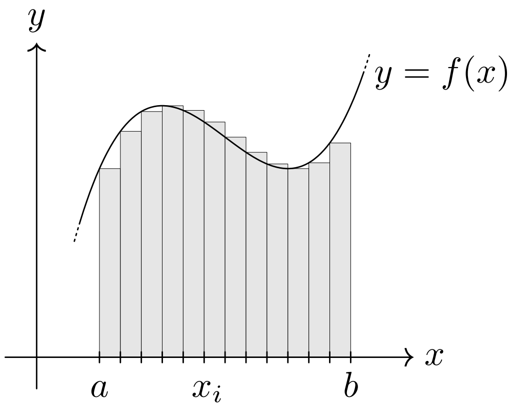


Lösning

Dela upp intervallet $[a, b]$ i n delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ med lika längd.



I varje delintervall $[x_i, x_{i+1}]$ approximerar vi arean inom delintervallet med en rektangel med höjd $f(x_i)$.



Varje rektangel har arean

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i).$$

Den totala arean approximeras av den sammanlagda arean av alla rektanglar,

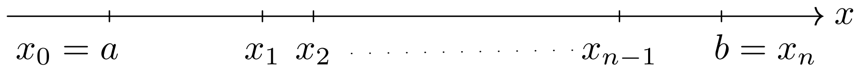
$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i).$$

Om vi låter vår indelning av intervallet $[a, b]$ bli finare, d.v.s. ökar n, så borde vi få en bättre approximation av den totala arean. I gränsfallet $n \to \infty$ borde vi ha likhet

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} A_i.$$

Partition

Låt $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ vara en punktföljd i intervallet $[a, b]$ sådan att $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.



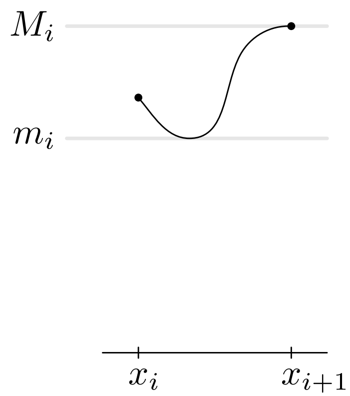
En sådan punktföljd kallas för en partition av intervallet $[a, b]$.

Finhet — En partitions finhet är det största avståndet mellan två närliggande punkter i partitionen, och betecknas

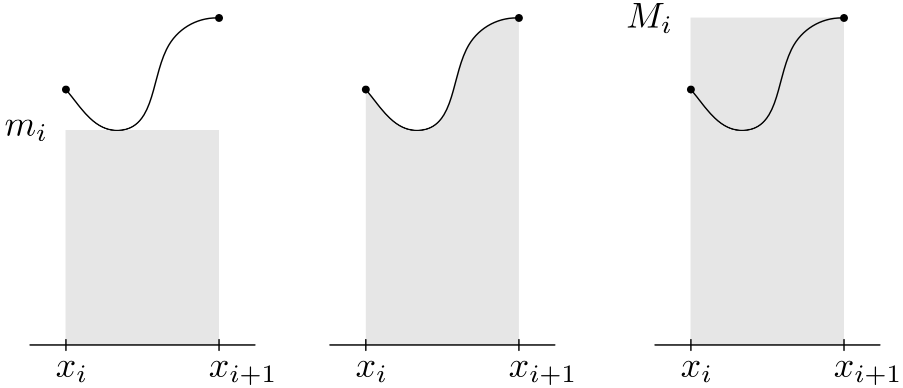
$$\|P\| = \max_{0<i\leq n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$$

Integralens definition

I ett delintervall $[x_i, x_{i+1}]$, som ges av en partition P, antar den kontinuerliga funktionen f ett största värde M_i och ett minsta värde m_i.



Arean A_i under f:s graf i delintervallet uppfyller olikheten

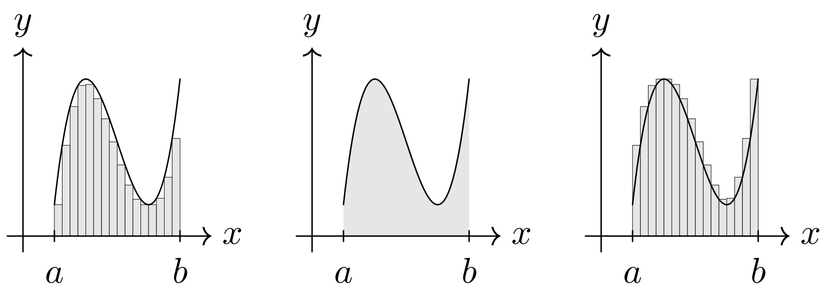


$$m_i(x_{i+1} - x_i) \quad \leq \quad A_i \quad \leq \quad M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Denna olikhet gäller alla delintervall, och om vi summerar ihop areorna i vänsterledet respektive högerledet så får vi

$$\text{undersumma} = L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i),$$

$$\text{översumma} = U(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$



$$L(f, P) \quad \leq \quad A \quad \leq \quad U(f, P)$$

Sats Om P och P' är två partitioner, då är

$$L(f, P) \leq U(f, P'),$$

d.v.s. en översumma är alltid större än en undersumma.

Definition

Antag att det finns exakt ett tal I, s.a.

$$L(f, P) \leq I \leq U(f, P) \quad \text{för alla partitioner } P.$$

Då säger vi att f är integrabel på intervallet $[a, b]$, och talet I kallas för den bestämda integralen av f över $[a, b]$ och betecknas

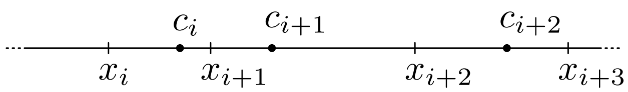
$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Sats Antag att f är en kontinuerlig funktion på intervallet $[a, b]$. Då gäller att

$$\lim_{\|P\| \to 0} L(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} U(f, P) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Riemannsumma

Om $P = \{x_i\}_{i=0}^{n-1}$ är en partition av intervallet $[a, b]$ och $c = \{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ är en punktföljd s.a. varje delintervall i partitionen innehåller exakt ett c_i.



Då kallas

$$R(f, P, c) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

för en Riemannsumma till f.

Eftersom $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, så är alltid

$$L(f, P) \leq R(f, P, c) \leq U(f, P),$$

och

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, c) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(**Bevis:** Instängningsprincipen.)

Egenskaper hos integraler

Antag att $a \le b \le c$ och att A, B är konstanter. Då gäller att

- $\displaystyle\int_a^b = -\int_b^a$ (teckenkonvention)
- $\displaystyle\int (Af + Bg) = A\int f + B\int g$ (linjäritet)
- $\displaystyle\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ (additivitet)
- $\displaystyle f \le g \quad \Rightarrow \quad \int f \le \int g$ (monotonicitet)
- $\displaystyle\left|\int f\right| \le \int |f|$ (triangelolikheten)

Sats $\quad f$ udda $\quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Sats $\quad f$ jämn $\quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

Integralkalkylens medelvärdessats

Om f är kontinuerlig i $[a, b]$, då finns ett $\xi \in (a, b)$ s.a.

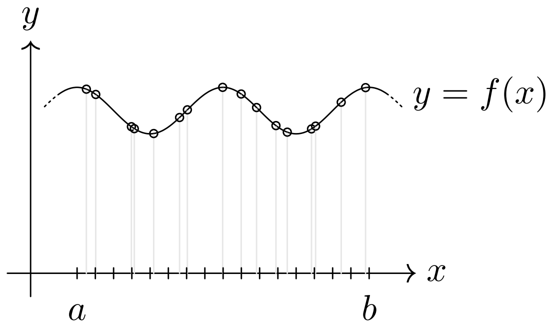
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b dx.$$

Medelvärde

Om f är integrabel på $[a, b]$, då definieras medelvärdet $\bar{f}$ som

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Härledning



Om vi delar in intervallet $[a, b]$ i n st lika stora delintervall och tar ett funktionsvärde $f(c_i)$ från varje delintervall. Då har funktionsvärdena medelvärdet

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) = \left\{\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\,\Delta x_i = \{\text{Riemannsumma}\}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Integralkalkylens huvudsats

Antag att f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$. Definiera en primitiv funktion $A(x)$ till f som

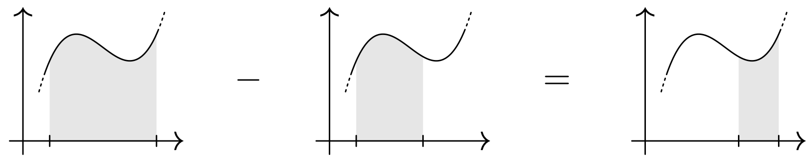
$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Då gäller att

$$A'(x) = f(x).$$

Bevis

Additiviteten ger att



$$A(x+h) \quad - \quad A(x) \quad = \quad \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Med integralkalkylens medelvärdessats har vi att

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \{\text{medelvärdessatsen}\} \\ &= f(\xi_{x,h}) \int_x^{x+h} dx = f(\xi_{x,h}) \cdot h \end{aligned}$$

där $x < \xi_{x,h} < x+h$. Ommöblering ger

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi_{x,h}).$$

Låter vi $h \to 0$ fås

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} f(\xi_{x,h}) = \{f \text{ är kontinuerlig}\} \\ &= f\bigl(\lim_{h\to 0} \xi_{x,h}\bigr) = f(x). \end{aligned}$$

Detta visar att $A'(x)$ existerar och att

$$A'(x) = f(x).$$

Primitiv funktion

En funktion F kallas för en primitiv funktion till funktionen f på intervallet $[a,b]$ om F är deriverbar och

$$F'(x) = f(x) \quad \text{för alla } x \in [a,b].$$

(Tag vänster- och högerderivata i respektive ändpunkt.)

Sats Om f är kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ och F är en primitiv funktion till f, då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Bigl[\,F(x)\,\Bigr]_a^b = F(b) - F(a).$$

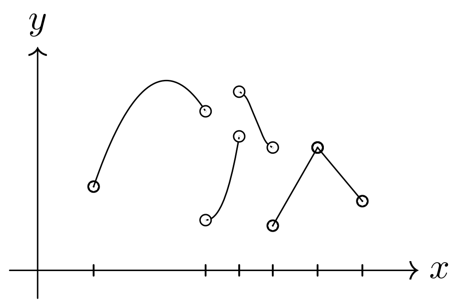
Tabell över primitiva funktioner

I tabellen nedan betyder F en primitiv funktion till f och G en primitiv funktion till g.

Funktion	En primitiv funktion
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ om $n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$a\,f(x) + b\,g(x)$	$a\,F(x) + b\,G(x)$

Styckvis kontinuerlig

Om f är definierad och kontinuerlig i intervallet $[a, b]$ utom möjligtvis i ett ändligt antal punkter, då kallas f för styckvis kontinuerlig.



Tabell över primitiva funktioner

Funktion	En primitiv funktion
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ om $n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$\sin ax$	$-\dfrac{1}{a} \cos ax$
$\cos ax$	$\dfrac{1}{a} \sin ax$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

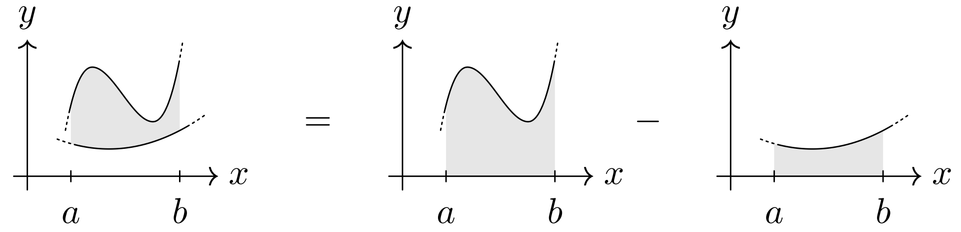
Variabelsubstitution

Antag att $u = u(x)$ är deriverbar på [a, b] och att f är kontinuerlig i u:s värdemängd. Då är

$$\int_a^b f\bigl(u(x)\bigr)u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Areaberäkning

Arean under kurvan $y = f(x)$, över kurvan $y = g(x)$ och mellan $x = a$ och $x = b$ är



$$\text{Area} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \bigl(f(x) - g(x)\bigr)\,dx$$

Partiell integration

Om u är kontinuerlig och v är kontinuerligt deriverbar, då gäller att

$$\int u \cdot v\,dx = U \cdot v - \int U \cdot v'\,dx,$$

där U är en primitiv funktion till u.

Inverssubstitution

Antag att $x = g(u)$ är deriverbar och strängt monoton på $[\alpha, \beta]$ och att f är kontinuerlig på $[a, b]$. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \{x = g(u);\; dx = g'(u)\,du\}$$
$$= \int_\alpha^\beta f\big(g(u)\big)g'(u)\,du.$$

där

$$\begin{aligned} a = g(\alpha) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = g^{-1}(a) \\ b = g(\beta) \quad &\Leftrightarrow \quad \beta = g^{-1}(b) \end{aligned}$$

Trigonometriska substitutioner

Integral	Substitution
$\int R(\sqrt{a^2 - x^2}, x)\,dx$	$x = a \sin\theta$
$\int R(\sqrt{a^2 + x^2}, x)\,dx$	$x = a \tan\theta$
$\int R(\sqrt{x^2 - a^2}, x)\,dx$	$x = \dfrac{a}{\cos\theta}$

där R är en rationell funktion.

Partialbråkuppdelning

Betrakta det rationella uttrycket

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_i)^{m_i}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}\cdots(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{n_j}},$$

där täljarens grad är mindre än nämnarens grad.

Detta rationella uttryck kan skrivas som en summa av termer med utseendet:

- Till varje faktor av typen $(x-\alpha)^m$ svarar termerna
$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{(x-\alpha)^1}.$$
- Till varje faktor av typen $(x^2-\beta x+\gamma)^n$ svarar termerna
$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)^n} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+\beta x+\gamma)^1}.$$

Handpåläggning

Om nämnaren till ett rationellt uttryck består av enkla faktorer, då har partialbråkuppdelningen utseendet

$$\frac{1}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

Koefficienten A_1 kan då bestämmas genom att täcka över den faktor som svarar mot A_1 i vänsterledet och ersätta x med α_1,

$$A_1 = \frac{1}{\qquad (\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_n)}.$$

På samma sätt kan vi bestämma de andra koefficienterna,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1) \qquad \cdots(\alpha_2-\alpha_n)}, \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{1}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots \qquad}. \end{aligned}$$

Rationella integrander

Integralen av en rationell funktion kan skrivas i formen

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

där P och Q är polynom.

Arbetsgång

1. Om $\operatorname{grad} P \geq \operatorname{grad} Q$ kan vi med polynomdivision förenkla integranden till

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

   där $\operatorname{grad} P_2 < \operatorname{grad} Q$.

2. Faktorisera nämnarpolynomet $Q(x)$,

   $$\begin{aligned} Q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}&\cdots(x-\alpha_i)^{m_i} \\ &\cdot (x^2-\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}\cdots(x^2-\beta_j x+\gamma_j)^{n_j}. \end{aligned}$$

3. Partialbråkuppdela uttrycket $P_2(x)/Q(x)$. Detta reducerar problemet till en summa av integraler av typen

   $$\int \frac{A}{(x-\alpha)^m}\,dx \quad \text{och} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^n}\,dx$$

Talföljder

En talföljd är en uppräkning av tal, t.ex.

$$\{0, 1, 1, 0, 4, 3, -\pi, 10^4, 5, \dots\},$$

där punkterna på slutet betyder att talföljden fortsätter.

Indexering

För att entydigt bestämma följden brukar man förse varje tal i följden med ett index,

	0	1	1	0	4	3	$-\pi$	10^4	$\cdots$
k	1	2	3	4	5	6	7	8	

och sedan ange en formel som för varje index k ger motsvarande tal i följden.

EXEMPEL Om $a_k = k^2 + 1$, då är talföljden $\{2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots\}$.

Några begrepp

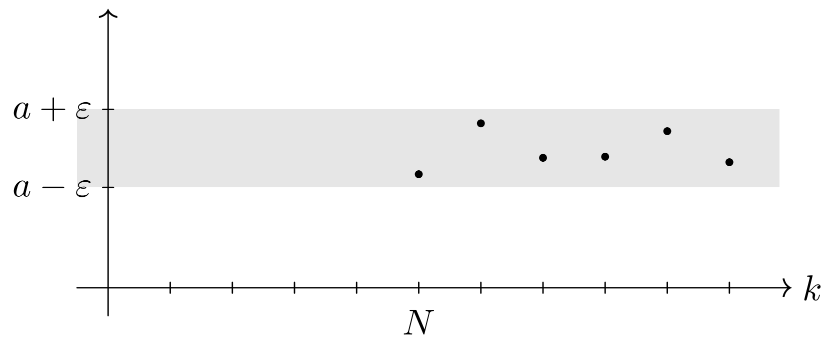
En talföljd $\{a_n\}$ kallas för

begränsad	om $\lvert a_n \rvert \le K$ för alla n.
positiv	om $a_n > 0$ för alla n.
negativ	om $a_n < 0$ för alla n.
alternerande	om varannan term är positiv och varannan term är negativ.
växande	om $a_{n+1} \ge a_n$ för alla n (d.v.s. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$).
avtagande	om $a_{n+1} \le a_n$ för alla n (d.v.s. $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$).

Gränsvärde

Talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot talet a, om oavsett hur litet vi väljer $\varepsilon > 0$ så finns alltid ett index $N = N(\varepsilon)$ så att

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n \ge N.$$



Räkneregler

Om talföljderna $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ konvergerar, då är

1. $\lim\,(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$,
2. $\lim\,(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$,
3. $\lim\,(a_n b_n) = \bigl(\lim a_n\bigr)\bigl(\lim b_n\bigr)$,
4. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad$ om $\lim b_n \neq 0$,
5. Om $a_n \le b_n$, då är $\lim a_n \le \lim b_n$.

Sats Om talföljden $\{a_n\}$ är växande och begränsad, då är $\{a_n\}$ konvergent.

En hierarki

Beteckning: $\quad a_n \ll b_n$ om $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Om $a > 1$, då gäller att

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^a \gg \log n \gg 1.$$

Serier

Vi definierar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Om gränsvärdet i högerledet existerar sägs serien i vänsterledet konvergera, och med gränsvärdet som summa.

Räkneregler

Om $\sum a_n$ och $\sum b_n$ är konvergenta, då är

1. $\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$,
2. $\sum c a_n = c \sum a_n$.

Majorantprincipen

Om $0 \le a_n \le b_n$ för stora n. Då är

- $\sum b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent.
- $\sum a_n$ divergent $\Rightarrow$ $\sum b_n$ divergent.

Sats $\sum a_n$ konvergent $\Rightarrow$ $a_n \to 0$.

Jämförelseprincipen

Om $\sum a_n$ och $\sum b_n$ är positiva serier,

- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ och $\sum b_n < \infty$, då är $\sum a_n < \infty$.
- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} > 0$ och $\sum b_n = \infty$, då är $\sum a_n = \infty$.

Några speciella serie

Geometrisk serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a x^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-x} & \text{om } |x| < 1, \\ \text{divergent} & \text{om } |x| \ge 1. \end{cases}$$

p-serier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om } p > 1, \\ \text{divergent} & \text{om } p \le 1. \end{cases}$$

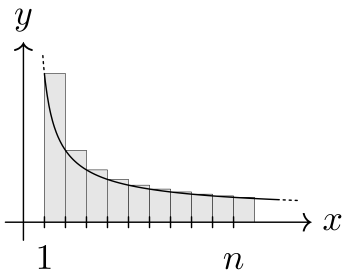
Specialfallet $p = 1$ kallas för den harmoniska serien.

Jämförelse med integral

Låt f vara en avtagande och positiv funktion. Summan

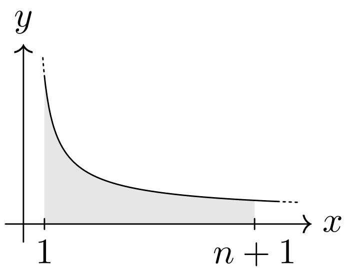
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

kan tolkas som arean av staplarna nedan.



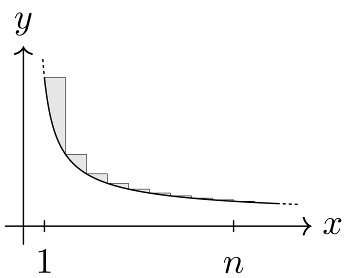
$$\sum_{k=0}^{n} f(k)$$

Denna area är något större än arean under grafen från $x = 1$ till $x = n + 1$.



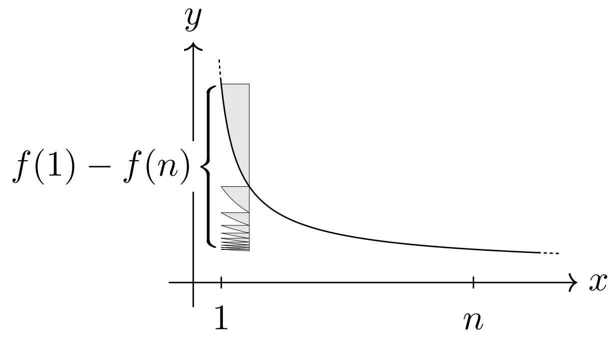
$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx$$

Om vi betraktar skillnaden mellan summan och integralen får vi arean



$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx$$

Dessa areasnuttar kan vi parallellförflytta så att de ryms i en stapel med höjden $f(1) - f(n)$.



Alltså är

$$0 < \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx < f(1) - f(n).$$

Cauchys integralkriterium

Om f är positiv och avtagande för $x \geq 1$, då är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

Absolutkonvergens

En serie $\sum a_n$ sägs vara absolutkonvergent om serien $\sum |a_n|$ konvergerar.

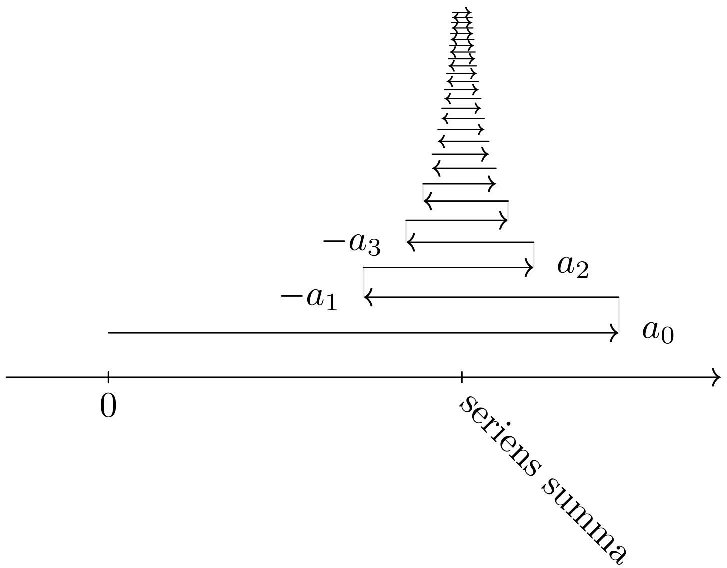
Sats $\sum a_n$ absolutkonvergent $\Rightarrow$ $\sum a_n$ konvergent

Betingad konvergens

Om serien $\sum a_n$ är konvergent men inte absolutkonvergent, då sägs serien vara betingat konvergent.

Sats (Leibniz test)
Om $\{a_n\}$ är en positiv avtagande talföljd som konvergerar mot 0, då är serien $\sum(-1)^n a_n$ konvergent.

Bevis (Utan ord)



Potensserier

En serie med formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \qquad (*)$$

kallas för en potensserie i x med mittpunkt i $x = c$.
Talen $\{a_n\}$ kallas för potensseriens koefficienter.

De punkter x där potensserien $(*)$ konvergerar kallas för konvergensområdet.

Sats En potensseries konvergensområde har ett av följande utseenden

1. en punkt $x = c$,
2. ett intervall mellan $c - R$ och $c + R$,
3. alla reella tal.

Talet R kallas för konvergensradien till serien.
(Om fall 1 inträffar svarar det mot $R = 0$.
Om fall 3 inträffar svarar det mot $R = \infty$.)

d'Alemberts kvotformel

Konvergensradien ges av formeln

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

om gränsvärdet existerar.

Räkneregler

Om $\sum a_n x^n$ och $\sum b_n x^n$ är två potensserier med konvergensradier R_a respektive R_b, då gäller att

- $\sum (ca_n)x^n = c \sum a_n x^n, \qquad$ för $|x| < R_a$,
- $\sum (a_n + b_n)x^n = \sum a_n x^n + \sum b_n x^n,$
  för $|x| < \min\{R_a, R_b\}$.

Abels kontinuitetssats

Om $R > 0$, då gäller följande,

- $\displaystyle \lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\lim_{x \to R^-} a_n x^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n,$
- $\displaystyle \lim_{x \to -R^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\lim_{x \to -R^+} a_n x^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$

om respektive serie i högerledet konvergerar.

Derivering och integration av potensserier

Om potensserien $\sum a_n x^n$ har konvergensradien R, då gäller att

- $\displaystyle \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\big(a_n x^n\big) \qquad$ för $|x| < R$,
- $\displaystyle \int_0^a \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^a a_n x^n \, dx \Big) \qquad$ för $|a| < R$.

Gränsvärdesdefinitionen

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ definieras som

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(Se vidare teoristencilerna till lektion 1.)

Kontinuitet

Funktionen f är kontinuerlig i punkten $x = a$ om

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Funktionen är kontinuerlig i ett intervall om den är kontinuerlig i varje punkt i intervallet.

(Se vidare teoristencilerna till lektion 2.)

Likformig kontinuitet

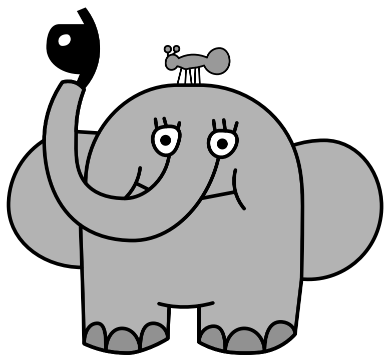
Funktionen f är likformigt kontinuerlig i intervallet I om

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; \forall a \in I \;\; \text{gäller att}$$
$$0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Skillnaden från det vanliga kravet, $\lim f(x) = f(a)$, är att vi nu kräver att δ kan väljas oberoende av a.

Sats Om f är kontinuerlig i det slutna intervallet $[a, b]$, då är f likformigt kontinuerlig på samma intervall.

Anm. Likformig kontinuitet behövs bl.a. för att visa att alla kontinuerliga funktioner är Riemannintegrabla.



Nu är
det slut!