## Vektorrumsbegrepp

### Linjärt oberoende

Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$ är linjärt oberoende om

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

### Bas

Vektorerna $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ är en bas till $V$ om

1. $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ är linjärt oberoende,
2. $V = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$.

### Dimension

Dimensionen för ett vektorrum $V$ är det ändliga antal vektorer en bas till $V$ har.

## Linjära ODE med konstanta koefficienter

### Homogena ekvationer

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (*)$$

**Sats** Lösningarna till $(*)$ bildar ett vektorrum med dimension 2 (om $a \neq 0$).

Om vi ansätter $y = e^{rt}$ ger $(*)$ den karakteristiska ekvationen

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Om $r_1$ och $r_2$ är rötterna till den karakteristiska ekvationen då har lösningsrummet basen

| | |
|---|---|
| $r_1 \neq r_2$ båda reella | $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$ |
| $r_1 = r_2$ båda reella | $\{e^{r_1 t}, te^{r_1 t}\}$ |
| $r_1 \neq r_2$ komplexa | $\{e^{kt}\cos\omega t, e^{kt}\sin\omega t\}$ där $r_{1,2} = k \pm i\omega$. |

## Inhomogena ekvationer

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (\dagger)$$

| | |
|---|---|
| Partikulär-lösning | En enstaka lösning till (†). |
| Homogen lösning | En lösning till motsvarande homogena ekvation. |

Allmän lösning

Låt $y_P$ vara en partikulärlösning till (†). Då består lösningsmängden till (†) av funktioner i formen

$$y = y_P + (\text{homogen lösning}).$$

## Hur hittar vi en partikulärlösning?

| $f(x) =$ | Ansätt $y =$ |
|---|---|
| polynom av grad $n$ | $x^m \cdot$ (polynom av grad $n$) |
| (polynom av grad $n$)$e^{rx}$ | $x^m \cdot$ (polynom av grad $n$)$e^{rx}$ |
| (polynom av grad $n$)$e^{rx} \cos kx$<br>(polynom av grad $n$)$e^{rx} \sin kx$ | $x^m \cdot$ (polynom av grad $n$) $e^{rx} \cos kx +$<br>$x^m \cdot$ (polynom av grad $n$) $e^{rx} \sin kx$ |

där det naturliga talet $m$ väljs minimalt så att ingen term i ansatsen är en lösning till den homogena ekvationen.