Talföljder

En talföljd är en uppräkning av tal, t.ex.

$$\{0, 1, 1, 0, 4, 3, -\pi, 10^4, 5, \dots\},$$

där punkterna på slutet betyder att talföljden fortsätter.

Indexering

För att entydigt bestämma följden brukar man förse varje tal i följden med ett index,

0	1	1	0	4	3	$-\pi$	10^4	$\cdots\cdots$	
1	2	3	4	5	6	7	8		k

och sedan ange en formel som för varje index k ger motsvarande tal i följden.

EXEMPEL Om $a_k = k^2 + 1$, då är talföljden $\{2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots\}$.

Några begrepp

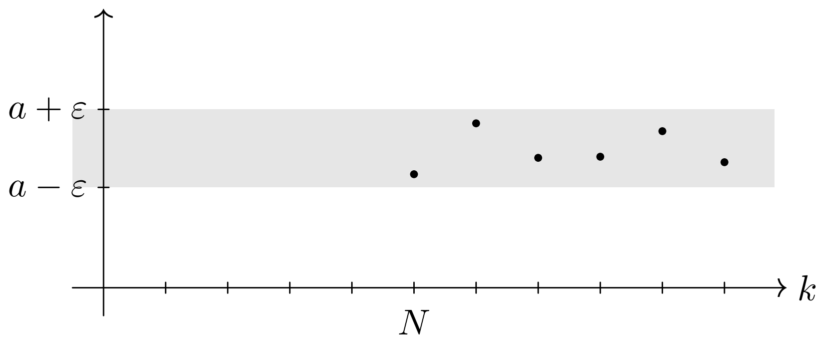
En talföljd $\{a_n\}$ kallas för

begränsad	om $\lvert a_n \rvert \le K$ för alla n.
positiv	om $a_n > 0$ för alla n.
negativ	om $a_n < 0$ för alla n.
alternerande	om varannan term är positiv och varannan term är negativ.
växande	om $a_{n+1} \ge a_n$ för alla n (d.v.s. $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$).
avtagande	om $a_{n+1} \le a_n$ för alla n (d.v.s. $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots$).

Gränsvärde

Talföljden $\{a_n\}$ konvergerar mot talet a, om oavsett hur litet vi väljer $\varepsilon > 0$ så finns alltid ett index $N = N(\varepsilon)$ så att

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall\, n \ge N.$$



Räkneregler

Om talföljderna $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$ konvergerar, då är

1. $\lim\,(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$,
2. $\lim\,(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$,
3. $\lim\,(a_n b_n) = \big(\lim a_n\big)\big(\lim b_n\big)$,
4. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n} \quad$ om $\lim b_n \neq 0$,
5. Om $a_n \leq b_n$, då är $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Sats Om talföljden $\{a_n\}$ är växande och begränsad, då är $\{a_n\}$ konvergent.

En hierarki

Beteckning: $a_n \ll b_n$ om $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Om $a > 1$, då gäller att

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^a \gg \log n \gg 1.$$

Serier

Vi definierar

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Om gränsvärdet i högerledet existerar sägs serien i vänsterledet konvergera, och med gränsvärdet som summa.

Räkneregler

Om $\sum a_n$ och $\sum b_n$ är konvergenta, då är

1. $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n$,
2. $\sum c a_n = c \sum a_n$.

Majorantprincipen

Om $0 \leq a_n \leq b_n$ för stora n. Då är

- $\sum b_n$ konvergent $\quad\Rightarrow\quad \sum a_n$ konvergent.
- $\sum a_n$ divergent $\quad\Rightarrow\quad \sum b_n$ divergent.

Sats $\quad \sum a_n$ konvergent $\quad\Rightarrow\quad a_n \to 0$.

Jämförelseprincipen

Om $\sum a_n$ och $\sum b_n$ är positiva serier,

- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ och $\sum b_n < \infty$, då är $\sum a_n < \infty$.
- $\lim \dfrac{a_n}{b_n} > 0$ och $\sum b_n = \infty$, då är $\sum a_n = \infty$.

Några speciella serie

Geometrisk serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a x^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-x} & \text{om } |x| < 1, \\ \text{divergent} & \text{om } |x| \geq 1. \end{cases}$$

p-serier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{om } p > 1, \\ \text{divergent} & \text{om } p \leq 1. \end{cases}$$

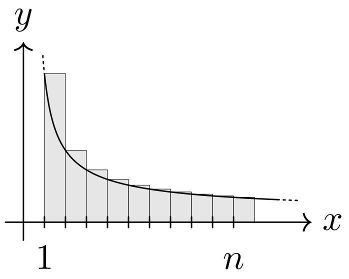
Specialfallet $p = 1$ kallas för den harmoniska serien.

Jämförelse med integral

Låt f vara en avtagande och positiv funktion. Summan

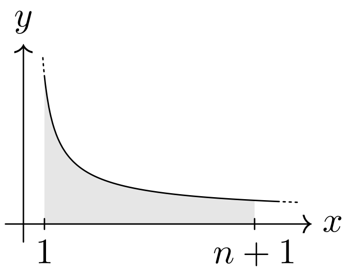
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

kan tolkas som arean av staplarna nedan.



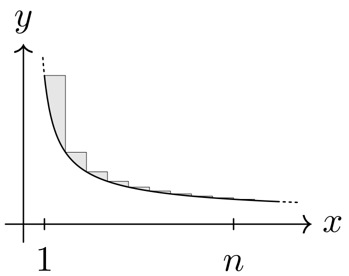
$$\sum_{k=0}^{n} f(k)$$

Denna area är något större än arean under grafen från $x = 1$ till $x = n + 1$.



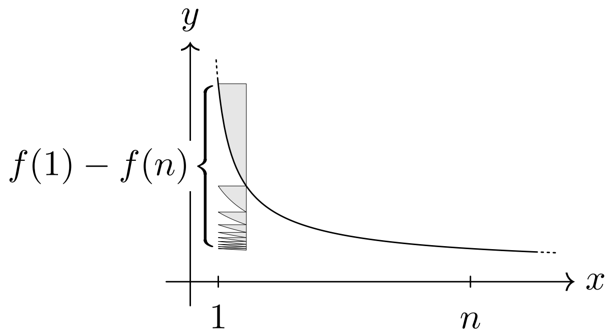
$$\int_{1}^{n+1} f(x)\,dx$$

Om vi betraktar skillnaden mellan summan och integralen får vi arean



$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx$$

Dessa areasnuttar kan vi parallellförflytta så att de ryms i en stapel med höjden $f(1) - f(n)$.



Alltså är

$$0 < \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)\,dx < f(1) - f(n).$$

Cauchys integralkriterium

Om f är positiv och avtagande för $x \geq 1$, då är

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$