Lektion 1, Flervariabelanalys den 18 januari 2000

8.2.2 Skissera parameterkurvan

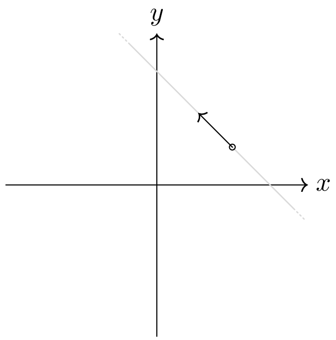
$$\begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 1 + t \end{aligned} \qquad (0 \le t < \infty)$$

och visa dess riktning med en pil. Eliminera sedan parametern och härled kurvans ekvation i x och y vars graf innehåller kurvan.

Om vi skriver om kurvans parametrisering till

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad (0 \le t < \infty),$$

så känner vi igen detta som en parametrisering av en rät linje som innehåller punkten $(2, 1)$ och har riktningen $(-1, 1)$.

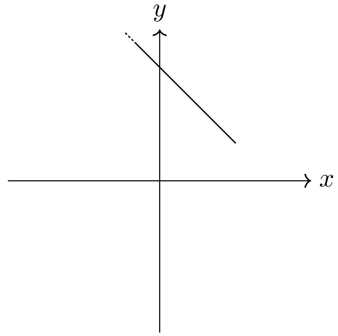


Om vi tillät parametern t löpa från $-\infty$ till ∞ så skulle vi få hela linjen som antyds i figuren ovan. I detta fall startar parametern t från 0, d.v.s. kurvan startar i punkten

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och sedan antar t alla positiva värden, d.v.s. kurvan fortsätter i riktningen $(-1, 1)$.

En skiss av kurvan blir alltså



Kurvans ekvation får vi genom att eliminera t.

$$x = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 - x$$

Detta insatt i y ger

$$y = 1 + t = 1 + (2 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 3.$$

Anm. Notera att kurvans ekvation är hela linjen medan kurvan bara är en halvlinje.

8.2.4 Skissera parameterkurvan

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+t^2} \\ y &= \frac{t}{1+t^2} \end{aligned} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

och visa dess riktning med en pil. Eliminera sedan parametern och härled kurvans ekvation i x och y vars graf innehåller kurvan.

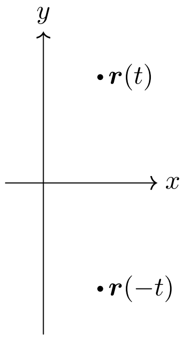
Vi skriver först om parameterkurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Det första vi kan göra är att försöka se symmetrier. I detta fall ser vi att

$$\boldsymbol{r}(-t) = \frac{1}{1+(-t)^2}\begin{pmatrix}1\\-t\end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1\\-t\end{pmatrix},$$

så den punkt som svarar mot parametervärdet $-t$ har samma x-koordinat som punkten med parametervärdet t men omvänt tecken på y-koordinaten.



Kurvan är alltså symmetrisk kring x-axeln eftersom varje positivt parametervärde t har ett motsvarande negativt parametervärde $-t$ som också tillhör parametermängden.

Vi behöver alltså bara skissera kurvan för $0 \le t < \infty$.

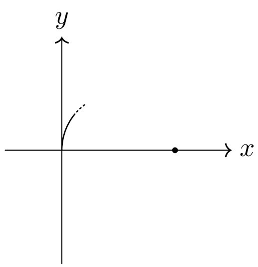
Startpunkten som svarar mot $t = 0$ är

$$\boldsymbol{r}(0) = \frac{1}{1+0^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

För stora t är

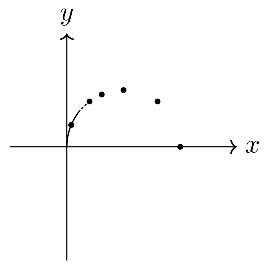
$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} \approx \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/t^2\\1/t\end{pmatrix}$$

så kurvan kommer närma sig origo $(0,0)$ när $t \to \infty$. Dessutom ser vi att x-koordinaten är mycket mindre än y-koordinaten ($t^{-2} \ll t^{-1}$) så kurvan kommer att närma sig origo längs y-axeln.

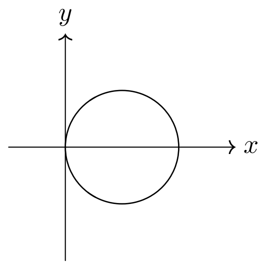


Vi skisserar resten av kurvan genom att välja några parametervärden och förbinda dessa med en kurva,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(0{,}5) &= (0{,}8; 0{,}4)\\ \boldsymbol{r}(1) &= (0{,}5; 0{,}5)\\ \boldsymbol{r}(1{,}5) &= (\tfrac{4}{13}; \tfrac{6}{13})\\ \boldsymbol{r}(2) &= (\tfrac{1}{5}; \tfrac{2}{5})\\ \boldsymbol{r}(5) &= (\tfrac{1}{26}; \tfrac{5}{26})\end{aligned}$$



Kurvskissen blir alltså



Kurvans ekvation får vi genom att eliminera t. Vi noterar att

$$\frac{y}{x} = t.$$

Detta ger att

$$x = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+y^2/x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2 = x$$
$$\Leftrightarrow \qquad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Kurvan är alltså en cirkel med mittpunkt i $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ och radie $\frac{1}{2}$.

8.2.7 Skissera parameterkurvan

$$\begin{aligned} x &= 3\,\sin \pi t \\ y &= 4\,\cos \pi t \end{aligned} \qquad (-1 \le t \le 1)$$

och visa dess riktning med en pil. Eliminera sedan parametern och härled kurvans ekvation i x och y.

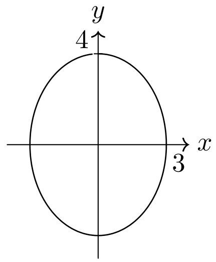
Kurvan är skriven i standardformen för en parametrisering av en ellips. Från parametriseringen ser vi att

$$\frac{x}{3} = \sin \pi t \qquad \text{och} \qquad \frac{y}{4} = \cos \pi t,$$

och den trigonometriska ettan ger att

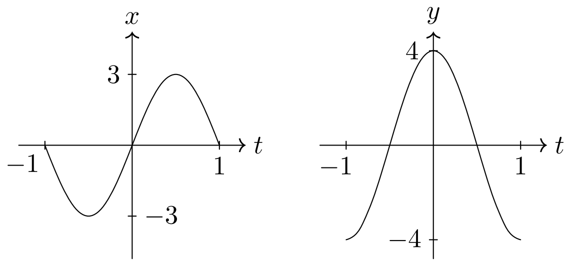
$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \sin^2\pi t + \cos^2\pi t = 1.$$

Alltså är kurvan en del av ellipsens med mittpunkt i origo och halvaxlar 3 och 4.



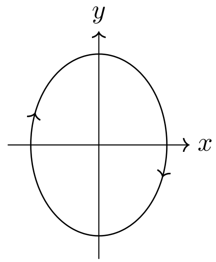
Parameterområdets storlek avgör hur stor del av ellipsen som kurvan upptar.

Då parametern t går från -1 till $+1$ går argumentet till de trigonometriska funktionerna från $-\pi$ till π. Om vi ritar upp hur x- och y-koordinaten beror på parametern t



så ser vi att x-koordinaten startar från 0, går till -3, rör sig sedan till $+3$ och tillbaka till 0. y-koordinaten startar från -4 och går upp till $+4$ för att sedan återvända till -4.

Kurvan beskriver alltså hela ellipsen medsols (negativ riktning) med start i punkten $(0,-4)$.



8.3.2 Finn de punkter där parameterkurvan

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 2t \\ y &= t^2 + 2t \end{aligned}$$

har en

a) horisontell tangent,

b) vertikal tangent.

Låt oss först skriva om parameterkurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^2 + 2t \end{pmatrix}.$$

Kurvans riktningsvektor i den punkt med parametervärdet t ges av

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^2 + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 2 \\ 2t + 2 \end{pmatrix}.$$

a) En horisontell tangent har en riktningsvektor med y-komponent 0 och en nollskild x-komponent, d.v.s.

$$\dot{y} = 2t + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -1.$$

och då är $\dot{x}(-1) = -4 \neq 0$. Kurvan har alltså en horisontell tangent i punkten

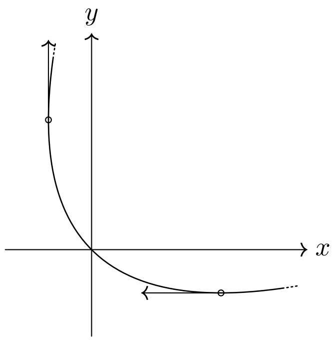
$$\boldsymbol{r}(-1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \\ (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) En vertikal tangent har en riktningsvektor med x-komponent 0 och en nollskild y-komponent, d.v.s.

$$\dot{x} = 2t - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 1,$$

med $\dot{y}(1) = 4 \neq 0$. Kurvan har alltså en vertikal tangent i punkten

$$\boldsymbol{r}(1) = \begin{pmatrix} 1^2 - 2 \cdot 1 \\ 1^2 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



8.3.10 Finn lutningen till kurvan

$$\begin{aligned} x &= t^4 - t^2 \\ y &= t^3 + 2t \end{aligned}$$

i punkten med parametervärdet $t = -1$.

Kurvan i vektorform blir

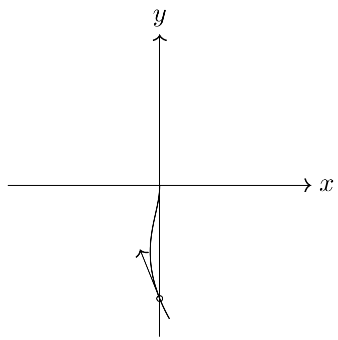
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 - t^2 \\ t^3 + 2t \end{pmatrix}.$$

Riktningsvektorn för kurvan i punkten med parametervärdet $t = -1$ är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(-1) = \begin{pmatrix} 4t^3 - 2t \\ 3t^2 + 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=-1} = \begin{pmatrix} 4(-1)^3 - 2(-1) \\ 3(-1)^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lutningen är

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5}{-2} = -\tfrac{5}{2}.$$



8.3.14 Finn en parametrisering av tangentlinjen till kurvan

$$\begin{aligned} x &= t - \cos t \\ y &= 1 - \sin t \end{aligned}$$

i punkten som svarar mot parametervärdet $t = \frac{1}{4}\pi$.

En rät linje har parameterformen

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{v} \qquad (-\infty < s < \infty),$$

där $\boldsymbol{r}_0$ är en punkt på linjen och $\boldsymbol{v}$ är linjens riktning.

Vi vet att tangentlinjen tangerar kurvan i punkten som svarar mot $t = \frac{1}{4}\pi$ så vi kan välja

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} x(t = \frac{1}{4}\pi) \\ y(t = \frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\pi - 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Tangentens riktning är kurvans riktningsvektor i punkten med $t = \frac{1}{4}\pi$,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t = \frac{1}{4}\pi) \\ \dot{y}(t = \frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}\bigg|_{t=\frac{1}{4}\pi} = \begin{pmatrix} 1 + 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En parametrisering av tangentlinjen är alltså

$$\boldsymbol{r}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\pi - 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 + 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

8.3.20 I vilka punkter är kurvan

$$\begin{aligned} x &= t^3 \\ y &= t - \sin t \end{aligned}$$

inte regulär.

Eftersom komponenterna till kurvan är kontinuerligt deriverbara funktioner av parametern t så är de enda punkter där kurvan inte behöver vara regulär de punkter där riktningsvektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \mathbf{0}$.

I vårt fall är

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t - \sin t \end{pmatrix},$$

varför

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Vi ser att riktningsvektorn är noll i punkten som svarar mot $t = 0$, d.v.s. i punkten $\boldsymbol{r}(0) = (0,0)$. Kurvan är alltså möjligtvis irregulär i origo (men behöver inte vara det).

Vi avgör regulariteten genom att undersöka gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} (\text{lutningen hos riktningsvektorn i } \boldsymbol{r}(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2}.$$

Om gränsvärdet existerar är kurvan regulär annars inte.

Vi har

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} &= \{ \text{ Maclaurinutveckling } \} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1 - \big(1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)\big)}{3t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \big(\tfrac{1}{6} + O(t^2)\big) = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

Alltså är kurvan regulär överallt.

8.4.2 Bestäm båglängden av kurvan

$$\begin{aligned} x &= 1 + t^3 \\ y &= 1 - t^2 \end{aligned} \qquad (-1 \leq t \leq 2).$$

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^2 \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}.$$

Riktningsvektorn är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Båglängden ges av formeln

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{2} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \, dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{(3t^2)^2 + (-2t)^2} \, dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{9t^4 + 4t^2} \, dt \\ &= \int_{-1}^{2} 3|t| \sqrt{t^2 + \tfrac{4}{9}} \, dt = \int_{-1}^{0} -3t \sqrt{t^2 + \tfrac{4}{9}} \, dt + \int_{0}^{2} 3t \sqrt{t^2 + \tfrac{4}{9}} \, dt \\ &= \left\{ s = t^2 + \tfrac{4}{9}; \; ds = 2t \, dt \right\} = -\tfrac{3}{2} \int_{13/9}^{4/9} \sqrt{s} \, ds + \tfrac{3}{2} \int_{4/9}^{40/9} \sqrt{s} \, ds \\ &= -\left[s\sqrt{s} \right]_{13/9}^{4/9} + \left[s\sqrt{s} \right]_{4/9}^{40/9} \\ &= -\left(\tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{2}{3} - \tfrac{13}{9} \cdot \tfrac{\sqrt{13}}{3} \right) + \left(\tfrac{40}{9} \cdot \tfrac{\sqrt{40}}{3} - \tfrac{4}{9} \cdot \tfrac{2}{3} \right) = \frac{13\sqrt{13} + 40\sqrt{40} - 16}{27}. \end{aligned}$$

8.4.6 Bestäm längden av kurvan

$$\begin{aligned} x &= \cos t + t \sin t \\ y &= \sin t - t \cos t \end{aligned} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}$$

Riktningsvektorn är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix}.$$

Båglängden ges av formeln

$$\begin{aligned} L &= \int_{0}^{2\pi} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \, dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} \, dt \\ &= \int_{0}^{2\pi} |t| \, dt = \left[\tfrac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2. \end{aligned}$$

8.4.12 Finn arean av ytan som uppstår då kurvan

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{aligned} \qquad (0 \leq t \leq \tfrac{1}{2}\pi)$$

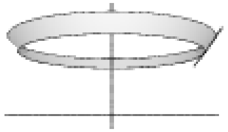
roteras kring y-axeln.

Först skriver vi kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix},$$

som har riktningsvektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix}.$$



Ytelementet till rotationsytan ges av

$$ds = 2\pi\, x(t)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt$$

Den totala arean blir

$$\begin{aligned} A &= \int ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^t \cos t \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}\, dt \\ &= \cdots = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^{2t} \cos t\, dt = \{\text{ partiell integration }\} \\ &= 2\pi\sqrt{2}\, \big[\, e^{2t} \sin t \,\big]_0^{\pi/2} - 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} 2e^{2t} \cdot \sin t\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{2}\, e^{\pi} - 0 - 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^{2t} \sin t\, dt = \{\text{ partiell integration }\} \\ &= 2\pi\sqrt{2}\, e^{\pi} - 4\pi\sqrt{2}\, \big[-e^{2t} \cos t \,\big]_0^{\pi/2} + 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} 2e^{2t} \cdot (-\cos t)\, dt \\ &= 2\pi\sqrt{2}\, e^{\pi} - 4\pi\sqrt{2} - 4 \cdot A \end{aligned}$$

Ur detta samband löser vi ut A,

$$A = \frac{2\pi\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 2)}{5}.$$

8.4.14 Finn arean av ytan som uppstår då kurvan

$$\begin{aligned} x &= 3t^2 \\ y &= 2t^3 \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 1)$$

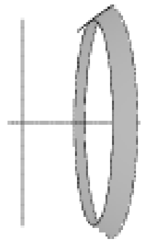
roteras kring x-axeln.

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix},$$

och räknar ut dess riktningsvektor

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}.$$



Ytelementet till rotationsytan ges av

$$ds = 2\pi\, y(t)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt$$

Den totala arean blir

$$A = \int ds = 2\pi \int_0^1 2t^3 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2}\, dt = 24\pi \int_0^1 t^4 \sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

För integraler av denna typ är standardmetoden att substituera $t = \tan\theta$ och då förenkla $\sqrt{1+t^2}$ till $1/|\cos\theta\,|$,

$$\begin{aligned} &= \Big\{\, t = \tan\theta\, ;\ dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\, ;\ 0 \le \theta \le \pi/4 \,\Big\} \\ &= 24\pi \int_0^{\pi/4} \tan^4\theta \, \frac{1}{|\cos\theta|} \, \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^4\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta \\ &= 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4\theta}{\cos^7\theta}\, d\theta = 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4\theta}{\cos^8\theta}\, \cos\theta\, d\theta \\ &= \{\text{ trigonometriska ettan }\} = 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4\theta}{\big(1 - \sin^2\theta\big)^4}\, \cos\theta\, d\theta \\ &= \{\, s = \sin\theta\, ;\ ds = \cos\theta\, d\theta\, ;\ 0 \le s \le 1/\sqrt{2} \,\} = 24\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{s^4}{(1-s^2)^4}\, ds. \end{aligned}$$

Nu har vi nått en rationell integrand och den kan vi integrera genom en partialbråkuppdelning, d.v.s. ansätta

$$\frac{s^4}{(1-s^2)^4} = \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} + \frac{E}{(s-1)^4} + \frac{F}{(s+1)} + \frac{G}{(s+1)^2} + \frac{H}{(s+1)^3} + \frac{I}{(s+1)^4},$$

men detta kommer att leda till mycket arbete. Ett alternativ är att succesivt lägga till och dra ifrån lämpliga termer så att täljaren och nämnaren kan förkortas,

$$\begin{aligned}\frac{s^4}{(1-s^2)^4} &= \frac{s^4-1+1}{(s^2-1)^4} = \frac{(s^2-1)(s^2+1)}{(s^2-1)^4} + \frac{1}{(s^2-1)^4}\\ &= \frac{s^2+1}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4} = \frac{s^2-1+2}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4}\\ &= \frac{1}{(s^2-1)^2} + \frac{2}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4}.\end{aligned}$$

Areaintegralen är alltså lika med

$$A = 24\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(s^2-1)^2} + \frac{2}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4} \right) ds.$$

Här kan vi notera att alla tre integraltermer är i formen

$$I_n = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^n}.$$

Just denna typ av integraler kan man i många fall beräkna genom att härleda en rekursionsformel med hjälp av partialintegrering, d.v.s. uttrycka I_n i termer av $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots, I_1$. I vårt fall är

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^n} = \int_0^{1/\sqrt{2}} 1 \cdot \frac{1}{(s^2-1)^n}\,ds = \{\,\text{partiell integration}\,\}\\ &= \left[\, s \cdot \frac{1}{(s^2-1)^n} \,\right]_0^{1/\sqrt{2}} - \int_0^{1/\sqrt{2}} s \cdot \frac{-n\cdot 2s}{(s^2-1)^{n+1}}\,ds\\ &= (-1)^n\,\frac{2^n}{\sqrt{2}} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{s^2}{(s^2-1)^{n+1}}\,ds\\ &= (-1)^n\,2^{n-1/2} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{s^2-1+1}{(s^2-1)^{n+1}}\,ds\\ &= (-1)^n\,2^{n-1/2} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^n} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^{n+1}}\\ &= (-1)^n\,2^{n-1/2} + 2n\,I_n + 2n\,I_{n+1}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}2^{n-3/2}}{n} - \frac{2n-1}{2n}\,I_n. \qquad (*)$$

Om vi börjar med den enklaste av integralerna I_n, d.v.s. I_1, så är den ganska enkel att beräkna med en partialbråkuppdelning

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{s^2-1} = \tfrac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) ds = \tfrac{1}{2}\left[\log\left|\frac{s-1}{s+1}\right| \right]_0^{1/\sqrt{2}}\\ &= \tfrac{1}{2}\log\left|\frac{1/\sqrt{2}-1}{1/\sqrt{2}+1}\right| - 0 = \tfrac{1}{2}\log\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right| = \tfrac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\\ &= \tfrac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \log(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

Sedan kan vi använda rekursionsformeln $(*)$ för att bestämma de sökta integralerna I_2, I_3 och I_4,

$$\begin{aligned}I_2 &= \tfrac{(-1)^2\,2^{-1/2}}{1} - \tfrac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\,I_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1),\\ I_3 &= \tfrac{(-1)^3\,2^{1/2}}{2} - \tfrac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}\,I_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1)\Big)\\ &= -\tfrac{7}{4\sqrt{2}} + \tfrac{3}{8}\log(\sqrt{2}-1),\\ I_4 &= \tfrac{(-1)^4\,2^{3/2}}{3} - \tfrac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3}\,I_3 = \tfrac{2\sqrt{2}}{3} - \tfrac{5}{6}\Big(-\tfrac{7}{4\sqrt{2}} + \tfrac{3}{8}\log(\sqrt{2}-1)\Big)\\ &= \tfrac{67}{24\sqrt{2}} - \tfrac{15}{48}\log(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

Sammanställer vi uträkningarna fås

$$\begin{aligned}A &= 24\pi\big(I_2 + 2I_3 + I_4\big) = 24\pi\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}\log(\sqrt{2}-1)\\ &\qquad + 2\Big(-\tfrac{7}{4\sqrt{2}} + \tfrac{3}{8}\log(\sqrt{2}-1)\Big) + \tfrac{67}{24\sqrt{2}} - \tfrac{15}{48}\log(\sqrt{2}-1)\Big)\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\pi\,\big(24 - 7\cdot 12 + 67\big) + \pi\,\big(-12 + 6\cdot 3 - \tfrac{15}{2}\big)\log(\sqrt{2}-1)\\ &= \tfrac{7}{\sqrt{2}}\pi - \tfrac{3}{2}\pi\log(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

8.5.4 Transformera den polära ekvationen

$$r = \sin\theta + \cos\theta$$

till kartesiska koordinater och bestäm vilken kurva ekvationen beskriver.

Multiplicera båda leden i den polära ekvationen med r,

$$\begin{aligned} \text{VL} &= r^2 = x^2 + y^2, \\ \text{HL} &= r\sin\theta + r\cos\theta = x + y. \end{aligned}$$

Ekvationen i kartesiska koordinater är alltså

$$x^2 - x + y^2 - y = 0.$$

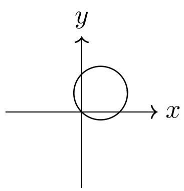
Kvadratkomplettera i x,

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + y^2 - y = 0.$$

Kvadratkomplettera i y,

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Ekvationen beskriver alltså en cirkel med mittpunkt i $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ och radie $1/\sqrt{2}$.



8.5.10 Transformera den polära ekvationen

$$r = \frac{2}{2 - \cos\theta}$$

till kartesiska koordinater och bestäm vilken kurva ekvationen beskriver.

Förläng med $2 - \cos\theta$,

$$\begin{aligned} r(2 - \cos\theta) &= 2, \\ 2r - r\cos\theta &= 2, \\ 2r - x &= 2. \end{aligned}$$

Samla r i ena ledet,

$$r = 1 + \tfrac{1}{2}x.$$

Kvadrera

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 + \tfrac{1}{4}x^2 + x, \\ x^2 + y^2 &= 1 + \tfrac{1}{4}x^2 + x. \end{aligned}$$

Alltså är ekvationen

$$\tfrac{3}{4}x^2 + y^2 - x = 1.$$

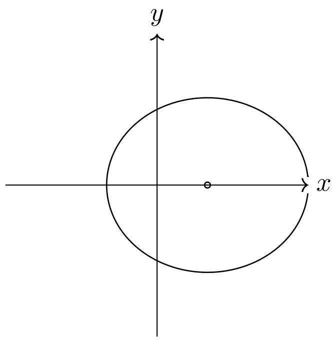
Kvadratkomplettera i x,

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}(x - \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{1}{3} + y^2 &= 1, \\ \tfrac{3}{4}(x - \tfrac{2}{3})^2 + y^2 &= \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ekvationen börjar påminna om ellipsens ekvation. Låt oss skriva om ekvationen i ellipsens standardform

$$\left(\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2/\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

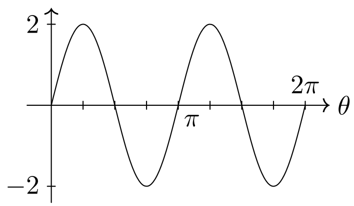
Ekvationen beskriver en ellips med mittpunkt i $(\frac{2}{3}, 0)$ och halvaxlar $\frac{4}{3}$ och $\frac{2}{\sqrt{3}}$.



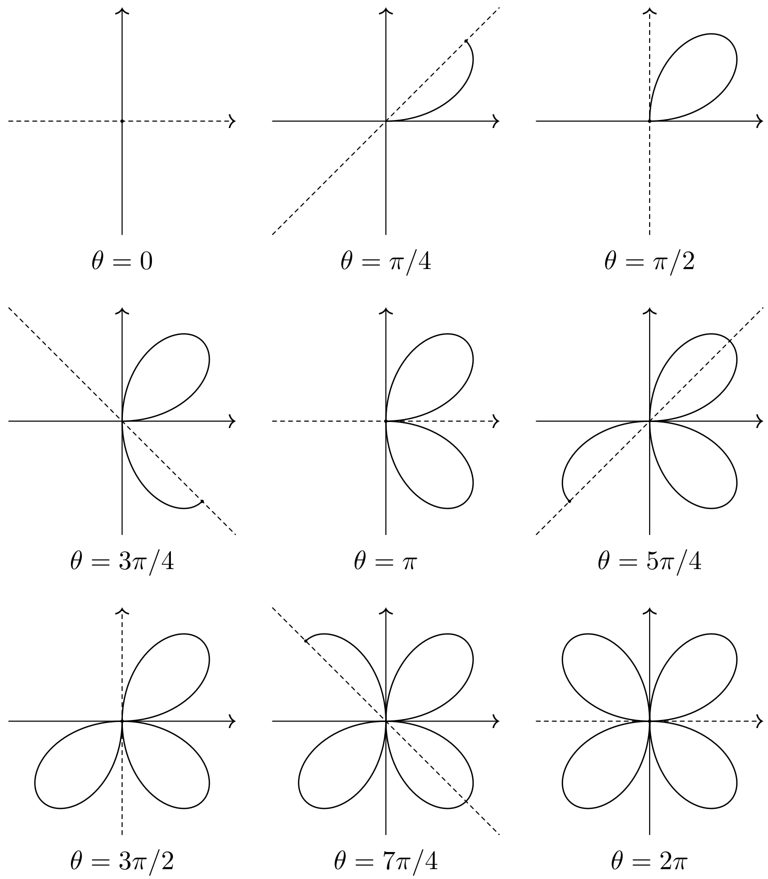
8.5.18 Skissera kurvan som ges av den polära ekvationen

$$r = 2 \sin 2\theta.$$

Vi ritar först upp hur VL beror av vinkeln θ.



Detta diagram visar alltså hur radien r varierar när θ går från 0 till 2π. För att underlätta ritandet av kurvan ritar vi några ögonblicksbilder vid de tidpunkter då radien antingen är noll eller antar ett max/min.



Lektion 2, Flervariabelanalys den 19 januari 2000

11.1.6 Finn hastighet, fart och acceleration vid tidpunkt t av en partikel med lägesvektorn

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{e}_x + t^2\boldsymbol{e}_y + t^2\boldsymbol{e}_z.$$

Beskriv också partikelns trajektoria.

Vi skriver lägesvektorn i vektorform,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Deriverar vi lägesvektorn får vi hastigheten till

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Farten är

$$v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 8t^2},$$

och accelerationen är

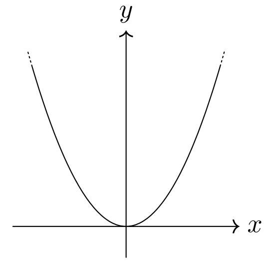
$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

För att rita upp kurvan som partikeln genomlöper kan det vara enklare att, precis som i konstruktionsritningar, bortse från en dimension och rita upp projektionen av kurvan för att senare lägga ihop projektionerna till en tredimensionell bild av kurvan.

Vi börjar med att betrakta kurvan i x, y-planet,

$$\boldsymbol{r}_{x,y}(t) = t\boldsymbol{e}_x + t^2\boldsymbol{e}_y.$$

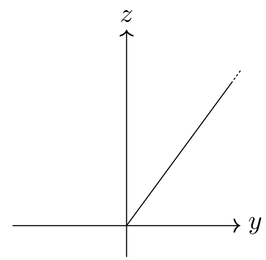
Genom att uttrycka y-koordinaten i x ser vi att kurvan är funktionsgrafen till $y = x^2$.



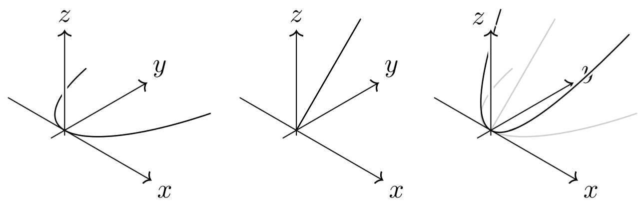
Den andra projektionen vi kan göra är att betrakta kurvan i y, z-planet,

$$\boldsymbol{r}_{y,z}(t) = t^2\boldsymbol{e}_y + t^2\boldsymbol{e}_z.$$

I detta fall ser vi att y- och z-koordinaterna är lika och icke-negativa eftersom t^2 alltid är icke-negativ. Kurvan ligger alltså på linjen $y = z$.



Dessa två bilder räcker för att rita upp den tredimensionella kurvan.



11.1.15 En partikel rör sig runt cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ med den konstanta farten av 1 varv varannan sekund. Vilken acceleration har partikeln när den är i punkten $(3, 4)$.

Partikelns läge kan vi skriva som

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{e}_x + y(t)\,\boldsymbol{e}_y.$$

Genom att derivera två gånger fås accelerationen

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}(t)\,\boldsymbol{e}_y.$$

Eftersom vi vet att partikeln rör sig på en cirkel med radie 5 och mittpunkt i origo är det lämpligt att beskriva partikelns läge med polära koordinater.

En konstant vinkelhastighet av $\frac{1}{2}$ varv/s skrivs som

$$\theta = \pm\pi t + \theta_0,$$

där $\pm$ uppstår eftersom vi inte vet om partikeln rör sig med- eller motsols. θ_0 är den vinkel som partikeln har vid $t = 0$. Radien är $r = 5$.

Alltså är

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos\theta = 5\cos(\pm\pi t + \theta_0),\\ y(t) &= r\sin\theta = 5\sin(\pm\pi t + \theta_0). \end{aligned}$$

Från uppgiftstexten får vi inte direkt information om vid vilken tidpunkt som vi ska bestämma accelerationen, utan tidpunkten bestäms istället av villkoret att $x(t) = 3$ och $y(t) = 4$.

Om vi därför kan uttrycka $\ddot{x}$ och $\ddot{y}$ direkt i termer av x och y så undviker vi att behöva bestämma t. Vi har

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mp 5\pi\sin(\pm\pi t + \theta_0) = \mp\pi y(t),\\ \dot{y}(t) &= \pm 5\pi\cos(\pm\pi t + \theta_0) = \pm\pi x(t),\\ \ddot{x}(t) &= \mp\pi\dot{y}(t) = -\pi^2 x(t),\\ \ddot{y}(t) &= \pm\pi\dot{x}(t) = -\pi^2 y(t). \end{aligned}$$

Accelerationen i $(x, y) = (3, 4)$ är

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -3\pi^2\,\boldsymbol{e}_x - 4\pi^2\,\boldsymbol{e}_y.$$

11.1.16 En partikel rör sig åt höger längs kurvan $y = 3/x$. Om dess fart är 10 när den passerar genom punkten $(2, 3/2)$, vad är dess hastighet vid den tidpunkten.

Eftersom vi redan vet partikelns fart behöver vi bara dess hastighetsriktning i punkten.

Kurvan som partikeln rör sig på är en funktionsgraf som redan är parametriserad av x. Punkter på kurvan kan alltså skrivas som

$$\begin{aligned} x &= s\\ y &= 3/s \end{aligned} \qquad (s \text{ parameter}),$$

eller i vektorform

$$\boldsymbol{r}(s) = \begin{pmatrix} s \\ 3/s \end{pmatrix}.$$

Riktningsvektorn, som pekar åt höger, ges av

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(2)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(2)|} &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-3/s)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3/s^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{s=2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 9/16}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partikelns hastighet är farten gånger hastighetsriktningen

$$10\,\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

11.3.6 Planet $x + y + z = 1$ skär cylindern $z = x^2$ längs en parabel. Bestäm parametriseringen av parabeln med $t = x$ som parameter.

Skärningskurvan mellan de två ytorna tillhör båda ytorna och måste därför uppfylla båda ytornas ekvationer.

$$x + y + z = 1, \tag{1}$$

$$z = x^2. \tag{2}$$

Eftersom vi väljer $t = x$ som parameter ger (2) direkt att

$$z = t^2.$$

Detta insatt i (1) ger

$$t + y + t^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 1 - t - t^2.$$

Alltså har skärningskurvan parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t - t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

11.3.8 Parametrisera skärningskurvan mellan ytorna $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och $x + y = 1$.

Skärningskurvan tillhör båda ytorna och måste därför uppfylla båda ytornas ekvationer

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \tag{1}$$

$$x + y = 1. \tag{2}$$

Om vi fixerar x så ser vi att (2) bestämmer ett y-värde och (1) bestämmer ett z-värde. För varje x-värde finns alltså högst en punkt på skärningskurvan. Just detta 1:1 förhållande gör att vi kan välja $t = x$ som parameter. Löser vi ut y och z i termer av $t = x$, från (1) och (2), fås

$$y = 1 - x = 1 - t, \tag{3}$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - t^2 - (1 - t)^2} = \sqrt{2t(1 - t)}. \tag{4}$$

Det är dock inte alla x-värden som ger en punkt på skärningslinjen. Vi ser i (4) att vi måste begränsa t till intervallet $[0, 1]$ för att ett z-värde ska svara mot t. Ekvation (3) ställer inga sådana krav. Parametermängden måste alltså väljas till $[0, 1]$.

Sammantaget har alltså skärningslinjen parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \\ \sqrt{2t(1 - t)} \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 1).$$

11.3.14 För vilka värden på parametern λ är längden $L(T)$ av kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{e}_x + \lambda t^2 \boldsymbol{e}_y + t^3 \boldsymbol{e}_z \qquad (0 \le t \le T)$$

lika med $T + T^3$?

Vi har

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \lambda t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Längden av kurvan ges av integralen

$$\begin{aligned} L(T, \lambda) &= \int_0^T |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt = \int_0^T \sqrt{1^2 + (2\lambda t)^2 + (3t^2)^2}\, dt \\ &= \int_0^T \sqrt{1 + 4\lambda^2 t^2 + 9t^4}\, dt \end{aligned} \tag{$*$}$$

En integral av den här typen är i allmänhet inte analytiskt lösbar. Det enda undantaget är när uttrycket under rottecknet råkar vara en kvadrat. Om vi kvadratkompletterar i t^2,

$$1 + 4\lambda^2 t^2 + 9t^4 = 9\big(t^2 + \tfrac{2}{9}\lambda^2\big)^2 + 1 - \tfrac{4}{9}\lambda^4,$$

så ser vi att uttrycket är en kvadrat endast då

$$1 - \tfrac{4}{9}\lambda^4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

I dessa fall blir integralen

$$L(T) = \int_0^T \bigl|3(t^2 + \tfrac{1}{3})\bigr|\,dt = 3\bigl[\,\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{3}t\,\bigr]_0^T = T^3 + T.$$

Detta var minst sagt lyckosamt, men vi kan dock inte utesluta att det även finns andra λ-värden för vilka integralen också råkar anta värdet T^3+T. Låt oss bevisa att detta inte inträffar.

Om vi betraktar integranden i $(*)$ som en funktion av λ,

$$f(\lambda) = \sqrt{1 + 4\lambda^2 t^2 + 9t^4},$$

så ser vi att f är strängt växande för $\lambda > 0$ och strängt avtagande för $\lambda < 0$ (derivera f om du inte är övertygad). Eftersom integralen har monotonicitets-egenskapen

$$f < g \quad \Rightarrow \quad \int f < \int g,$$

så har vi att $L(T,\lambda)$ är strängt växande i $\lambda > 0$ och strängt avtagande i $\lambda < 0$. Alltså kan $L(T)$ endast anta värdet $T + T^3$ högst en gång för negativa respektive positiva λ.

Vi har därmed visat att

$$L(T) = T + T^3$$

endast då $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

11.3.18 Beskriv skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och den elliptiska cylindern $x^2 + 2z^2 = 1$. Beräkna den totala längden av skärningskurvan.

Skärningskurvan mellan de två ytorna uppfyller båda ytornas ekvationer

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{1}$$
$$x^2 + 2z^2 = 1. \tag{2}$$

Ekvation (2) beskriver i x,z-planet en ellips med halvaxlar 1 och $1/\sqrt{2}$. Det betyder att skärningskurvans x- och z-koordinater alltid kommer ligga på denna ellips, m.a.o. om vi projicerar skärningskurvan på x,z-planet så får vi en kurva som är en del av ellipsen (eller hela ellipsen).

Standardparametriseringen av en ellips ger att vi kan skriva

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ z &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Detta insatt i (1) ger

$$y^2 = 1 - \cos^2 t - \tfrac{1}{2}\sin^2 t = \tfrac{1}{2}\sin^2 t \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t.$$

För varje t-värde finns alltså två y-värden, vilket betyder att skärningskurvan består av två kurvor

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$
$$\boldsymbol{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Av parametriseringen ser vi också att de två kurvorna är spegelsymmetriska i x,z-planet $(y \leftrightarrow -y)$ varför de måste ha samma längd. Skärningskurvans totala längd är därför

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{2\pi} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t)^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t)^2}\,dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = 2\int_0^{2\pi} 1\,dt = 4\pi. \end{aligned}$$

11.3.19 Låt C vara kurvan

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi). \\ z &= t \end{aligned}$$

Beräkna längden av C.

Kurvan C skriven i vektorform och dess riktningsvektor är

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Längden av C är

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^t\cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + 1^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}+1}\,dt = \{\, s = \sqrt{2}\,e^t;\ ds = \sqrt{2}\,e^2\,dt = s\,dt \,\} \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} \frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\,ds = \{\, \text{Beta handboken, integralformel 95} \,\} \\ &= \Big[\sqrt{s^2+1} - \log\Big|\frac{\sqrt{s^2+1}+1}{s}\Big| \Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} \\ &= \sqrt{2e^{4\pi}+1} - \log\frac{\sqrt{2e^{4\pi}+1}+1}{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} - \sqrt{3} + \log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

11.4.4 Finn enhetstangentvektorn $\boldsymbol{e}_T(t)$ till kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{e}_x + b \sin t\,\boldsymbol{e}_y + t\,\boldsymbol{e}_z.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= -a\sin t\,\boldsymbol{e}_x + b\cos t\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \\ |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| &= \sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + 1}. \end{aligned}$$

Enhetstangentvektorn är

$$\boldsymbol{e}_T(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|} = \frac{-a\sin t\,\boldsymbol{e}_x + b\cos t\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2 \cos^2 t + 1}}.$$

11.4.5 Visa att om krökningen uppfyller

$$\kappa(s) = 0 \qquad \text{för alla } s,$$

så är kurvan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ en rät linje.

Om vi låter $\boldsymbol{e}_T(s)$ beteckna kurvans enhetstangent så vet vi alltså att

$$\Big|\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_T(s)\Big| = \kappa(s) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_T(s) = \boldsymbol{0}. \qquad (*)$$

Denna likhet kan vi med integralkalkylens huvudsats integrera upp (vi integrerar varje komponent för sig),

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_T(s) - \boldsymbol{e}_T(0) = \int_0^s \frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_T(s)\,ds = \int_0^s \boldsymbol{0}\,ds = \boldsymbol{0} \\ \Leftrightarrow \qquad &\boldsymbol{e}_T(s) = \boldsymbol{e}_T(0) = \boldsymbol{u} \quad \text{för alla } s. \end{aligned}$$

Alltså är enhetstangenten konstant för alla s.

Enhetstangenten är i sin tur derivatan av lägesvektorn (eftersom vi använder båglängden som parameter),

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{e}_T(s) = \boldsymbol{u}.$$

Integrerar vi upp denna likhet fås

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(0) = \int_0^s \frac{d}{ds}\boldsymbol{r}(s)\,ds = \int_0^s \boldsymbol{u}\,ds = \boldsymbol{u}\,s \\ \Leftrightarrow \qquad &\boldsymbol{r}(s) = s\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}(0) = s\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

och detta är en parametrisering av en rät linje.

11.5.2 Finn krökningsradien till kurvan

$$y = \cos x$$

i punkten $x = 0$ och $x = \pi/2$.

Vi har

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

och med determinantformeln får vi

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & 1 & 0 \\ \boldsymbol{e}_y & -\sin t & -\cos t \\ \boldsymbol{e}_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Krökningsradien är

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{(1 + \sin^2 t)^{3/2}}{|\cos t|}$$

vilket ger

$$1/\kappa(0) = 1, \qquad 1/\kappa(\pi/2) = \infty.$$

11.5.4 Finn krökningsradien till kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = t^3 \boldsymbol{e}_x + t^2 \boldsymbol{e}_y + t\boldsymbol{e}_z$$

i punkten med $t = 1$.

Vi har

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

och med determinantformeln får vi

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & 3t^2 & 6t \\ \boldsymbol{e}_y & 2t & 2 \\ \boldsymbol{e}_z & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6t \\ -6t^2 \end{pmatrix}.$$

Krökningsradien är

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{\left((3t^2)^2 + (2t)^2 + 1^2\right)^{3/2}}{\sqrt{(-2)^2 + (6t)^2 + (-6t^2)^2}} = \frac{\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)^{3/2}}{\sqrt{4 + 36t^2 + 36t^4}},$$

vilket ger

$$1/\kappa(1) = \frac{14\sqrt{14}}{\sqrt{76}}.$$

Lektion 3, Flervariabelanalys den 20 januari 2000

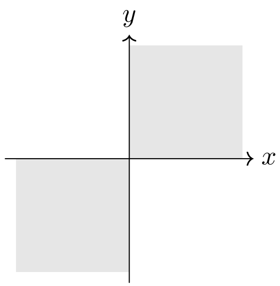
12.1.2 Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{xy}$$

Funktionen är definierad i alla punkter där argumentet till kvadratroten är icke-negativ, d.v.s. där

$$xy \geq 0$$

vilket inträffar om x och $y \geq 0$ eller om x och $y \leq 0$. Definitionsmängden är alltså det gråfärgade området till höger.



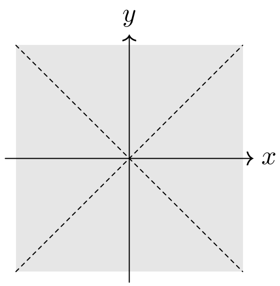
12.1.4 Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

Denna rationella funktion är definierad överallt utom i punkter där nämnaren är noll, d.v.s. utom då

$$\begin{aligned} &x^2 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &(x-y)(x+y) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ &x = y \quad \text{eller} \quad x = -y. \end{aligned}$$

Alltså är funktionen definierad i hela talplanet utom i punkter på linjerna $x = y$ och $x = -y$. Streckade linjer betyder att de inte tillhör den gråfärgade definitionsmängden.



12.1.5 Bestäm definitionsmängden till funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}.$$

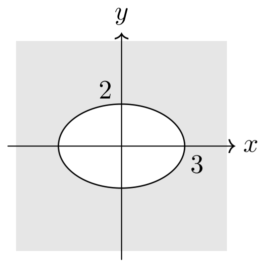
Funktionen är definierad i alla punkter där argumentet till kvadratroten är icke-negativ, d.v.s. där

$$4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0.$$

Denna olikhet kan vi skriva om i standardform

$$\tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{1}{4}y^2 \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \geq 1. \qquad (*)$$

Nu ser vi att de punkter som uppfyller $(*)$ är punkterna på och utanför ellipsen med mittpunkt i origo och halvaxlar 3 och 2.



Att ellipsen är heldragen betyder att den tillhör den gråfärgade definitionsmängden.

12.1.14 Skissera grafen till funktionen

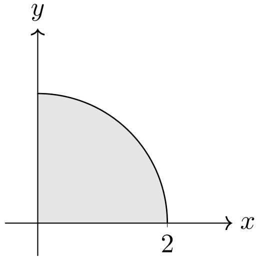
$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$$

i området $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Låt oss först ta reda på hur området ser ut. De punkter som ingår i området måste uppfylla de tre villkoren

$$x^2 + y^2 \leq 4, \tag{1}$$
$$x \geq 0, \tag{2}$$
$$y \geq 0. \tag{3}$$

Olikheterna (2) och (3) betyder att punkterna måste ligga i första kvadranten. Olikhet (1) betyder att punkterna dessutom måste ligga innanför eller på cirkeln med mittpunkt i origo och radie 2.

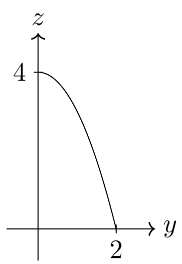


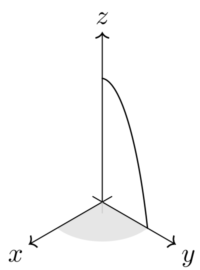
För att rita upp funktionsytan till f ska vi börja med att räkna ut funktionens värde längs randkurvorna till området.

$x = 0$: När vi rör oss längs y-axeln ($x = 0$) ges funktionsvärdena av uttrycket

$$z = f(0,y) = 4 - y^2$$

och om vi ritar upp hur z beror av y får vi kurvstycket nedan till vänster. Detta betyder att funktionsytan har detta parabelstycke som randkurva längs y-axeln.

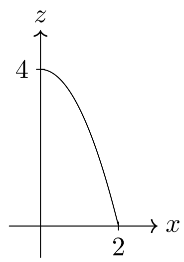


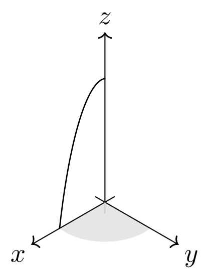


$y = 0$: Längs x-axeln ($y = 0$) har funktionen utseendet

$$z = f(x,0) = 4 - x^2,$$

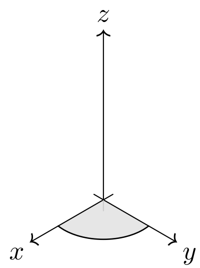
och grafen är en parabel. Funktionsytan har alltså detta kurvstycke som randkurva längs x-axeln.



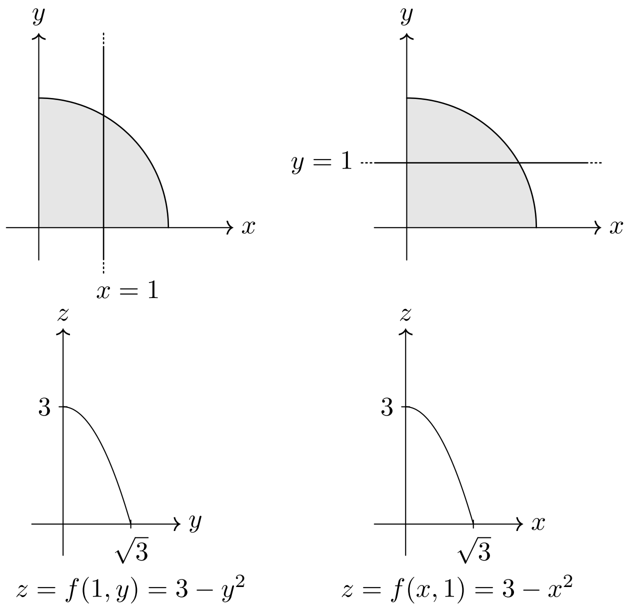


$x^2 + y^2$: När vi rör oss längs cirkelbågen är uttrycket $x^2 + y^2$ ($=$ avstånd^2 till origo) konstant lika med 4, så på denna cirkelbåge antar funktionen värdet

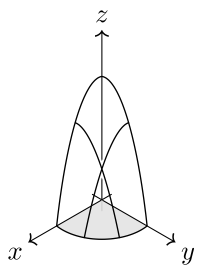
$$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2) = 0.$$



Vi har nu fått ett skelett till funktionsytan i och med att vi vet hur den ser ut längs randen av området. För att ytterligare underlätta ritandet av funktionsytan kan vi dessutom välja att undersöka hur funktionen ser ut längs några linjer som genomkorsar området.



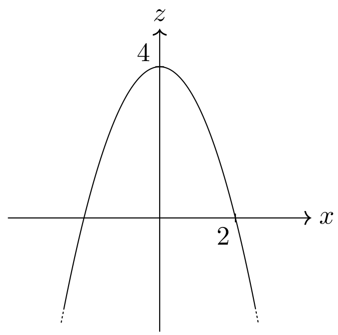
Ritar vi nu ut dessa stödlinjer tillsammans med randkurvorna får vi en figur som ganska väl låter oss ana funktionsytans utseende.



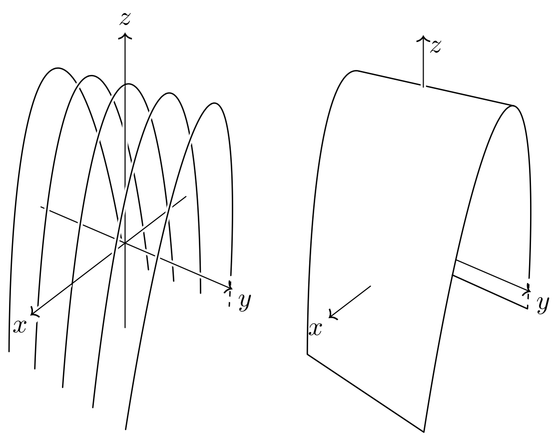
12.1.16 Skissera grafen till funktionen

$$f(x, y) = 4 - x^2.$$

Det första vi kan notera är att y inte förekommer i funktionsuttrycket. Det betyder att funktionen är oberoende av y. Vi kan därför undersöka funktionens värde längs en linje $y = C$ i x, y-planet och automatiskt få funktionens värde längs alla andra parallella linjer med olika C-värden. Ritar vi upp f:s värde längs $y = C$ får vi parabeln



och inritade i x, y, z-rummet får vi en kurvskara av parabler.



Funktionsytan genereras alltså av dessa parabler genom att parallellförflytta dem längs y-axeln.

12.1.20 Skissera några nivåkurvor till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2.$$

En nivåkurva består av alla punkter (x,y) som uppfyller sambandet

$$f(x,y) = C,$$

för något C. I vårt fall består alltså nivåkurvorna av kurvor i formen

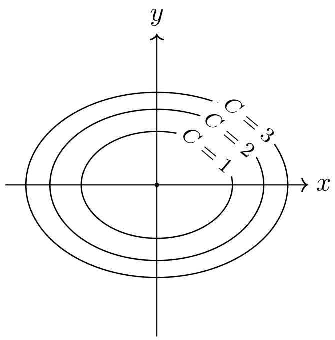
$$x^2 + 2y^2 = C. \qquad (*)$$

Eftersom VL alltid är icke-negativt måste $C \geq 0$ för att kurvan ska innehålla några punkter, och i fallet $C > 0$ kan vi skriva $(*)$ i standardformen

$$\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{C/2}}\right)^2 = 1.$$

Detta visar att nivåkurvorna består av ellipser med mittpunkt i origo och halvaxlar $\sqrt{C}$ och $\sqrt{C/2}$.

Om $C = 0$ ger $(*)$ att nivåkurvan endast består av punkten $(0,0)$.



12.1.22 Skissera några nivåkurvor till funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

Nivåkurvorna är i formen

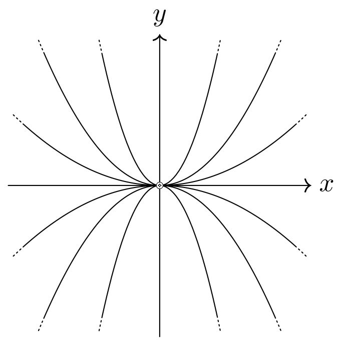
$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} = C. \qquad (*)$$

Om vi antar att $C \neq 0$ (och $y \neq 0$) då kan $(*)$ skrivas som

$$y = \frac{x^2}{C},$$

d.v.s. nivåkurvorna är parabler i x,y-planet.

Fallet $C = 0$ ger linjen $x = 0$ (med $y = 0$ borttagen).



Anm. I en omgivning av origo har funktionen ett komplicerat beteende med många olika funktionsvärden i mycket närliggande punkter.

Lektion 4, Flervariabelanalys den 25 januari 2000

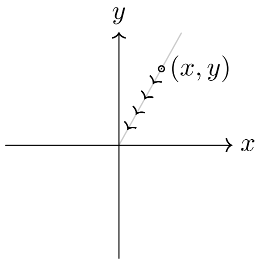
12.2.2 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$$

eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

För att gränsvärdet ska existera måste gränsvärdesuttrycket närma sig ett och samma värde oavsett hur vi låter $(x, y) \to (0, 0)$.

Ett första test kan därför vara att låta (x, y) närma sig origo längs en rät linje.



En rät linje genom origo kan allmänt skrivas i parameterformen

$$(x, y) = t(a, b) \qquad (t \text{ parameter}),$$

där (a, b) är riktningsvektorn för linjen och $t = 0$ svarar mot origo. När vi närmar oss origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{(at)^2+(bt)^2} = \lim_{t\to 0^+} |t|\sqrt{a^2+b^2} = 0.$$

Eftersom detta gränsvärde är oberoende av a och b spelar det ingen roll i vilken riktning vi närmar oss origo.

Detta betyder dock inte att gränsvärdet måste existera (se det viktiga exempel 3 avsnitt 12.2 i kursboken), utan vi kan faktiskt inte ännu dra någon slutsats därom.

Vår misstanke kan iallafall vara att gränsvärdet existerar och är lika med 0. För att visa detta är ett sätt att vi går tillbaka till definitionen av gränsvärde och visar att den är uppfylld.

Definitionen av gränsvärde lyder:

> Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer så ska det alltid finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $$|f(x, y) - 0| < \varepsilon \quad \text{för alla } (x, y) \text{ s.a. } 0 < |(x, y) - (0, 0)| < \delta.$$

I vårt fall ska vi välja $\delta > 0$ s.a.

$$\sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon \quad \text{för alla } (x, y) \text{ s.a. } 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Om vi väljer $\delta = \varepsilon$ så är definitionen uppfylld. Vi har därmed visat att gränsvärdet existerar och är lika med 0.

Anm. En kortare räkning är

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} &= \{ \sqrt{\cdot} \text{ är kontinuerlig} \} \\
&= \sqrt{\lim_{x,y\to 0}(x^2+y^2)} = \sqrt{\lim_{x,y\to 0} x^2 + \lim_{x,y\to 0} y^2} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{y\to 0} y^2} = 0.
\end{aligned}$$

12.2.4 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x}{x^2+y^2}$$

eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Vi utför ett första test genom att låta $(x, y) \to (0, 0)$ längs en rät linje. En parametrisering av en allmän linje genom origo är

$$(x, y) = t(a, b) \quad (t \text{ parameter}),$$

och när vi närmar oss origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{at}{(at)^2+(bt)^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{t} = \begin{cases} \infty, & \text{om } a>0 \\ 0, & \text{om } a=0 \\ -\infty, & \text{om } a<0 \end{cases}$$

Detta gränsvärdet existerar inte och därför kan inte gränsvärdet i uppgiftstexten existera.

12.2.11 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Vi börjar med det obligatoriska testet när $(x,y)\to(0,0)$ längs en rät linje. Vi kan då skriva x och y i parameterformen

$$(x,y) = t(a,b) \quad (t \text{ parameter}).$$

Gränsvärdet blir då

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(at)^2(bt)^2}{(at)^2+(bt)^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^2b^2\,t^4}{a^2t^2+b^4t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^2b^2\,t^2}{a^2+b^4t^2} = 0$$

som är oberoende av a och b, d.v.s. av i vilken riktning vi närmar oss origo. Precis som sagts tidigare räcker inte detta för att bevisa att gränsvärdet existerar. Testet kan bara användas för att sortera bort gränsvärden som inte existerar.

Istället för att gå tillbaka till definitionen av gränsvärde för att bevisa att gränsvärdet existerar kan vi använda oss av instängningsprincipen. Vi har att

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le \frac{x^2y^2}{x^2+0} = y^2.$$

Eftersom HL $\to 0$ då $x,y\to 0$ så ger instängningsprincipen att

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0.$$

12.2.14 Hur ska funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y} \qquad (x\ne y)$$

definieras på linjen $x=y$ så att den blir kontinuerlig i hela x,y-planet?

Med en polynomdivision

$$\begin{array}{l|l}
x^2+y^2\ \ +xy & \\ \hline
x^3-y^3 & \ x-y \\ \cline{2-2}
x^3-x^2y & \\ \cline{1-1}
\quad -y^3\ \ +x^2y & \\
\quad -y^3\ \ +xy^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad x^2y-xy^2 & \\
\qquad\quad x^2y-xy^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

får vi att

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+y^2+xy \qquad (x\ne y).$$

Om vi sätter $F(x,y) = x^2+y^2+xy$ så har vi alltså att

$$f(x,y) = F(x,y) \qquad \text{för } x\ne y.$$

Genom att definiera

$$f(x,y) = F(x,y)$$

även då $x=y$ så får vi att f blir kontinuerlig i hela planet eftersom polynomet F är kontinuerlig överallt.

12.3.2 Räkna ut första ordningens partialderivator av funktionen

$$f(x,y) = xy + x^2$$

i punkten $(2,0)$.

Funktionen f beror av två variabler x och y, och har därför två partialderivator $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$.

När vi räknar ut $\frac{\partial f}{\partial x}$ deriverar vi f med avseende på x och betraktar y som en konstant,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x.$$

På samma sätt får vi $\frac{\partial f}{\partial y}$ genom att derivera med avseende på y och betraktande x som en konstant,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 0 = x.$$

Partialderivatornas värde i punkten $(x,y) = (2,0)$ får vi genom att stoppa in $x = 2$ och $y = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) &= (y+2x)\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = 4,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) &= x\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = 2.\end{aligned}$$

12.3.5 Räkna ut första ordningens partialderivator av funktionen

$$z = \arctan\frac{y}{x}$$

i punkten $(-1,1)$.

De två partialderivatorna får vi genom att derivera med avseende på variabeln i fråga,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Partialderivatornas värde i punkten $(-1,1)$ är

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(-1,1) &= \frac{-y}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=-1\\y=1}} = \frac{-1}{(-1)^2+1^2} = -1/2,\\ \frac{\partial z}{\partial y}(-1,1) &= \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=-1\\y=1}} = \frac{-1}{(-1)^2+1^2} = -1/2.\end{aligned}$$

12.3.6 Räkna ut första ordningens partialderivator av funktionen

$$w = \log\bigl(1 + e^{xyz}\bigr)$$

i punkten $(2, 0, -1)$.

Vi har tre partialderivator; en för varje variabel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{1+e^{xyz}} \cdot \bigl(0 + e^{xyz} \cdot yz\bigr) = \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot yz,\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{1+e^{xyz}} \cdot \bigl(0 + e^{xyz} \cdot xz\bigr) = \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xz,\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{1+e^{xyz}} \cdot \bigl(0 + e^{xyz} \cdot xy\bigr) = \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xy.
\end{aligned}$$

I punkten $(2, 0, -1)$ antar partialderivatorna värdena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(2,0,-1) &= \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot yz\,\Bigr|_{\substack{x=2\\y=0\\z=-1}} = \frac{1}{1+1} \cdot 0 \cdot (-1) = 0,\\
\frac{\partial w}{\partial y}(2,0,-1) &= \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xz\,\Bigr|_{\substack{x=2\\y=0\\z=-1}} = \frac{1}{1+1} \cdot 2 \cdot (-1) = -1\\
\frac{\partial w}{\partial z}(2,0,-1) &= \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xy\,\Bigr|_{\substack{x=2\\y=0\\z=-1}} = \frac{1}{1+1} \cdot 2 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

12.3.12 Räkna första ordningens partialderivator av funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y} & \text{om } x \neq y,\\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

i punkten $(0, 0)$.

Enligt definitionen av partialderivata är

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2-0}{h-0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0-2k^2}{0-k} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} 2 = 2.
\end{aligned}$$

12.3.14 Bestäm en ekvation för tangentplanet och normallinjen för funktionsytan till

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

i punkten $(1, 1)$.

För att bestämma normallinjen behöver vi en punkt P på linjen och en riktningsvektor $\boldsymbol{n}$ till linjen. Normallinjens ekvation är då

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\,\boldsymbol{n} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom vi söker normallinjen i punkten $(1, 1)$ måste linjen gå genom punkten

$$P = \bigl(1, 1, f(1,1)\bigr) = (1, 1, 0).$$

Normallinjens riktning i samma punkt ges av vektorn

$$\boldsymbol{n} = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1\Bigr),$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1\cdot(x+y) - 1\cdot(x-y)}{(x+y)^2}\Bigg|_{x=y=1} = \frac{2y}{(x+y)^2}\Big|_{x=y=1} = 1/2$$

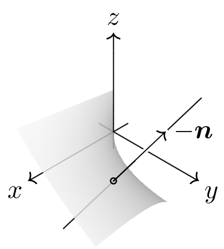
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{(-1)\cdot(x+y) - 1\cdot(x-y)}{(x+y)^2}\Bigg|_{x=y=1} = \frac{-2x}{(x+y)^2}\Big|_{x=y=1} = -1/2$$

vilket ger

$$\boldsymbol{n} = \bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr).$$

Normallinjens ekvation är alltså

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + r\,\boldsymbol{n} = (1,1,0) + t\,\bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr).$$



För att bestämma tangentplanets ekvation behöver vi en punkt i planet och planets normalvektor. En punkt i planet är tangeringspunkten

$$P = \bigl(1, 1, f(1,1)\bigr) = (1,1,0).$$

Planets normalvektor är normalen till ytan

$$\boldsymbol{n} = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1\Bigr) = \bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr).$$

Planets ekvation är

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \overrightarrow{OP}) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr)\cdot\bigl((x,y,z) - (1,1,0)\bigr) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - z = 0. \end{aligned}$$

12.3.22 Bestäm en ekvation för tangentplanet och normallinjen för funktionsytan till

$$f(x,y) = \sqrt{1 + x^3y^2}$$

i punkten $(2,1)$.

En punkt på normallinjen är

$$P = \bigl(2, 1, f(2,1)\bigr) = (2,1,3).$$

Normallinjens riktning är parallell med funktionsytans normal

$$\boldsymbol{n} = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1), -1\Bigr),$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^3y^2}}\cdot 3x^2y^2\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = 2$$

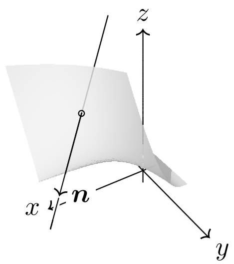
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^3y^2}}\cdot 2x^3y\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = 8/3$$

vilket ger

$$\boldsymbol{n} = (2, \tfrac{8}{3}, -1).$$

Normallinjens ekvation är

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\,\boldsymbol{n} = (2,1,3) + t\,(2, \tfrac{8}{3}, -1) \qquad (t \text{ parameter}).$$



En punkt i tangentplanet är

$$P = (2, 1, 3),$$

och planets normalvektor är parallell med funktionsytans normal

$$\boldsymbol{n} = (2, \tfrac{8}{3}, -1).$$

Planets ekvation är därför

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \overrightarrow{OP}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &(2, \tfrac{8}{3}, -1) \cdot \big((x, y, z) - (2, 1, 3)\big) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &2x + \tfrac{8}{3}y - z = \tfrac{11}{3}. \end{aligned}$$

12.3.24 Bestäm alla horisontella plan som tangerar ytan med ekvationen

$$z = xye^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Till vilka punkter är de tangentplan?

Ett horisontellt plan har normalvektorn $(0, 0, 1)$. För att ett sådant plan ska vara ett tangentplan så måste funktionsytans normal vara parallell med $(0, 0, 1)$, d.v.s.

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\Big) = k\,(0, 0, 1)$$

för något $k \neq 0$. Detta ger villkoret

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{$*$}$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y\,e^{-(x^2+y^2)/2} + xy\,e^{-(x^2+y^2)/2} \cdot (-x) = (1 - x^2)y\,e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (1 - y^2)x\,e^{-(x^2+y^2)/2}. \end{aligned}$$

Eftersom exponentialfunktionen aldrig är noll så leder $(*)$ till ekvationssystemet

$$(1 - x^2)y = 0 \tag{1}$$

$$(1 - y^2)x = 0 \tag{2}$$

Både (1) och (2) är uppfyllda omm åtminstone en av faktorerna i varje ekvation är noll. I varje ekvation finns två faktorer vilket ger 4 kombinationsmöjligheter.

$1 - x^2 = 1 - y^2 = 0:$ Detta ger punkterna $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ och $(-1, -1)$.

$1 - x^2 = x = 0:$ Saknar lösning.

$y = 1 - y^2 = 0:$ Saknar lösning.

$y = x = 0:$ Detta ger punkten $(0, 0)$.

I dessa punkter är alltså tangentplanen horisontella. Tangentplanens ekvationer blir

$(1, 1):$ $z = f(1, 1) = e^{-1}$

$(1, -1):$ $z = f(1, -1) = -e^{-1}$

$(-1, 1):$ $z = f(-1, 1) = -e^{-1}$

$(-1, -1):$ $z = f(-1, -1) = e^{-1}$

$(0, 0):$ $z = f(0, 0) = 0$

12.4.4 Bestäm andra ordningens partialderivator av

$$z = \sqrt{3x^2 + y^2}.$$

Första ordningens partialderivator är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}}$$

Andra ordningens partialderivator får vi genom att derivera en gång till,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}} \\
&= \frac{3 \cdot \sqrt{3x^2+y^2} - 3x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 6x}{\bigl(\sqrt{3x^2+y^2}\,\bigr)^2} \\
&= \frac{3(3x^2+y^2) - 9x^2}{\bigl(3x^2+y^2\bigr)^{3/2}} = \frac{3y^2}{\bigl(3x^2+y^2\bigr)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} \\
&= \frac{1 \cdot \sqrt{3x^2+y^2} - y \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 2y}{\bigl(\sqrt{3x^2+y^2}\,\bigr)^2} \\
&= \frac{3x^2+y^2-y^2}{\bigl(3x^2+y^2\bigr)^{3/2}} = \frac{3x^2}{\bigl(3x^2+y^2\bigr)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} \\
&= -\frac{y}{2\bigl(3x^2+y^2\bigr)^{3/2}} \cdot 6x = \frac{-3xy}{\bigl(3x^2+y^2\bigr)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Eftersom funktionen z är sammansättningen av polynomet $3x^2+y^2$ och kvadratroten är z kontinuerligt deriverbar av alla ordningar. Vi har därför att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-3xy}{\bigl(3x^2+y^2\bigr)^{3/2}}.$$

Anm. Vid en tentamen kan det vara bra att som en extra kontroll verkligen räkna ut $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

12.4.10 Visa att funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

är harmonisk överallt utom i origo.

Funktionen f är harmonisk om

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (*)$$

Vi har

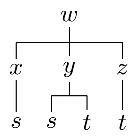
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x \cdot (x^2+y^2)^2 - (-x^2+y^2) \cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)\big(-2x(x^2+y^2) - 4x(-x^2+y^2)\big)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x \cdot (x^2+y^2)^2 - (-2xy) \cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)\big(-2x(x^2+y^2) + 8xy^2\big)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Nu ser vi att $(*)$ är uppfylld då $(x,y) \neq (0,0)$, d.v.s. f är harmonisk.

Lektion 5, Flervariabelanalys den 26 januari 2000

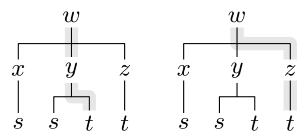
12.5.2 Bestäm $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ om $w = f(x, y, z)$, där $x = g(s)$, $y = h(s, t)$ och $z = k(t)$.

Vi ska först bena ut hur variablerna beror av varandra genom att rita upp variablerna i ett träd där en variabel i en högre nivå beror av de variabler som den är förbunden med i den lägre nivån.



När vi ska beräkna $\frac{\partial w}{\partial t}$ ska vi förbinda w med alla t i trädet. Varje stig från w till t ger upphov till en term i uttrycket för $\frac{\partial w}{\partial t}$. Varje sådan term är i sin tur en produkt av partialderivator av de variabler som ingår i stigen.

I detta fall finns två t:n i trädet och två stigar som sammanbinder respektive t med w.



$w \to y \to t$ $\qquad$ $w \to z \to t$

Den första stigen går via y, så motsvarande term blir

$$\frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Den andra stigen går via z och ger termen

$$\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Notera att vi skriver $\frac{dz}{dt}$ istället för $\frac{\partial z}{\partial t}$. Detta brukar man göra när funktionen endast beror av en variabel.

Vår sökta partialderivata är alltså

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

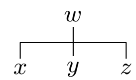
eller uttryckt med funktionerna

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt}.$$

12.5.5 Om $w = f(x, y, z)$, där $x = g(y, z)$ och $y = h(z)$, beräkna

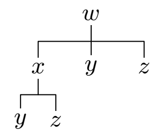
$$\frac{dw}{dz}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x \quad \text{och} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}.$$

Vi börjar med att rita upp variabelträdet. Den första nivån är $w = f(x, y, z)$ och ger oss första delen av trädet



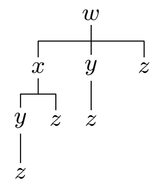
(1)

Sambandet $x = g(y, z)$ ger i sin tur



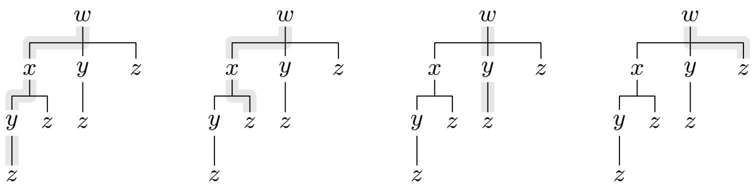
(2)

Notera här att y och z nu förekommer i två olika nivåer i trädet. Vi ska återkomma till vilka problem detta leder till. Sambandet $y = h(z)$ ger oss det slutgiltiga trädet.



(3)

Ett uttryck för $\frac{dw}{dz}$ får vi genom att förbinda alla z i trädet med w.



Var och en av dessa stigar ger upphov till en term i uttrycket för $\frac{dw}{dz}$.

Stigen längst till vänster ger termen

$$f_1 \cdot g_1 \cdot h_1,$$

där f_1 betyder att vi partialderiverar f med avseende på den första variabeln.

Stigen näst längst till vänster ger termen

$$f_1 \cdot g_2.$$

De två följande stigarna ger termerna

$$f_2 \cdot h' \quad \text{och} \quad f_3.$$

Alltså är

$$\frac{dw}{dz} = f_1 g_1 h_1 + f_1 g_2 + f_2 h' + f_3.$$

Det traditionella sättet att skriva denna formel är

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}. \qquad (*)$$

Notera skillnaden mellan $\frac{dw}{dz}$ och $\frac{\partial w}{\partial z}$. Med $\frac{dw}{dz}$ menar vi att w enbart är en funktion av z, d.v.s. att vi deriverar funktionen $w = w(z) = f\big(g(h(z), z), h(z), z\big)$.

Beteckningen $\frac{\partial w}{\partial z}$ betyder å andra sidan att vi, i vårt fall, betraktar x och y som konstanter och partialderiverar $w = w(z, y, z) = f(x, y, z)$ med avseende på z, d.v.s. $\frac{\partial w}{\partial z} = f_3$. Ett mer tydligt sätt att skriva detta på är

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_{x,y},$$

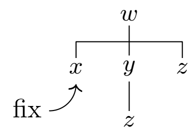
där vi indikerar att förutom z betraktar vi x och y som variabler som vi håller konstanta under partialderiveringen.

Med $\frac{\partial w}{\partial z}$ kan man nämligen också mena att man bara håller x fix men låter $y = h(z)$ och partialderiverar $w = w(x, z) = f\big(x, h(z), z\big)$ med avseende på z, d.v.s. att vi beräknar

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_x.$$

Med kedjeregeln får vi denna derivata till

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_x = f_2 \cdot h' + f_3$$

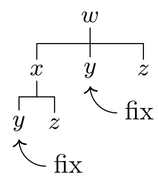


Ett tredje sätt att tolka $\frac{\partial w}{\partial z}$ är att vi håller y fix men låter $x = g(y, z)$ och partialderiverar $w = w(y, z) = f\big(g(y, z), y, z\big)$ med avseende på z, m.a.o. beräknar

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_y.$$

I detta fall ger kedjeregeln att

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_y = f_1 \cdot g_2 + f_3.$$



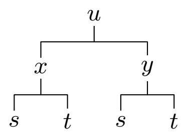
Beteckningen $\frac{\partial w}{\partial z}$ är alltså otydlig eftersom vi inte riktigt säkert vet vilka storheter som vi betraktar som variabler. När uttrycket $\frac{\partial w}{\partial z}$ dyker upp i en formel, som den gjorde i $(*)$, måste vi utifrån sammanhanget avgöra hur vi ska tolka $\frac{\partial w}{\partial z}$.

12.5.6 Använd två olika metoder för att beräkna

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

om $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ där $x = e^{st}$ och $y = 1 + s^2 \cos t$.

Variabelträdet har i detta fall utseendet



Derivatan $\frac{\partial u}{\partial t}$ tolkar vi som $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s$. Med kedjeregeln får vi att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

där vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{e^{st}}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}} \\
\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}e^{st} = s\,e^{st} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1+s^2\cos t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}} \\
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\bigl(1+s^2\cos t\bigr) = -s^2\sin t
\end{aligned}$$

Sammanlagt får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{e^{st}}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}}\cdot s\,e^{st} \\
&\quad + \frac{1+s^2\cos t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}}\cdot(-s^2\sin t) \\
&= \frac{s\,e^{2st} - s^2\sin t - s^4\cos t\sin t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}}.
\end{aligned}$$

Det andra sättet är att direkt stoppa in x och y uttryckta i s och t, i u,

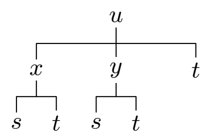
$$u = \sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}$$

och derivera

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{e^{2st} + (1+s^2\cos t)^2}}\cdot\bigl(2s\,e^{2st} + 2(1+s^2\cos t)\cdot(-s^2\sin t)\bigr) \\
&= \frac{s\,e^{2st} - s^2\sin t - s^4\cos t\sin t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}}
\end{aligned}$$

Anm. Notera att egentligen råder inga tveksamheter om att tolka $\frac{\partial u}{\partial t}$ som $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s$. Andra tolkningar såsom $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x$ och $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_y$ är mer långsökta.

Hade emellertid variabelträdet haft utseendet



så hade det varit svårare att avgöra om $\frac{\partial u}{\partial t}$ betydde

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x,y} \quad \text{eller} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s.$$

12.5.10 Beräkna

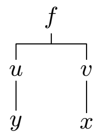
$$\frac{\partial}{\partial x} f(2y, 3x)$$

om funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga första ordningens partialderivator.

Det korrekta sättet att tolka formeln i uppgiftstexten är att först införa namn på de två argumenten till f. Om vi döper dessa till u och v, så ska vi alltså beräkna

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u, v)$$

där $u = 2y$ och $v = 3x$. Variabelträdet är därmed



Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{dv}{dx} = f_2(u, v) \cdot (3x)' = f_2(2y, 3x) \cdot 3.$$

Anm. Uppgiftstexten försöker faktiskt blanda bort korten genom att kalla funktionen för $f(x, y)$ och på så sätt antyda att $\frac{\partial}{\partial x}$ möjligen skulle kunna vara en partialderivering med avseende på den första variabeln. Hade formeln varit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2y, 3x)$$

så hade detta också varit vad som avsetts.

För att öka tydligheten skulle man istället kunnat skriva

$$\frac{\partial}{\partial x}\bigl[f(2y, 3x)\bigr].$$

12.5.12 Beräkna

$$\frac{\partial}{\partial y} f\Bigl(yf(x, t), f(y, t)\Bigr)$$

om funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga första ordningens partialderivator.

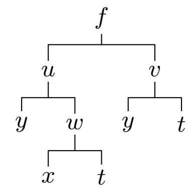
Vi döper de två argumenten till det yttre f:et till

$$\begin{aligned} u &= yf(x, t), \\ v &= f(y, t). \end{aligned}$$

Argumentet u kan dessutom skrivas $u = y \cdot w$ om vi sätter

$$w = f(x, t).$$

Ritar vi upp variabelträdet får vi



Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= f_1(u, v) \cdot w + f_2(u, v) \cdot f_1(y, t) \\ &= f_1\bigl(yf(x, t), f(y, t)\bigr) \cdot f(x, t) + f_2\bigl(yf(x, t), f(y, t)\bigr) \cdot f_1(y, t). \end{aligned}$$

12.5.15 Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar. Om $z = f(x, y)$, där $x = 2s + 3t$ och $y = 3s - 2t$, beräkna

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$,

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}$,

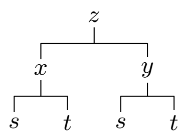
c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

Dessa andra ordningens partialderivator kan skrivas som

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t},\\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}.\end{aligned}$$

Vi börjar därför med att bestämma $\frac{\partial z}{\partial s}$ och $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Variabelträdet blir i detta fall



Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= f_1(x, y)\cdot 2 + f_2(x, y)\cdot 3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= f_1(x, y)\cdot 3 + f_2(x, y)\cdot(-2).\end{aligned}$$

a) Linjariteten gör att vi kan dela upp den sökta derivatan i två termer

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(f_1(x, y)\cdot 2 + f_2(x, y)\cdot 3\Big)\\ &= 2\frac{\partial}{\partial s}f_1(x, y) + 3\frac{\partial}{\partial s}f_2(x, y).\end{aligned}$$

Båda termerna har samma variabelberoende som z, så kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= f_{11}(x, y)\cdot 2 + f_{12}(x, y)\cdot 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= f_{21}(x, y)\cdot 2 + f_{22}(x, y)\cdot 3\end{aligned}$$

Eftersom andra ordningens partialderivator är kontinuerliga är $f_{12} = f_{21}$ och vi får att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 4\cdot f_{11}(x, y) + 12 f_{12}(x, y) + 9 f_{12}(x, y).$$

b) Vi får

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\Big(f_1(x, y)\cdot 3 + f_2(x, y)\cdot(-2)\Big)\\ &= 3\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\Big) - 2\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\Big)\\ &= 3\big(f_{11}(x, y)\cdot 2 + f_{12}(x, y)\cdot 3\big) - 2\big(f_{21}(x, y)\cdot 2 + f_{22}(x, y)\cdot 3\big)\\ &= \{\ f_{12} = f_{21}\ \} = 6 f_{11}(x, y) + 5 f_{12}(x, y) - 6 f_{22}(x, y)\end{aligned}$$

Som en extra kontroll kan man också räkna ut

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}$$

som ska vara lika med ovanstående.

c) Den sista derivatan får vi på motsvarande sätt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(f_1(x, y)\cdot 3 + f_2(x, y)\cdot(-2)\Big)\\ &= 3\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\Big) - 2\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\Big)\\ &= 3\big(f_{11}(x, y)\cdot 3 + f_{12}(x, y)\cdot(-2)\big) - 2\big(f_{21}(x, y)\cdot 3 + f_{22}(x, y)\cdot(-2)\big)\\ &= \{\ f_{12} = f_{21}\ \} = 9 f_{11}(x, y) - 12 f_{12}(x, y) + 4 f_{22}(x, y).\end{aligned}$$

12.5.16 Om $f(x,y)$ är harmonisk, visa att även

$$f\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$$

är harmonisk.

Att f är harmonisk betyder att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0.$$

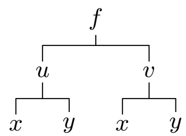
Om vi sätter

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2+y^2}, \\ v &= \frac{-y}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

så ska vi alltså visa att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u,v) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(u,v) = 0.$$

Om vi ritar upp variabelträdet så får vi



Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \Big(-\frac{-y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x\Big) \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} \\ &= f_1(u,v) \cdot \Big(-\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y\Big) + f_2(u,v) \cdot \frac{(-1)\cdot(x^2+y^2) - (-y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Ytterligare en derivering ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_1(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_1(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_1(u,v) \cdot \frac{-2x\cdot(x^2+y^2)^2 - (-x^2+y^2)\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\ &\quad + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_2(u,v) \cdot \frac{2y\cdot(x^2+y^2)^2 - 2xy\cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \Big(f_{11}(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_{12}(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_1(u,v) \cdot \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\ &\quad + \Big(f_{21}(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_{22}(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_2(u,v) \cdot \frac{-6x^2y + 2y^3}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_{11}(u,v)\cdot\frac{(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + f_{12}(u,v)\cdot\frac{-2x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_{21}(u,v)\cdot\frac{-2x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^4} + f_{22}(u,v)\cdot\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + f_2(u,v)\cdot\frac{-6x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_1(u,v)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_1(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+y^2)^2-(-2xy)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_2(u,v)\cdot\frac{2y\cdot(x^2+y^2)^2-(-x^2+y^2)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \Big(f_{11}(u,v)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_{12}(u,v)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}\\
&\quad + \Big(f_{21}(u,v)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_{22}(u,v)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_2(u,v)\cdot\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}\\
&= f_{11}(u,v)\cdot\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} + f_{12}(u,v)\cdot\frac{2x^3y-2xy^3}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_{21}(u,v)\cdot\frac{2x^3y-2xy^3}{(x^2+y^2)^4} + f_{22}(u,v)\cdot\frac{(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + f_2(u,v)\cdot\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}
$$

Sammanlagt har vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u,v) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(u,v) &= \frac{4x^2y^2+(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}\big(f_{11}(u,v)+f_{22}(u,v)\big)\\
&= \{\, f \text{ harmonisk} \Rightarrow\ f_{11}+f_{22}=0 \,\} = 0,
\end{aligned}
$$

vilket betyder att vi visat $(*)$.

12.5.18 Uttryck

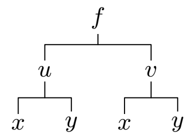
$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} f(2x+3y, xy)$$

i termer av f:s partialderivator som alla är kontinuerliga.

Om vi döper f:s två argument till

$$
\begin{aligned}
u &= 2x+3y\\
v &= xy
\end{aligned}
$$

så har f variabelträdet



Med kedjeregeln får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\
&= f_1(u,v)\cdot 3 + f_2(u,v)\cdot x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(3f_1(u,v) + xf_2(u,v)\Big)\\
&= 3\Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + x\Big(\frac{\partial f_2}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\\
&= 3\big(f_{11}(u,v)\cdot 3 + f_{12}(u,v)\cdot x\big) + x\big(f_{21}(u,v)\cdot 3 + f_{22}(u,v)\cdot x\big)\\
&= \big\{\, f_{12},\ f_{21} \text{ kontinuerliga} \Rightarrow\ f_{12} = f_{21}\,\big\}\\
&= 9f_{11}(u,v) + 6xf_{12}(u,v) + x^2 f_{22}(u,v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(9f_{11}(u,v) + 6xf_{12}(u,v) + x^2 f_{22}(u,v)\Big)\\
&= 9\Big(\frac{\partial f_{11}}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{11}}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\
&\quad + 6f_{12}(u,v) + 6x\Big(\frac{\partial f_{12}}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{12}}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\
&\quad + 2xf_{22}(u,v) + x^2\Big(\frac{\partial f_{22}}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{22}}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\\
&= 9\Big(f_{111}(u,v)\cdot 2 + f_{112}\cdot y\Big)\\
&\quad + 6f_{12}(u,v) + 6x\big(f_{121}(u,v)\cdot 2 + f_{122}(u,v)\cdot y\big)\\
&\quad + 2xf_{22}(u,v) + x^2\big(f_{221}(u,v)\cdot 2 + f_{222}(u,v)\cdot y\big)\\
&= \big\{\, f_{112} = f_{121};\ f_{122} = f_{221}\,\big\}\\
&= 18f_{111}(u,v) + (12x+9y)f_{112}(u,v) + 6f_{12}(u,v) + (2x^2+6xy)f_{122}(u,v)\\
&\quad + 2xf_{22}(u,v) + x^2 y f_{222}(u,v).
\end{aligned}
$$

12.6.2 Använd en lämplig linjarisering av funktionen

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

för att beräkna ett approximativt värde av funktionen i punkten (3,01; 2,99).

Eftersom punkten befinner sig nära $(3,3)$ och f och dess derivator är enkla att räkna ut i $(3,3)$ så väljer vi att linjarisera f i punkten $(3,3)$.

Taylors formel ger att

$$f(x,y) = f(3,3) + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(3,3)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(3,3)\Big)\begin{pmatrix} x-3\\ y-3\end{pmatrix} + R_2(x-3,y-3)$$

där

$$
\begin{aligned}
f(3,3) &= \arctan\frac{3}{3} = \tfrac{1}{4}\pi,\\
\frac{\partial f}{\partial x}(3,3) &= \frac{-y}{x^2+y^2}\bigg|_{x=y=3} = -1/6,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=y=3} = 1/6.
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \tfrac{1}{4}\pi + \big(-1/6\ \ 1/6\big)\begin{pmatrix} x-3\\ y-3\end{pmatrix} + R_2(x-3,y-3)\\
&= \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{6}(x-3) + \tfrac{1}{6}(y-3) + R_2(x-3,y-3).
\end{aligned}
$$

Ett approximativt värde av $f(3{,}01;\ 2{,}99)$ får vi om vi bortser från resttermen (som förhoppningsvis är liten)

$$f(3{,}01;\ 2{,}99) \approx \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}01 + \tfrac{1}{6}\cdot(-0{,}01) \approx 0{,}78206.$$

Notera att vi inte har någon skattning av resttermen R_2, så vår approximation är osäker.

12.6.6 Använd en lämplig linjarisering av funktionen

$$f(x,y) = x\,e^{y+x^2}$$

för att beräkna ett approximativt värde av funktionen i punkten (2,05; −3,92).

Eftersom punkten befinner sig nära $(2,-4)$ där f är enkel att räkna ut så väljer vi att linjarisera f i punkten $(2,-4)$.

Taylors formel ger att

$$f(x,y) = f(2,-4) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-4) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix} + R_2(x-2, y+4),$$

där

$$\begin{aligned} f(2,-4) &= 2\,e^{-4+2^2} = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= (1+2x^2)e^{y+x^2}\Big|_{\substack{x=2\\y=-4}} = 9, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x\,e^{y+x^2}\Big|_{\substack{x=2\\y=-4}} = 2. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2 + \begin{pmatrix} 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix} + R_2(x-2,y+4) \\ &= 2 + 9(x-2) + 2(y+4) + R_2(x-2,y+4). \end{aligned}$$

Ett approximativt värde av $f(2{,}05;\ -3{,}92)$ får vi om vi bortser från resttermen (som förhoppningsvis är liten)

$$f(2{,}05;\ -3{,}92) \approx 2 + 9\cdot 0{,}05 + 2\cdot 0{,}08 = 2{,}61.$$

Vi måste göra samma anmärkning som efter förra uppgiften. Eftersom vi inte har någon skattning av resttermen så är approximationen osäker.

12.6.16 Bestäm Jacobimatrisen $D\boldsymbol{g}(1,3,3)$ till transformationen från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}^3$ som ges av

$$\boldsymbol{g}(r,s,t) = (r^2 s, r^2 t, s^2 - t^2)$$

och använd resultatet för att beräkna ett approximativt värde av $\boldsymbol{g}(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97)$.

Jacobimatrisen till

$$\boldsymbol{g}(r,s,t) = \begin{pmatrix} g_1(r,s,t) \\ g_2(r,s,t) \\ g_3(r,s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 s \\ r^2 t \\ s^2 - t^2 \end{pmatrix}$$

ges av formeln

$$D\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{pmatrix}$$

där

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial g_1}{\partial r} = 2rs & \dfrac{\partial g_1}{\partial s} = r^2 & \dfrac{\partial g_1}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial r} = 2rt & \dfrac{\partial g_2}{\partial s} = 0 & \dfrac{\partial g_2}{\partial t} = r^2 \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial g_3}{\partial s} = 2s & \dfrac{\partial g_3}{\partial t} = -2t. \end{array}$$

I punkten $(r,s,t) = (1,3,3)$ är

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial g_1}{\partial r}(1,3,3) = 6 & \dfrac{\partial g_1}{\partial s}(1,3,3) = 1 & \dfrac{\partial g_1}{\partial t}(1,3,3) = 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial r}(1,3,3) = 6 & \dfrac{\partial g_2}{\partial s}(1,3,3) = 0 & \dfrac{\partial g_2}{\partial t}(1,3,3) = 1 \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial r}(1,3,3) = 0 & \dfrac{\partial g_3}{\partial s}(1,3,3) = 6 & \dfrac{\partial g_3}{\partial t}(1,3,3) = -6. \end{array}$$

Alltså är

$$D\boldsymbol{g}(1,3,3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

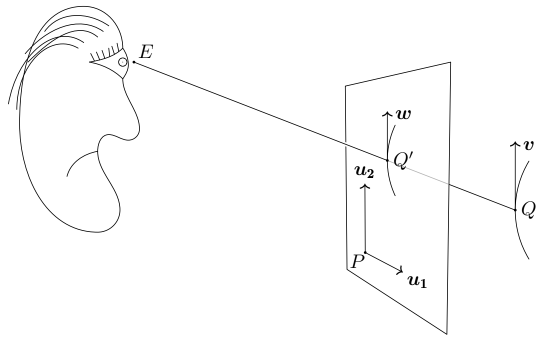
För att beräkna ett approximativt värde av $\boldsymbol{g}(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97)$ linjariserar vi $\boldsymbol{g}$ i den närbelägna punkten $(1,3,3)$ och approximerar $\boldsymbol{g}$:s värde i $(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97)$ med linjariseringens värde i samma punkt.

Taylors formel ger att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{g}(r,s,t) &= \boldsymbol{g}(1,3,3) + D\boldsymbol{g}(1,3,3)\begin{pmatrix} r-1 \\ s-3 \\ t-3 \end{pmatrix} + R_2(r-1, s-3, t-3) \\
&= \begin{pmatrix} 1^2 \cdot 3 \\ 1^2 \cdot 3 \\ 3^2 - 3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r-1 \\ s-3 \\ t-3 \end{pmatrix} + R_2(r-1, s-3, t-3) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\cdot(r-1) + 1\cdot(s-3) + 0\cdot(t-3) \\ 6\cdot(r-1) + 0\cdot(s-3) + 1\cdot(t-3) \\ 0\cdot(r-1) + 6\cdot(s-3) - 6\cdot(t-3) \end{pmatrix} + R_2 \\
&= \begin{pmatrix} 3 + 6(r-1) + (s-3) \\ 3 + 6(r-1) + (t-3) \\ 6(s-3) - 6(t-3) \end{pmatrix} + R_2
\end{aligned}$$

Linjariseringens värde får vi genom att bortse från resttermen

$$\boldsymbol{g}(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97) \approx \begin{pmatrix} 3 + 6\cdot(-0{,}01) + 0{,}02 \\ 3 + 6\cdot(-0{,}01) + (-0{,}03) \\ 6\cdot 0{,}02 - 6\cdot(-0{,}03) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}96 \\ 2{,}91 \\ 0{,}30 \end{pmatrix}.$$



(Fortsättning av datorgrafik-exemplet)

Ofta när man ritar i rummet vill man inte bara projicera punkter på skärmen utan också riktningar.

Antag att vi har en riktning $\boldsymbol{v}$ utgående från punkten Q, vilken blir motsvarande riktningen $\boldsymbol{w}$ utgående från Q' på skärmen.

Problemet är: Givet Q, E, P och $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ samt $\boldsymbol{v}$. Bestäm riktningen $\boldsymbol{w}$ i planets koordinatsystem.

Avbildningen från rummet till skärmens plan ges av uttrycket

$$\boldsymbol{F}\colon Q \mapsto \begin{pmatrix} F_1(Q) \\ F_2(Q) \end{pmatrix} = \frac{1}{\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2)}\begin{pmatrix} \overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2) \\ -\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1) \end{pmatrix}$$

Den transformation som avbildar riktningar från rummet till riktningar i planet ges av differentialen $d\boldsymbol{F}$.

Differentialen har matrisen

$$\begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \end{pmatrix}.$$

För att beräkna matrisen behöver vi följande räkneregler

1. $\nabla\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\big) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

2. $\nabla\Big(\dfrac{f}{g}\Big) = \dfrac{\nabla f\, g - f\,\nabla g}{g^2}$

Vi får

$$\nabla\Big(\frac{\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)}{\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)}\Big) = \frac{\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big]\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)-\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big)\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big]}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)-(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big)}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

$$-\nabla\Big(\frac{\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)}{\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)}\Big) = \frac{-\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big]\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)-\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big)\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big]}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

$$= \frac{-(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)+(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big)}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

Alltså har $d\boldsymbol{F}$ 2×3-matrisen

$$\frac{1}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}\begin{pmatrix} \big[\overrightarrow{EQ},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\big](\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)-\big[\overrightarrow{EQ},\overrightarrow{PE},\boldsymbol{u}_2\big](\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2) \\ -\big[\overrightarrow{EQ},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\big](\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)+\big[\overrightarrow{EQ},\overrightarrow{PE},\boldsymbol{u}_1\big](\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\end{pmatrix},$$

där vi använt oss av trippelproduktbeteckningen

$$\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\big]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

Lektion 6, Flervariabelanalys den 27 januari 2000

12.7.2 Givet funktionen

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

och punkten $p=(1,1)$, beräkna

a) gradienten till f i p,

b) en ekvation för tangentplanet till f:s graf i punkten $\bigl(p,f(p)\bigr)$,

c) en ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan för f i punkten p.

a) Gradienten till f är

$$\nabla f=\Bigl(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\Bigr),$$

där

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{-2x}{(x+y)^2}\end{aligned}$$

I punkten $p=(1,1)$ är alltså

$$\nabla f(p)=\Bigl(\frac{2y}{(x+y)^2},\frac{-2x}{(x+y)^2}\Bigr)\Big|_{x=y=1}=\bigl(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\bigr).$$

b) Grafen till f är den yta i $\boldsymbol{R}^3$ bestående av alla punkter (x,y,z) som uppfyller sambandet

$$z=f(x,y).$$

Vi kan skriva om detta samband till

$$0=f(x,y)-z.$$

Grafen är alltså i själva verket 0-nivåytan till funktionen

$$g(x,y,z)=f(x,y)-z.$$

En normalvektor till g:s nivåyta i punkten $\bigl(1,1,f(1,1)\bigr)$ är gradienten

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}=\nabla g(1,1,0)&=\Bigl(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\Bigr)\Big|_{\substack{x=y=1\\ z=0}}\\ &=\Bigl(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\Bigr)\Big|_{\substack{x=y=1\\ z=0}}=\bigl(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\bigr).\end{aligned}$$

Eftersom tangentplanet genom punkten $(1,1,0)$ ska tangera g:s nivåyta är $\boldsymbol{n}$ en normalvektor till planet.

Planets ekvation är därmed

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\cdot\bigl(\boldsymbol{r}-(1,1,0)\bigr)=0\\ \Leftrightarrow\quad&\bigl(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\bigr)\cdot\bigl((x,y,z)-(1,1,0)\bigr)=0\\ \Leftrightarrow\quad&\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y-z=0.\end{aligned}$$

c) En nivåkurva till f består av alla punkter (x,y) som uppfyller sambandet

$$f(x,y)=C$$

för något fixt C.

Punkten $p=(1,1)$ tillhör nivåkurvan med C-värdet

$$C=f(1,1)=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

För att bestämma tangentlinjen till nivåkurvan i $p=(1,1)$ behöver vi veta nivåkurvans riktning $\boldsymbol{v}$ i punkten p. Den riktningen vet vi är vinkelrät mot nivåkurvans normal $\boldsymbol{n}$ som ges av gradienten

$$\boldsymbol{n}=\nabla f(p)=\bigl(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\bigr),$$

så $\boldsymbol{v}$ får vi exempelvis till $\boldsymbol{v}=\bigl(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\bigr)$. En parametrisering av tangentlinjen är

$$\boldsymbol{r}(t)=p+t\,\boldsymbol{v}=(1,1)+t\bigl(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\bigr).$$

12.7.8 Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan av funktionen

$$f(x,y,z) = \cos(x + 2y + 3z)$$

i punkten $(\frac{1}{2}\pi, \pi, \pi)$.

En normalvektor till nivåytan i punkten $p = (\frac{1}{2}\pi, \pi, \pi)$ ges av gradienten

$$\boldsymbol{n} = \nabla f(p) = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\Bigr)$$

där

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(p) &= -\sin(x + 2y + 3z)\Big|_{\substack{x=\pi/2 \\ y=z=\pi}} = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(p) &= -\sin(x + 2y + 3z)\Big|_{\substack{x=\pi/2 \\ y=z=\pi}} = 2,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(p) &= -\sin(x + 2y + 3z)\Big|_{\substack{x=\pi/2 \\ y=z=\pi}} = 3.
\end{aligned}$$

Tangentplanets ekvation är

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - p) = 0\\
\Leftrightarrow \qquad & (1,2,3) \cdot \bigl((x,y,z) - (\tfrac{1}{2}\pi, \pi, \pi)\bigr) = 0\\
\Leftrightarrow \qquad & x + 2y + 3z = \tfrac{11}{2}\pi.
\end{aligned}$$

12.7.12 Bestäm ändringstakten av funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{1+y}$$

vid punkten $(0,0)$ i riktning $(1,-1)$.

Vi söker f:s riktningsderivata i riktningen $\boldsymbol{v} = (1,-1)$, d.v.s.

$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \boldsymbol{e}_v \cdot \nabla f(0,0).$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_v &= \frac{(1,-1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\\
\nabla f(0,0) &= \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Bigr),\\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \frac{1}{1+y}\Big|_{x=y=0} = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \frac{x}{(1+y)^2}\Big|_{x=y=0} = 0.
\end{aligned}$$

Därmed är

$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\cdot(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

12.7.14 Låt

$$f(x,y) = \log \|\boldsymbol{r}\|$$

där $\boldsymbol{r} = (x,y)$. Visa att

$$\nabla f = \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2}.$$

Vi skriver ut f i x och y,

$$f(x,y) = \log\|\boldsymbol{r}\| = \log\sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Gradienten är

$$\nabla f = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Bigr),$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Alltså är

$$\nabla f = \Bigl(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\Bigr) = \frac{(x,y)}{x^2+y^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2}.$$

12.7.17 I vilka riktningar från punkten $(2,0)$ har funktionen

$$f(x,y) = xy$$

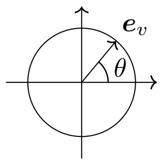
en ändringstakt på -1? Finns det riktningar i vilka ändringstakten är -3? eller -2?

Ändringstakten i en riktning $\boldsymbol{v}$ ges av riktningsderivatan

$$D_{\boldsymbol{v}} f(2,0) = \boldsymbol{e}_v \cdot \nabla f(2,0).$$

En enhetsvektor i $\boldsymbol{R}^2$ kan alltid skrivas i formen

$$\boldsymbol{e}_v = (\cos\theta, \sin\theta)$$



där $0 \le \theta < 2\pi$.

Gradienten är

$$\nabla f(2,0) = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(2,0), \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\Bigr) = \Bigl(y\Big|_{\substack{x=2\\y=0}}, x\Big|_{\substack{x=2\\y=0}}\Bigr) = (0,2).$$

Riktningsderivatan blir alltså

$$\boldsymbol{e}_v \cdot \nabla f(2,0) = (\cos\theta, \sin\theta)\cdot(0,2) = 2\sin\theta.$$

Denna derivata är -1 då

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta = \tfrac{7}{6}\pi \quad \text{eller} \quad \theta = \tfrac{11}{6}\pi$$

med motsvarande riktningar

$$\bigl(\cos\tfrac{7}{6}\pi, \sin\tfrac{7}{6}\pi\bigr) = \bigl(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\bigr),$$
$$\bigl(\cos\tfrac{11}{6}\pi, \sin\tfrac{11}{6}\pi\bigr) = \bigl(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\bigr).$$

Uttrycket $2\sin\theta$ kan aldrig anta värdet -3 eftersom $-1 \le \sin\theta \le 1$, däremot antas värdet -2 då $\sin\theta = -1$, d.v.s. då $\theta = \frac{3}{2}\pi$ vilket svarar mot riktningen

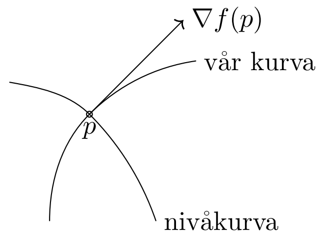
$$\bigl(\cos\tfrac{3}{2}\pi, \sin\tfrac{3}{2}\pi\bigr) = (0,-1).$$

12.7.22 Bestäm en ekvation för den kurva i x,y-planet som passerar genom punkten $(1,1)$ och skär alla nivåkurvor till

$$f(x,y) = x^4 + y^2$$

under rät vinkel.

Om vår kurva ska skära en nivåkurva i punkten p vinkelrätt så måste den ha en riktning som är parallell med nivåkurvans normal $\nabla f(p)$.



Antar vi att vi parametriserat vår kurva med $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, så måste vi alltså ha att

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \nabla f\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$$

för alla parametervärden t.

Analytiskt betyder detta att det ska finnas en skalär $k(t) \neq 0$ så att

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = k(t)\,\nabla f\big(\boldsymbol{r}(t)\big). \tag{$\dagger$}$$

Skalärfunktionen $k(t)$ är lite besvärande att hela tiden bära med sig, speciellt eftersom den saknar geometrisk betydelse (d.v.s. oavsett hur den ser ut påverkar den inte kurvans form utan bara hur parametriseringen ser ut).

Ett sätt att bli av med den är att tänka sig att vi parametriserar om vår kurva till

$$\boldsymbol{r}\big(u(t)\big), \tag{$*$}$$

där $u\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ är en en-entydig funktion. ($*$) beskriver fortfarande geometriskt samma kurva, det är bara det att istället för att en punkt på kurvan svarar mot parametervärdet t_0 svarar den nu mot ett annat parametervärde.

Parallellvillkoret ($\dagger$) blir nu (med kedjeregeln)

$$\dot{\boldsymbol{r}}\big(u(t)\big) \cdot \dot{u}(t) = k(t)\,\nabla f\big(\boldsymbol{r}(u(t))\big).$$

Om vi väljer $u(t)$ så att $\dot{u}(t) = k(t)$ förenklas detta till

$$\dot{\boldsymbol{r}}\big(u(t)\big) = \nabla f\big(\boldsymbol{r}(u(t))\big). \tag{$\ddagger$}$$

Att vi verkligen kan välja $u(t)$ på detta sätt ser vi genom att sätta

$$u(t) = \int_0^t k(\tau)\,d\tau,$$

för då är $\dot{u}(t) = k(t)$. I och med att $\dot{u}(t) = k(t) \neq 0$ så måste $u(t)$ hela tiden antingen vara strängt växande eller avtagande, d.v.s. en-entydig.

Istället för att hela tiden skriva $\boldsymbol{r}\big(u(t)\big)$ kan vi anta att vi redan från början valt denna parametrisering och skriva $\boldsymbol{r}(t)$.

Om vi nu ska skriva ($\ddagger$) i vektorform så har vi

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}\\ \nabla f\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) & \frac{\partial f}{\partial y}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x(t)^3 & 2y(t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

($\ddagger$) blir därför

$$\dot{x}(t) = 4\,x(t)^3, \tag{1}$$
$$\dot{y}(t) = 2\,y(t). \tag{2}$$

Vi ska nu lösa dessa två differentialekvationer. Vi kan anta att kurvan går genom punkten $(1,1)$ då $t = 0$, d.v.s. $\big(x(0), y(0)\big) = (1,1)$.

Ekvation (1) kan skrivas

$$\frac{\dot{x}(t)}{4x(t)^3} = 1.$$

Om vi integrerar båda led m.a.p. t från 0 till t fås

$$\begin{aligned}\text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot{x}(t)}{4x(t)^3}\,dt = \{\, w = x(t);\;\, dw = \dot{x}(t)\,dt \,\}\\ &= \int_1^{x(t)} \frac{dw}{4w^3} = -\frac{1}{8x(t)^2} + \frac{1}{8}\\ \text{HL} &= \int_0^t dt = t\end{aligned}$$

vilket ger

$$-\frac{1}{8x(t)^2} + \frac{1}{8} = t \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-8t}}$$

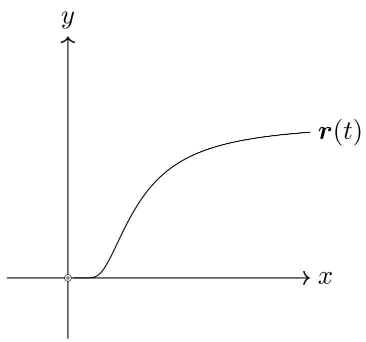
där minustecknet förkastas eftersom vi måste ha att $x(0) = 1$.

På liknande sätt löser vi (2) och får

$$y(t) = e^{2t}.$$

Vår kurva har alltså parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-8t}}\\ e^{2t}\end{pmatrix} \qquad (-\infty < t < \tfrac{1}{8})$$



Anm. Man kan eliminera parametern t och få fram att kurvan också kan skrivas som

$$y = \exp\Bigl(\frac{1}{4x^2} - \tfrac{1}{4}\Bigr) \qquad (x > 0).$$

12.8.4 Beräkna derivatan $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ om y uppfyller följande samband

$$e^{yz} - x^2 z \log y = \pi.$$

Vilka villkor på (x, y, z) kan garantera existensen av en lösning $y = y(x, z)$ med ovanstående derivata.

Om vi börjar med derivatan så ska vi alltså derivera det implicita sambandet med avseende på z och med y som en funktion av x och z, d.v.s. derivera

$$e^{y(x,z)\,z} - x^2 z \log y(x, z) = \pi.$$

Vi får

$$e^{yz}\Bigl(\frac{\partial y}{\partial z}\cdot z + y\cdot 1\Bigr) - \Bigl(x^2\cdot 1\cdot \log y + x^2 z\cdot \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial z}\Bigr) = 0.$$

Vi samlar ihop $\frac{\partial y}{\partial z}$,

$$\begin{aligned} &\Bigl(e^{yz} z - \frac{x^2 z}{y}\Bigr)\frac{\partial y}{\partial z} + y\,e^{yz} - x^2\log y = 0 \\ \Leftrightarrow\qquad &\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x^2\log y - y\,e^{yz}}{z\,e^{yz} - \dfrac{x^2 z}{y}}. \end{aligned}$$

Detta givetvis under förutsättning att vi verkligen kan skriva $y = y(x, z)$ lokalt.

Det implicita sambandet kan vi skriva som en nollställeyta genom att sätta

$$f(x, y, z) = e^{yz} - x^2 z \log y - \pi.$$

De punkter som uppfyller det implicita sambandet uppfyller också $f(x, y, z) = 0$. Enligt implicita funktionssatsen kan vi utifrån $f = 0$ skriva $y = y(x, z)$ lokalt om

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0,$$

d.v.s. om

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z\,e^{yz} - \frac{x^2 z}{y} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z\Bigl(e^{yz} - \frac{x^2}{y}\Bigr) \neq 0.$$

12.8.8 Beräkna derivatan $\frac{\partial z}{\partial x}$ om z uppfyller följande samband

$$F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0,$$

där F är kontinuerligt deriverbar.

Vilka villkor på (x, y, z) kan garantera existensen av en lösning $z = z(x, y)$ med ovanstående derivata.

Vi deriverar det implicita sambandet med avseende på x och med $z = z(x, y)$. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} &F_1(x^2 - z^2, y^2 + xz)\cdot\Bigl(2x - 2z\,\frac{\partial z}{\partial x}\Bigr) + \\ &F_2(x^2 - z^2, y^2 + xz)\cdot\Bigl(1\cdot z + x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\Bigr) = 0. \end{aligned}$$

Vi samlar ihop $\frac{\partial z}{\partial x}$,

$$\Big(-2z\cdot F_1(\quad)+x\cdot F_2(\quad)\Big)\frac{\partial z}{\partial x}+\Big(2x\cdot F_1(\quad)+z\cdot F_2(\quad)\Big)=0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x\cdot F_1(\quad)-z\cdot F_2(\quad)}{-2z\cdot F_1(\quad)+x\cdot F_2(\quad)}.$$

Den mängd som definieras av det implicita sambandet är en nollställeyta till funktionen

$$G(x,y,z)=F(x^2-z^2,y^2+xz).$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi garantera att $z=z(x,y)$ lokalt om

$$\frac{\partial G}{\partial z}\neq 0,$$

d.v.s. om

$$\frac{\partial}{\partial z}F(x^2-z^2,y^2+xz)=F_1(\quad)\cdot(-2z)+F_2(\quad)\cdot x\neq 0.$$

12.8.11 Beräkna derivatan $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ om x uppfyller sambanden

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+w^2&=1\\ x+2y+3z+4w&=2.\end{aligned}$$

Vilka villkor på (x,y,z,w) kan garantera existensen av en lösning $x=x(y,z)$ med ovanstående derivata.

Den mängd som bestäms av de två implicita sambanden är nollställeytan till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x,y,z,w)=\begin{pmatrix}x^2+y^2+z^2+w^2-1\\ x+2y+3z+4w-2\end{pmatrix}.$$

Eftersom $\boldsymbol{F}$ är en funktion med värdemängd i $\boldsymbol{R}^2$ kan vi nästan undantagsvist skriva två av variablerna x,y,z,w som funktion av de övriga två. I vårt fall

$$\begin{aligned} x&=x(y,z),\\ w&=w(y,z).\end{aligned}$$

Detta funktionsberoende kan vi dock bara garantera, enligt implicita funktionssatsen, i de punkter där

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,w)}\Big)\neq 0,$$

d.v.s. där

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial w}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 2w\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8x-2w\neq 0.$$

Den sökta derivatan får vi genom att derivera de två implicita sambanden med avseende på y och med $x=x(y,z)$ och $w=w(y,z)$.

$$\begin{aligned} 2x\,\tfrac{\partial x}{\partial y}+2y+0+2w\,\tfrac{\partial w}{\partial y}&=0\\ \tfrac{\partial x}{\partial y}+\;\;2+0+\;\;4\,\tfrac{\partial w}{\partial y}&=0\end{aligned}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem i de två okända $\frac{\partial x}{\partial y}$ och $\frac{\partial w}{\partial y}$.

$$\begin{pmatrix}2x & 2w\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2y\\ -2\end{pmatrix}.$$

Cramers regel ger

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}-2y & 2w\\ -2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2x & 2w\\ 1 & 4\end{vmatrix}}=\frac{-8y+4w}{8x-2w}.$$

12.8.12 Beräkna derivatan $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ om u uppfyller sambanden

$$\begin{aligned} x^2y + y^2u - u^3 &= 0 \\ x^2 + yu &= 1. \end{aligned}$$

Vilka villkor på (x, y, u) kan garantera existensen av en lösning $u = u(x)$ med ovanstående derivata.

Mängden som definieras av de två sambanden är nollställeytan till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y, u) = \begin{pmatrix} x^2y + y^2u - u^3 \\ x^2 + yu - 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\boldsymbol{F}$:s värdemängd är i $\boldsymbol{R}^2$ kan vi nästan överallt skriva två av variablerna som funktion av den tredje. I vårt fall

$$\begin{aligned} y &= y(x), \\ u &= u(x). \end{aligned}$$

Ett tillräckligt villkor för detta är att

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(y, u)}\Bigr) \neq 0,$$

enligt implicita funktionssatsen, d.v.s.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x^2 + 2yu & y^2 - 3u^2 \\ u & y \end{vmatrix} \\ &= (x^2 + 2yu)y - u(y^2 - 3u^2) = x^2y + y^2u + 4u^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Derivatan $\frac{du}{dx}$ får vi genom att derivera de två implicita sambanden m.a.p. x.

$$\begin{aligned} 2x \cdot y + x^2\,\tfrac{dy}{dx} + 2y\,\tfrac{dy}{dx} \cdot u + y^2 \cdot \tfrac{du}{dx} - 3u^2\,\tfrac{du}{dx} &= 0 \\ 2x + \tfrac{dy}{dx} \cdot u + \quad y \cdot \tfrac{du}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Detta linjära ekvationssystem kan vi sammanfatta som

$$\begin{pmatrix} x^2 + 2yu & y^2 - 3u^2 \\ u & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ -2x \end{pmatrix}.$$

Cramers regel ger

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\begin{vmatrix} x^2 + 2yu & -2xy \\ u & -2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 + 2yu & y^2 - 3u^2 \\ u & y \end{vmatrix}} = \frac{(x^2 + 2yu)(-2x) - u(-2xy)}{(x^2 + 2yu)y - u(y^2 - 3u^2)} \\ &= \frac{-2x^3 - 2xyu}{x^2y + y^2u + 3u^3} \end{aligned}$$

12.8.14 Nära vilka punkter (r, s) kan transformationen

$$\begin{aligned} x &= r^2 + 2s \\ y &= s^2 - 2r \end{aligned}$$

lösas med avseende på r och s som funktioner av x och y?

Beräkna värdet av de första partiella derivatorna av lösningen i origo.

Vi kan skriva om sambanden mellan r, s, x och y som nollställeytan till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y, r, s) = \begin{pmatrix} x - r^2 - 2s \\ y - s^2 + 2r \end{pmatrix}.$$

Funktionen $\boldsymbol{F}$ har värdemängd i $\boldsymbol{R}^2$ varför vi kan skriva

$$\begin{aligned} r &= r(x, y) \\ s &= s(x, y) \end{aligned}$$

kring de flesta punkter. Enligt implicita funktionssatsen är ett tillräckligt villkor för detta att

$$\det\Bigl(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(r, s)}\Bigr) \neq 0,$$

d.v.s.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2r & -2 \\ 2 & -2s \end{vmatrix} = 4rs + 4 \neq 0.$$

Alltså, nära punkter (r, s) där $rs \neq -1$ kan vi skriva $r = r(x, y)$ och $s = s(x, y)$.

Eftersom vi ska beräkna alla partialderivator gör vi det med dem ihopsamlade i Jacobimatrisen $\frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)}$. För att göra härledningen någorlunda kompakt inför vektorbeteckningarna

$$\boldsymbol{r} = (r, s),$$
$$\boldsymbol{x} = (x, y).$$

Vi deriverar det implicita sambandet $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{0}$ med avseende på $\boldsymbol{x}$. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{r}}\Big)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial s} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4rs + 4} \begin{pmatrix} -2s & 2 \\ -2 & -2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4rs + 4} \begin{pmatrix} -2s & 2 \\ -2 & -2r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

och i origo är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.8.18 Visa att ekvationerna

$$\begin{cases} x\,e^y + uz - \cos v = 2 \\ u \cos y + x^2 v - yz^2 = 1 \end{cases}$$

kan lösas i u och v som funktioner av x, y, z i närheten av punkten P_0 där $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ och $(u, v) = (1, 0)$. Beräkna även $\big(\frac{\partial u}{\partial z}\big)_{x,y}$ i $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

Lösningsmängden till ekvationerna är nollställemängden till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} x\,e^y + uz - \cos v - 2 \\ u \cos y + x^2 v - yz^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi lösa ut

$$u = u(x, y, z)$$
$$v = v(x, y, z)$$

om

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(u, v)}\Big) \neq 0,$$

d.v.s. om

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{vmatrix} \\ &= zx^2 - \cos y \, \sin v \neq 0. \end{aligned}$$

I punkten $(x, y, z, u, v) = (2, 0, 1, 1, 0)$ är denna determinant

$$1 \cdot 2^2 - \cos 0 \cdot \sin 0 = 4 \neq 0.$$

Alltså kan u och v lösas ut i termer av x, y och z lokalt kring $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

Den partiella derivatan får vi genom att derivera de två implicita sambanden m.a.p. z och med $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$.

$$\begin{aligned} 0 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot z + u \cdot 1 - (-\sin v) \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos y + x^2 \frac{\partial v}{\partial z} - y \cdot 2z &= 0 \end{aligned}$$

Vi sammanfattar

$$\begin{pmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 2yz \end{pmatrix}.$$

Cramers regel ger

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} -u & \sin v \\ 2yz & x^2 \end{vmatrix} \bigg/ \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{vmatrix} = \frac{-u \cdot x^2 - 2yz \sin v}{x^2 z - \cos y \cdot \sin v}$$

I punkten $(x, y, z, u, v) = (2, 0, 1, 1, 0)$ är

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)_{x,y} = \frac{-1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot \sin 0}{2^2 \cdot 1 - \cos 0 \cdot \sin 0} = -1.$$

Lektion 7, Flervariabelanalys den 1 februari 2000

12.9.2 Bestäm Taylorserien till funktionen

$$f(x,y) = \log(1 + x + y + xy)$$

i punkten $(0,0)$.

Vi kan faktorisera argumentet till logaritmen och förenkla funktionen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \log(1+x+y+xy) = \log\big((1+x)(1+y)\big) \\ &= \log(1+x) + \log(1+y). \end{aligned}$$

Nu kan vi Taylorutveckla termerna separat,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{y^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k+y^k}{k}. \end{aligned}$$

12.9.8 Bestäm Taylorpolynomet för funktionen

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

av grad 3 i punkten $(1,0)$.

Först skriver vi om argumentet till logaritmen i termer av $x-1$ och y

$$x^2 + y^2 = (x-1)^2 - 1 + 2x + y^2 = (x-1)^2 + y^2 + 2(x-1) + 1.$$

Sätt $t = (x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)$. Då är

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \log(t+1) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3 + O(t^4) \\ &= \big((x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)\big) - \tfrac{1}{2}\big((x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)\big)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\big((x-1)^2 + y^2 + 2(x-1)\big)^3 + O(x-1,y)^4 \\ &= (x-1)^2 + y^2 + 2(x-1) - \tfrac{1}{2}\big((x-1)^2\cdot 2(x-1) + y^2\cdot 2(x-1) \\ &\quad + 2(x-1)(x-1)^2 + 2(x-1)y^2 + 2(x-1)2(x-1) + O(x-1,y)^4\big) \\ &\quad + \tfrac{1}{3}\big(8(x-1)^3 + O(x-1,y)^4\big) + O(x-1,y)^4 \\ &= 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2 + \tfrac{2}{3}(x-1)^3 - 2(x-1)y^2 + O(x-1,y)^4 \end{aligned}$$

Taylorpolynomens entydighetssats ger att Taylorpolynomet av grad 3 är

$$P_3(x,y) = 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2 + \tfrac{2}{3}(x-1)^3 - 2(x-1)y^2.$$

12.9.12 Bestäm Taylorpolynomet för funktionen

$$f(x,y) = \frac{1+x}{1+x^2+y^4}$$

av grad 2 i punkten $(0,0)$.

Vi kan skriva om funktionen som en produkt av två faktorer

$$f(x,y) = (1+x)\cdot\frac{1}{1+x^2+y^4}.$$

Den första faktorn är sitt eget Taylorpolynom. I den andra faktorn sätter vi $t = x^2 + y^4$ och får

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1+x)\cdot\frac{1}{1+t} = \{\,\text{geometrisk serie}\,\} \\ &= (1+x)\cdot\big(1 - t + O(t^2)\big) = (1+x)\cdot\big(1-(x^2+y^4) + O(x,y)^3\big) \\ &= 1 - x^2 + x + O(x,y)^3. \end{aligned}$$

Taylorpolynomens entydighetssats ger att Taylorpolynomet av grad 2 är

$$P_2(x,y) = 1 + x - x^2.$$

13.1.2 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = xy - x + y.$$

En punkt p är en kritisk punkt om

$$\nabla f(p) = \mathbf{0}. \tag{$*$}$$

I vårt fall är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 1, \qquad \nabla f = (y-1, x+1).$$

Villkoret $(*)$ ger därför att

$$\begin{cases} y - 1 = 0, \\ x + 1 = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Punkten $p = (-1,1)$ är alltså den enda kritiska punkten.

Punktens karaktär avgörs av funktionens andraderivator i Taylorutvecklingen i punkten

$$f(p+\boldsymbol{h}) = f(p) + \boldsymbol{h}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{h} + O(\boldsymbol{h})^3.$$

Om den kvadratiska formen är positiv, negativ eller indefinit så är p en lokal minimi-, maximi- respektive sadelpunkt.

Vi har att Hessianen i p är

$$H(-1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

H:s egenvärden ges av den karakteristiska ekvationen

$$\begin{aligned} 0 = \det(\lambda I - H) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1) \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= -1 \quad \text{eller} \quad \lambda = +1. \end{aligned}$$

Eftersom egenvärdena är -1 och $+1$ har den kvadratiska formen den kanoniska formen

$$-(h_1')^2 + (h_2')^2,$$

vilket betyder att det finns en riktning där den kvadratiska formen är negativ och en riktning där den är positiv, d.v.s. den är indefinit och p är en sadelpunkt.

13.1.4 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

De kritiska punkterna uppfyller

$$\nabla f = \mathbf{0}, \tag{$*$}$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x.$$

Alltså är $(*)$

$$4x^3 - 4y = 0, \tag{1}$$
$$4y^3 - 4x = 0. \tag{2}$$

Från (1) får vi att $y = x^3$. Detta insatt i (2) ger

$$x^9 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 1.$$

Ekvationsystemet (1), (2) har alltså lösningarna

$$(x,y) = (0,0), \quad (1,1) \quad \text{och} \quad (-1,-1).$$

Dessa kritiska punkters karaktär avgörs av den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen, d.v.s. av om Hessianen

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

är positiv, negativ eller indefinit.

Vi undersöker punkterna var för sig.

$(0,0)$: Vi har

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(\lambda I - H) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -4 \quad \text{eller} \quad \lambda = 4.$$

Eftersom ett egenvärde är negativt och ett är positivt är H indefinit och $(0,0)$ en sadelpunkt.

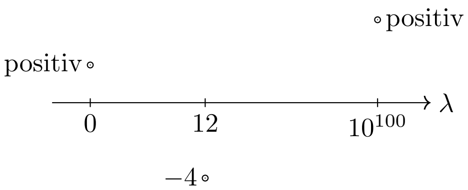
$(1,1)$: Vi har

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(\lambda I - H) = \begin{vmatrix} \lambda - 12 & 4 \\ 4 & \lambda - 12 \end{vmatrix} = (\lambda - 12)^2 - 4.$$

Istället för att lösa ekvationen kan vi beräkna HL i några lämpliga punkter.



Satsen om mellanliggande värden ger nu att de två rötterna ligger i vart och ett av intervallen $(0,12)$ respektive $(12, 10^{100})$, d.v.s. H har två positiva egenvärden och är positivt definit.

$(1,1)$ är en lokal minimipunkt.

$(-1,-1)$: Vi har

$$H(-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Detta är samma matris som ovan. Alltså är H positivt definit och $(-1,-1)$ är en lokal minimipunkt.

13.1.6 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = \cos(x+y).$$

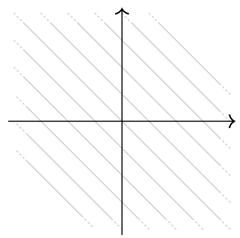
Gradienten till f är

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \bigl(-\sin(x+y), -\sin(x+y)\bigr)$$

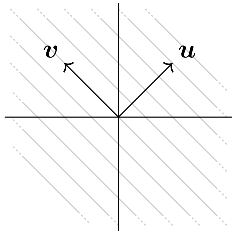
som är en nollvektor då

$$-\sin(x+y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x + y = n\pi \quad (n \text{ heltal}).$$

De kritiska punkterna är alltså en samling linjer.



Eftersom linjerna har denna orientering är det naturligt att byta basvektorer i $\boldsymbol{R}^2$ till en bas där en av vektorerna är parallell med linjerna.

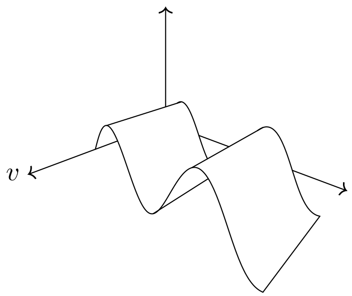


$$\boldsymbol{u} = (1,1)$$
$$\boldsymbol{v} = (-1,1)$$

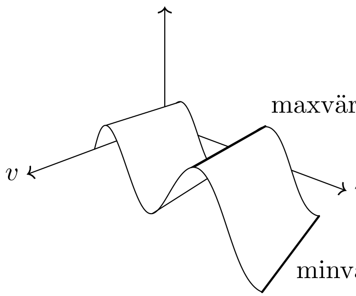
Om vi betecknar koordinaterna i denna bas med (u,v) så är

$$f(u,v) = \cos u.$$

Eftersom f bara beror på u så har f en graf med utseendet



d.v.s. grafen har samma utseende längs v-axeln och är en s.k. cylindermängd. Om $f(u) = \cos u$ därför har ett lokalt max i $u = u_1$ så har $f(u,v)$ en hel "rygg" med maxpunkter; dito för min- och sadelpunkter.



Vi vet att $f(u) = \cos u$ har

$$\begin{aligned}&\text{lokala max i } u = 2n\pi \ (n \text{ heltal}),\\ &\text{lokala min i } u = (2n+1)\pi \ (n \text{ heltal,})\end{aligned}$$

vilket betyder att $f(u,v)$ har

$$\begin{aligned}&\text{lokala max längs linjerna } u = 2n\pi \ (n \text{ heltal}),\\ &\text{lokala min längs linjerna } u = (2n+1)\pi \ (n \text{ heltal}),\end{aligned}$$

eller översatt till x,y-koordinater

$$\begin{aligned}&\text{lokala max längs linjerna } x+y = 2n\pi \ (n \text{ heltal}),\\ &\text{lokala min längs linjerna } x+y = (2n+1)\pi \ (n \text{ heltal}).\end{aligned}$$

13.1.12 Bestäm och klassificera alla kritiska punkter till

$$f(x,y) = \frac{1}{1-x+y+x^2+y^2}.$$

Vi har att

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{(1-x+y+x^2+y^2)^2}\cdot(-1+2x),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{(1-x+y+x^2+y^2)^2}\cdot(1+2y).\end{aligned}$$

Gradienten till f blir noll i punkten $(x,y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Istället för att undersöka Hessianen i den kritiska punkten noterar vi att nämnaren i funktionsuttrycket är ett kvadratiskt uttryck som vi kan kvadratkomplettera; först med avseende på x och sedan med avseende på y,

$$\begin{aligned}1 - x + y + x^2 + y^2 &= 1 + (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} + y + y^2\\ &= \tfrac{3}{4} + (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\\ &= \tfrac{1}{2} + (x - \tfrac{1}{2})^2 + (y + \tfrac{1}{2})^2.\end{aligned}$$

Från detta uttryck ser vi att nämnaren har ett minimum i den kritiska punkten $(x, y) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, vilket ger att funktionen har ett maximum i punkten $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

13.1.18 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

Funktionen antar sitt största respektive minsta värde i en av följande punkter:

1. kritiska punkter, d.v.s. där $\nabla f = \mathbf{0}$,
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter till definitionsområdet.

Vi undersöker dessa punkter

1. De kritiska punkterna uppfyller

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0, 0).$$

Vi har

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (1 + x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{0 \cdot (1 + x^2 + y^2) - x \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

$(*)$ ger alltså ekvationssystemet

$$\begin{aligned}1 - x^2 + y^2 &= 0, &(1)\\ -2xy &= 0. &(2)\end{aligned}$$

Ekvation (2) ger att antingen är $x = 0$ eller så är $y = 0$.

$x = 0:$ Ekvation (1) ger $1 + y^2 = 0$ som saknar reella lösningar.

$y = 0:$ Ekvation (1) ger $1 - x^2 = 0$ som har lösningarna $x = -1$ och $x = 1$.

De kritiska punkterna är alltså $(-1, 0)$ och $(1, 0)$.

2. Betraktar vi uttrycket för ∇f,

$$\nabla f = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}(1 - x^2 + y^2, -2xy),$$

så ser vi att ∇f är definierad överallt (nämnaren $\geq 1 > 0$).

3. Eftersom f:s definitionsmängd är hela talplanet är den enda s.k. randpunkten då vi låter $\|(x, y)\| \to \infty$.

Funktionens största och minsta värde är något av följande värden

$$\begin{aligned}f(-1, 0) &= -\tfrac{1}{2},\\ f(1, 0) &= \tfrac{1}{2},\\ \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Svaret är

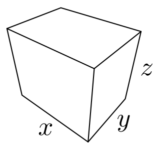
$$\begin{aligned}&\text{Största värde} \quad \tfrac{1}{2} \text{ i punkten } (1, 0).\\ &\text{Minsta värde} \ -\tfrac{1}{2} \text{ i punkten } (-1, 0).\end{aligned}$$

Anm. Vi behöver inte undersöka de kritiska punkternas karaktär med Hessianen, utan det räcker med att jämföra f:s värde i de framtagna punkterna för att bestämma största/minsta värde.

Anm. Hade gränsvärdet varit störst eller minst skulle f inte haft ett största respektive minsta värde.

13.1.22 Materialet som används för bottenplattan till en rektangulär låda kostar dubbelt så mycket per areaenhet än materialet som används för sidoväggar och ovansida.
Bestäm lådans dimensioner som för en given volym V minimerar materialkostnaden.

Vi inför tre variabler x, y och z som anger lådans dimensioner.



Om materialet till bottenplattan kostar $2A$ per areaenhet så kostar materialet till sidoväggar och ovansida A per areaenhet.
Hela lådans kostnad blir

$$\begin{aligned} K(x,y,z) &= 2A\cdot(\text{bottenplattans area}) \\ &\quad + A\cdot(\text{sidoväggarnas area} + \text{ovansidans area}) \\ &= 2A\cdot xy + A\cdot(2xz+2yz+xy) = A(3xy+2xz+2yz). \end{aligned}$$

Dessutom ska lådan ha en fix volym V, vilket betyder att

$$xyz = V.$$

Problemet kan alltså formuleras som

$$\begin{array}{ll} \min & 3xy+2xz+2yz, \\ \text{då} & \begin{cases} xyz = V, \\ x,y,z \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Från bivillkoret $xyz = V$ kan vi lösa ut $z = V/xy$ och problemet får formuleringen

$$\begin{array}{ll} \min & 3xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}, \\ \text{då} & x,y \geq 0. \end{array}$$

Sätt $f(x,y) = 3xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$. Minsta värdet av f antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter ($\nabla f = \mathbf{0}$),
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa fall.

1. De kritiska punkterna uppfyller
$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = (0,0), \tag{$*$}$$
där
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - \frac{2V}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - \frac{2V}{y^2}.$$
($*$) ger ekvationssystemet
$$3x^2y - 2V = 0, \tag{1}$$
$$3xy^2 - 2V = 0. \tag{2}$$
Multiplicera (1) med y, (2) med x och ta differensen
$$-2Vy + 2Vx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y.$$
Detta insatt i (1) (eller (2)) ger
$$3y^3 - 2V = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \big(\tfrac{2}{3}V\big)^{1/3}.$$
En kritisk punkt är $\big((\frac{2}{3}V)^{1/3}, (\frac{2}{3}V)^{1/3}\big)$.
2. Gradienten ∇f existerar överallt utom då $x = 0$ eller $y = 0$.
3. Randpunkterna till området är linjerna $x = 0$ och $y = 0$. Eftersom området dessutom är obegränsat måste vi även betrakta fallet då $\|(x,y)\| \to \infty$, vilket i detta fall svarar mot $x \to \infty$ eller $y \to \infty$.

Funktionens minsta värde är något av följande värden

$$\begin{aligned} f\Big(\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}V}, \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}V}\Big) &= 3\big(\tfrac{2}{3}V\big)^{2/3} + 4V\big(\tfrac{2}{3}V\big)^{-1/3}, \\ &= 2^{2/3}\cdot 3^{4/3}\cdot V^{2/3}, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x,y) &= \infty, \\ \lim_{y\to 0^+} f(x,y) &= \infty, \\ \lim_{x\to\infty} f(x,y) &= \infty, \\ \lim_{y\to\infty} f(x,y) &= \infty. \end{aligned}$$

Lådans dimensioner ska vara

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}V}, \\
y &= \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}V}, \\
z &= \sqrt[3]{\tfrac{9}{4}V}.
\end{aligned}
$$

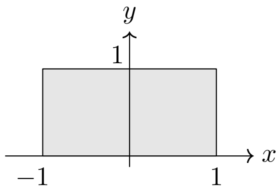
Lektion 8, Flervariabelanalys den 2 februari 2000

13.2.2 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = xy - 2x$$

i rektangeln $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

Vi börjar med att rita upp området



Området är kompakt vilket innebär att det största och minsta värde funktionen kan anta är i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. De kritiska punkterna uppfyller

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y-2, x) = (0,0),$$

vilket ger punkten $(0,2)$ som måste uteslutas eftersom den inte tillhör området.

2. Gradienten existerar överallt.

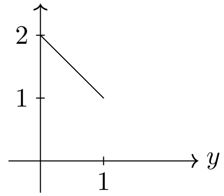
Eftersom punkt 1 och 2 inte gav några punkter måste f anta största och minsta värde i en randpunkt.

3. Områdets rand består av fyra räta kurvstycken som vi undersöker separat.

$x = -1:$ På randkurvan $\{x = -1\}$ har funktionen utseendet

$$f(-1,y) = -y + 2.$$

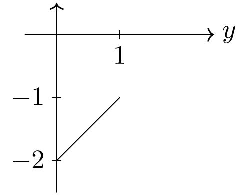
Största värdet av f är 2 i $y = 0$.
Minsta värdet av f är 1 i $y = 1$.



$x = +1:$ På randkurvan $\{x = +1\}$ har funktionen utseendet

$$f(1,y) = y - 2.$$

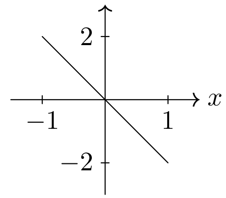
Största värdet av f är -1 i $y = 1$.
Minsta värdet av f är -2 i $y = 0$.



$y = 0:$ På randkurvan $\{y = 0\}$ har funktionen utseendet

$$f(x,0) = -2x.$$

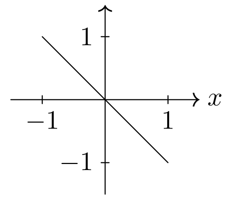
Största värdet av f är 2 i $x = -1$.
Minsta värdet av f är -2 i $x = 1$.



$y = 1:$ På randkurvan $\{y = 1\}$ har funktionen utseendet

$$f(x,1) = -x.$$

Största värdet av f är 1 i $x = -1$.
Minsta värdet av f är -1 i $x = 1$.



Genom att jämföra största och minsta värdet på de olika randkurvorna får vi f:s största och minsta värde i hela området

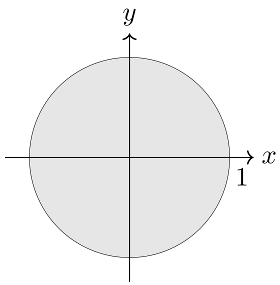
Största värde	2	i punkten	$(-1,0)$.
Minsta värde	-2	i punkten	$(1,0)$.

13.2.4 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = x + 2y$$

i cirkelskivan $x^2 + y^2 \le 1$.

Området är insidan av cirkeln med mittpunkt i origo och radie 1



Eftersom f är linjär existerar gradienten överallt och $\nabla f = (1,2)$ är aldrig noll.

Detta utesluter att största eller minsta värdet antas i en inre punkt. Kvar att undersöka är områdets rand, d.v.s. enhetscirkeln.

Punkter på enhetscirkeln beskrivs enklast med polära koordinater

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \end{aligned} \qquad (0 \le \theta \le 2\pi).$$

På cirkeln har f utseendet

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta,$$

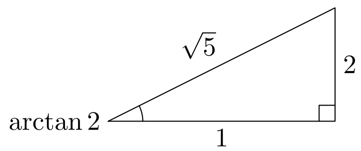
där vi infört g som ett förkortat skrivsätt för f. Vi bestämmer största och minsta värdet av g genom att sätta derivatan lika med noll,

$$\begin{aligned} & g'(\theta) = -\sin\theta + 2\cos\theta = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tan\theta = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \theta = \arctan 2 \quad \text{eller} \quad \theta = \pi + \arctan 2 \quad (\text{Obs! } 0 \le \theta \le 2\pi). \end{aligned}$$

Detta svarar mot punkterna

$$\begin{aligned} & \bigl(\cos\arctan 2, \sin\arctan 2\bigr) \quad \text{och} \\ & \bigl(\cos(\pi + \arctan 2), \sin(\pi + \arctan 2)\bigr) = \bigl(-\cos\arctan 2, -\sin\arctan 2\bigr). \end{aligned}$$

För att förenkla dessa uttryck ritar vi en hjälptriangel.



$$\cos\arctan 2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\arctan 2 = \tfrac{2}{\sqrt{5}}$$

Punkterna är alltså $\bigl(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\bigr)$ och $\bigl(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\bigr)$, och

$$\begin{aligned} f\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\bigr) &= \sqrt{5} \quad \text{Största värdet,} \\ f\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\bigr) &= -\sqrt{5} \quad \text{Minsta värdet.} \end{aligned}$$

13.2.6 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

i triangeln med hörnpunkter $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

Största och minsta värde antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Kritiska punkter har gradient 0, d.v.s.

$$\nabla f = \bigl(y - 2xy - y^2, x - x^2 - 2xy\bigr) = (0,0).$$

Vi har alltså ekvationssystemet

$$y(1 - 2x - y) = 0, \tag{1}$$
$$x(1 - 2y - x) = 0. \tag{2}$$

Ekvation (1) är uppfylld om åtminstone en av faktorerna är noll. Detta ger oss två fall

$y = 0:$ (2) ger $x(1-x) = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = 1$.

$1 - 2x - y = 0:$ Vi har alltså att $y = 1 - 2x$. Detta insatt i (2) ger

$$\begin{aligned} x\bigl(1 - 2(1-2x) - x\bigr) &= 0, \\ x\bigl(-1 + 3x\bigr) &= 0, \end{aligned}$$

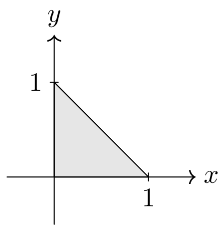
d.v.s. $x = 0$ eller $x = 1/3$.

De kritiska punkterna är

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1) \quad \text{och} \quad (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}).$$

2. Gradienten existerar överallt.

3. Om vi ritar upp området



så ser vi att randen består av tre randkurvor. Vi har därför tre fall att undersöka

$x = 0:$ På y-axeln har f utseendet $f(0,y) = 0$.

$y = 0:$ På x-axeln har f utseendet $f(x,0) = 0$.

diagonal: Den räta linjen mellan $(0,1)$ och $(1,0)$ kan vi beskriva med parametriseringen

$$(x,y) = (0,1) + t(1,-1) \quad (0 \le t \le 1).$$

På linjen har f utseendet

$$g(t) = f(t, 1-t) = t \cdot (1-t) \cdot 0 = 0.$$

Det största och minsta värdet av f finns bland följande värden

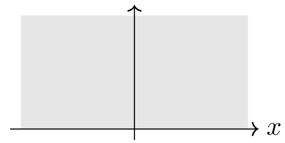
$$\begin{aligned} 0 \ \ (= \text{randvärde}) &= \text{Minsta värde}, \\ f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{27} \qquad &= \text{Största värde}. \end{aligned}$$

13.2.10 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

i det övre halvplanet $y \ge 0$.

Området består av alla punkter med positiv y-koordinat och x-axeln.



Vi har tre typer av punkter att undersöka

1. kritiska punkter,
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Gradientens komponenter är

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (1+x^2+y^2) - (x-y) \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + 2xy + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(-1) \cdot (1+x^2+y^2) - (x-y) \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-1 - x^2 - 2xy + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Gradienten lika med noll ger ekvationssystemet

$$1 - x^2 + 2xy + y^2 = 0, \tag{1}$$
$$-1 - x^2 - 2xy + y^2 = 0. \tag{2}$$

(1) + (2) ger

$$-2x^2 + 2y^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y \quad \text{eller} \quad x = -y.$$

Vi undersöker dessa två fall.

$x = y:$ (1) ger $1 + 2x^2 = 0$ som saknar reella lösningar.

$x=-y:$ (1) och (2) ger $1-2x^2=0$ som har lösningarna $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kritiska punkter är

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(utanför området)}\\ &\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

2. ∇f existerar överallt (nämnaren $\geq 1 > 0$).

3. Längs x-axeln är funktionen

$$g(x)=f(x,0)=\frac{x}{1+x^2}.$$

Det största och minsta värdet får vi i punkter där derivatan är noll (vi har nämligen att $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0$).

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=0\\ \Leftrightarrow\qquad & x=\pm 1.\end{aligned}$$

Det största och minsta värdet av f finns alltså bland följande värden

$$\begin{aligned}f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)&=-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\\ f\left(-1,0\right)&=-\tfrac{1}{2},\\ f\left(1,0\right)&=\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Svaret är

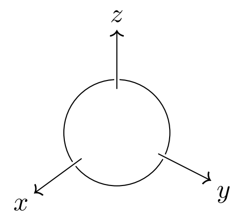
$$\begin{aligned}&\text{Största värde} = \tfrac{1}{2} &&\text{i punkten } (1,0).\\ &\text{Minsta värde} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &&\text{i punkten } \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

13.2.12 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y,z)=xz+yz$$

i klotet $x^2+y^2+z^2\leq 1$.

Området består av enhetsklotet med mittpunkt i origo.



Det största och minsta värdet antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där ∇f inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa fall.

1. Gradienten lika med noll ger

   $$\nabla f=(z,z,x+y)=(0,0,0)$$

   d.v.s. $x+y=0$ och $z=0$. Detta ekvationssystem har lösningarna

   $$(x,y,z)=t(1,-1,0)\quad (t\text{ parameter}).$$

   Alltså är alla punkter på linjen kritiska punkter. Vi måste inskränka parameterintervallet till

   $$-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\leq t\leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

   för att punkterna ska ligga inom mängden.

2. Gradienten existerar överallt.

3. På randytan gäller att

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Vi kan från detta samband lösa ut z

$$z=z(x,y)=\pm\sqrt{1-x^2-y^2},$$

där x och y uppfyller $x^2+y^2\le 1$. Funktionen f:s utseende på randytan kan alltså beskrivas av x och y, och är

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= f\big(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\,\big)\\ &= (x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x,y) &= f\big(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2}\,\big)\\ &= -(x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}\\ &= -g_1(x,y). \end{aligned}$$

Vi ska alltså bestämma största och minsta värdet av $g_1(x,y)$ (och g_2) i mängden $x^2+y^2\le 1$.

Detta är precis den typ av problem vi hittills hållit på med. Största och minsta värdet av g_1 antas i någon av följande punkter

(a) kritiska punkter till g_1,

(b) punkter där ∇g_1 inte existerar, och

(c) randpunkter till $x^2+y^2\le 1$.

Vi undersöker dessa tre fall

(a) Vi har

$$\nabla g_1=\Big(\frac{\partial g_1}{\partial x},\frac{\partial g_1}{\partial y}\Big)=0, \tag{$*$}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}=\cdots=\frac{1-2x^2-xy-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}=\cdots=\frac{1-2y^2-xy-x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

$(*)$ ger ekvationssystemet

$$1-2x^2-xy-y^2=0, \tag{1}$$

$$1-x^2-xy-2y^2=0. \tag{2}$$

(1) − (2) ger

$$-x^2+y^2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=y \quad \text{eller} \quad x=-y.$$

Dessa två fall ger

$x=y:$ (1) och (2) ger $1-4x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{1}{2}$.

$x=-y:$ (1) och (2) ger $1-2x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

De kritiska punkterna till g_1 är alltså

$$\big(\tfrac12,\tfrac12\big),\quad \big(-\tfrac12,-\tfrac12\big),\quad \big(\tfrac{1}{\sqrt2},-\tfrac{1}{\sqrt2}\big),\quad \big(-\tfrac{1}{\sqrt2},\tfrac{1}{\sqrt2}\big).$$

(b) ∇g_1 existerar överallt utom på randen.

(c) På randen är $x^2+y^2=1$ och

$$g_1(x,y)=(x+y)\cdot 0=0.$$

g_1 har alltså sitt största respektive minsta värde bland

$$\begin{array}{rl} 0 & \text{(randvärden)}\\ g_1\big(\tfrac12,\tfrac12\big)=\tfrac{1}{\sqrt2} & \text{(största värde)}\\ g_1\big(-\tfrac12,-\tfrac12\big)=-\tfrac{1}{\sqrt2} & \text{(minsta värde)}\\ g_1\big(\tfrac{1}{\sqrt2},-\tfrac{1}{\sqrt2}\big)=0 & \\ g_1\big(-\tfrac{1}{\sqrt2},\tfrac{1}{\sqrt2}\big)=0 & \end{array}$$

Eftersom $g_2=-g_1$ har g_2 samma största och minsta värde som g_1.

Eftersom $f(t,-t,0)=0$ i de kritiska punkterna är

$$\begin{array}{ll} \text{Största värde } \tfrac{1}{\sqrt2} \text{ i} & \big(\tfrac12,\tfrac12,\tfrac{1}{\sqrt2}\big) \text{ och}\\ & \big(-\tfrac12,-\tfrac12,-\tfrac{1}{\sqrt2}\big)\\ \text{Minsta värde } -\tfrac{1}{\sqrt2} \text{ i} & \big(-\tfrac12,-\tfrac12,\tfrac{1}{\sqrt2}\big) \text{ och}\\ & \big(\tfrac12,\tfrac12,-\tfrac{1}{\sqrt2}\big) \end{array}$$

13.2.17 Maximera

$$Q(x,y) = 2x + 3y$$

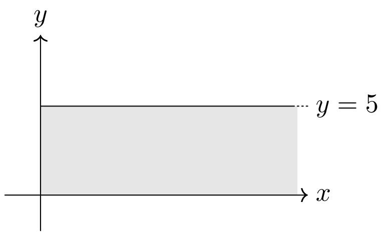
under bivillkoren $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 5$, $x + 2y \leq 12$ och $4x + y \leq 12$.

Området ges av alla punkter (x, y) som uppfyller villkoren

$$x \geq 0, \tag{1}$$
$$y \geq 0, \tag{2}$$
$$y \leq 5, \tag{3}$$
$$x + 2y \leq 12, \tag{4}$$
$$4x + y \leq 12. \tag{5}$$

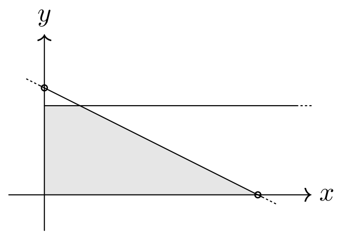
Villkor (1) och (2) säger att området måste ligga i första kvadranten.

Villkor (3) säger att y-koordinaten är mindre än eller lika med 5.

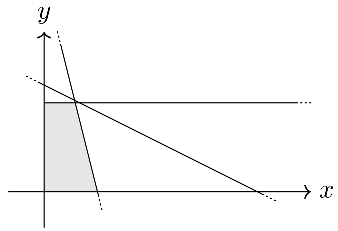


Villkor (4) säger att området ligger till vänster om linjen $x + 2y = 12$. För att rita upp linjen $x + 2y = 12$ tar vi reda på var den skär x- respektive y-axeln och förbinder dessa två punkter med en rät linje. På x-axeln är $y = 0$ och $x + 2 \cdot 0 = 12$.

På y-axeln är $x = 0$ och $0 + 2y = 12$, d.v.s. $y = 6$.



Villkor (5) säger slutligen att området ligger till vänster om linjen $4x + y = 12$.



Området är alltså den gråfärgade fyrhörningen ovan.

Eftersom målfunktionen Q är linjär existerar gradienten överallt och $\nabla Q = (2, 3)$ är aldrig noll. Q måste alltså anta sitt största värde i en randpunkt.

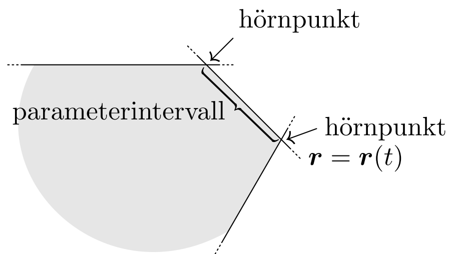
Områdets rand består av räta linjer och vi undersöker Q:s värden på randen genom att parametrisera dessa linjer,

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\boldsymbol{v}.$$

Q:s värde på en randkurva kan alltså skrivas

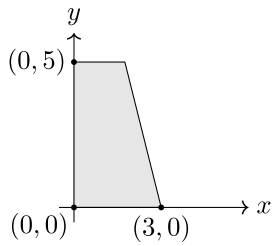
$$q(t) = Q\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = Q\big(\overrightarrow{OP} + t\boldsymbol{v}\big).$$

Eftersom både Q och $\boldsymbol{r}(t)$ är linjära funktioner så är $q(t)$ en linjär funktion av t. Linjära funktioner antar alltid sitt max/min-värde i intervallets ändpunkter, som i detta fall svarar mot hörnpunkter.



Målfunktionen Q antar alltså sitt största värde i en hörnpunkt.

Vi vet redan koordinaterna för tre av hörnpunkterna.



Den fjärde hörnpunkten är skärningspunkten mellan linjerna

$$y = 5 \quad \text{och} \quad 4x + y = 12,$$

vilket direkt ger $x = \frac{7}{4}$ och $y = 5$.

Q:s maximum är det största av värdena

$$\begin{aligned}
&Q(0,0) = 0,\\
&Q(3,0) = 6,\\
&Q(0,5) = 15,\\
&Q(\tfrac{7}{4},5) = \tfrac{37}{2} \quad \text{(Största värdet).}
\end{aligned}$$

13.3.2 Bestäm kortaste avståndet från punkten $(3,0)$ till parabeln $y = x^2$

a) genom att reducera antalet variabler till ett extremvärdesproblem utan bivillkor, och

b) med Lagranges multiplikatormetod.

Om (x,y) är koordinaterna för punkten på parabeln så ska vi minimera

$$\|(x,y) - (3,0)\| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \qquad (*)$$

under förutsättning att (x,y) ligger på parabeln, d.v.s. $y = x^2$.

Med en mer standardformulering blir problemet

$$\begin{aligned}
&\min \quad (x-3)^2 + y^2\\
&\text{då} \quad\; y - x^2 = 0.
\end{aligned} \qquad (*)$$

Notera att vi nu minimerar kvadraten på avståndet istället för avståndet, men det är i princip samma problem och minimum antas i samma punkt för båda problemen. Skälet till denna omskrivning är rent praktiskt; vi slipper kvadratroten.

a) Ur bivillkoret kan vi lösa ut $y = x^2$ och problemet blir att minimera

$$f(x) = (x-3)^2 + (x^2)^2 = (x-3)^2 + x^4.$$

Vi bestämmer minsta värdet av f genom att sätta derivatan lika med noll,

$$f'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 0,$$

vilket ger $x = 1$ (inga andra reella rötter).

Eftersom

$$f''(1) = (2 + 12x)\Big|_{x=1} = 14 > 0$$

är $x = 1$ en minimipunkt. Svaret är alltså att punkten $(1,1)$ ligger närmast punkten $(3,0)$ med ett avstånd på $\sqrt{(1-3)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

b) Enligt Lagranges multiplikatormetod antas minimum i en punkt där gradienten av målfunktionen tillhör det linjära hölje som spänns upp av gradienten av bivillkorsfunktionen. Om

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x-3)^2 + y^2\\
g(x,y) &= y - x^2
\end{aligned}$$

så lyder alltså villkoret: ∇f är parallell med ∇g, vilket är detsamma som

$$\det\begin{pmatrix} \text{---}\,\nabla f\,\text{---} \\ \text{---}\,\nabla g\,\text{---} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} 2(x-3) & 2y \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 2x - 4xy - 6 = 0.$$

Detta villkor tillsammans med bivillkoret ger oss ekvationssystemet

$$2x - 4xy - 6 = 0, \qquad (1)$$

$$y - x^2 = 0. \qquad (2)$$

Ekvation (2) ger $y = x^2$. Detta insatt i (1) ger

$$2x - 4x^3 - 6 = 0,$$

som har lösningen $x = 1$. Alltså är $(1, 1)$ en kritisk punkt.

Eftersom parabeln $\{g(x, y) = 0\}$ inte är kompakt kan två fall inträffa

1. minimum antas i en kritisk punkt, d.v.s. $(1, 1)$.
2. Gränsvärdet

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ y = x^2}} f(x, y)$$

är mindre än f:s värden på parabeln. I detta fall saknar f ett minsta värde.

Vi har att

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ y = x^2}} f(x, y) = \infty$$

varför fall 1 inträffar.

Alltså ligger punkten $(1, 1)$ närmast punkten $(3, 0)$ med ett avstånd på $\sqrt{(1-3)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

13.3.4 Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sätt

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Problemet kan nu skrivas

$$\begin{aligned} &\text{min/max} \quad && f(x, y, z) \\ &\text{då} && g(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Eftersom sfären är kompakt antas det största resp. minsta värdet av f i någon av följande punkter.

1. punkter där ∇f tillhör det linjära hölje som spänns upp av ∇g,
2. punkter där $\nabla g = \mathbf{0}$ (singulära punkter),
3. punkter där ∇f eller ∇g inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f &= (1, 1, -1), \\ \nabla g &= (2x, 2y, 2z). \end{aligned}$$

I kritiska punkter ska $\nabla f \in \operatorname{span}\{\nabla g\}$, d.v.s. ∇f ska vara parallell med ∇g. Det ska alltså finnas en skalär λ s.a.

$$(1, 1, -1) = \lambda(2x, 2y, 2z).$$

Detta leder tillsammans med bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= 1, && (1) \\ 2\lambda y &= 1, && (2) \\ 2\lambda z &= -1, && (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. && (4) \end{aligned}$$

Från (1), (2) och (3) har vi att (ty $\lambda \neq 0$)

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{och} \quad z = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Detta insatt i (4) ger

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{3}{4\lambda^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

vilket ger punkterna

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{och} \quad \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. Gradienten $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ är noll endast i punkten med $x = y = z = 0$, men $(0, 0, 0)$ uppfyller inte bivillkoret.

3. Gradienterna ∇f och ∇g existerar överallt.

Målfunktionen f:s största respektive minsta värde är ett av följande värden

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \sqrt{3} \qquad &&\text{(Största värdet)},\\ f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\sqrt{3} \qquad &&\text{(Minsta värdet)}. \end{aligned}$$

13.3.6 Bestäm det kortaste avståndet från origo till ytan $xyz^2 = 2$.

Om (x, y, z) är koordinaterna för en punkt på ytan så ges avståndet till origo av uttrycket

$$\|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

För att slippa kvadratroten kan vi istället söka minsta värdet av avståndet i kvadrat

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

som antar minimum i samma punkt.

Sätter vi $g(x, y, z) = xyz^2 - 2$ blir problemformuleringen

$$\begin{aligned} &\min && f(x, y, z)\\ &\text{då} && g(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Eftersom ytan inte är kompakt (t.ex. ligger den obegränsade kurvan $x = t$, $y = 2/t$, $z = 1$ i ytan) måste vi först försäkra oss om att f inte går mot ett minvärde då någon av koordinaterna $\to \pm\infty$. Eftersom f är kvadraten på avståndet till origo ser vi direkt att $f \to \infty$ när $|x|$, $|y|$ eller $|z| \to \infty$.

Alltså antar f ett minsta värde i någon av följande punkter

1. punkter där ∇f tillhör det linjära hölje som spänns upp av ∇g,

2. punkter där $\nabla g = \mathbf{0}$, och

3. punkter där ∇f eller ∇g inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2x, 2y, 2z),\\ \nabla g &= (yz^2, xz^2, 2xyz). \end{aligned}$$

Vi söker punkter där ∇f är parallell med ∇g. Ett sätt att formulera detta på är

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(yz^2, xz^2, 2xyz),$$

för någon skalär λ. Ett annat sätt är villkoret

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z\\ yz^2 & xz^2 & 2xyz\\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

som måste gälla för alla (a, b, c) eftersom de två översta raderna ∇f och ∇g är linjärt beroende. Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a\begin{vmatrix} 2y & 2z\\ xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 2x & 2z\\ yz^2 & 2xyz \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 2x & 2y\\ yz^2 & xz^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom a, b och c kan väljas fritt måste de tre minorerna vara noll,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2y & 2z\\ xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} &= 4xy^2z - 2xz^3 = 0,\\ \begin{vmatrix} 2x & 2z\\ yz^2 & 2xyz \end{vmatrix} &= 4x^2yz - 2yz^3 = 0,\\ \begin{vmatrix} 2x & 2y\\ yz^2 & xz^2 \end{vmatrix} &= 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = 0. \end{aligned}$$

Dessa villkor tillsammans med bivillkoret ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} xz(2y^2 - z^2) &= 0, &\quad (1)\\ yz(2x^2 - z^2) &= 0, &\quad (2)\\ z^2(x - y)(x + y) &= 0, &\quad (3)\\ xyz^2 &= 2. &\quad (4) \end{aligned}$$

Ekvation (3) ger oss tre fall

$x = y:$ De resterande ekvationerna reduceras till

$$xz(2x^2 - z^2) = 0, \tag{5}$$
$$x^2 z^2 = 2. \tag{6}$$

Eftersom $x, z \neq 0$, p.g.a. (6), ger (5) att $2x^2 = z^2$. Detta insatt i (6) ger

$$2x^4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Vi får därför punkterna (med hjälp av (7))

$$(1, 1, \sqrt{2}\,), \quad (1, 1, -\sqrt{2}\,), \quad (-1, -1, \sqrt{2}\,) \quad \text{och} \quad (-1, -1, -\sqrt{2}\,).$$

$x = -y:$ Eftersom $x \neq 0$, p.g.a. (4), blir VL av (4) ett negativt tal (z^2 är positiv) och kan inte vara lika med HL.

$z = 0:$ Detta strider mot ekvation (4).

2. Gradienterna $\nabla g = (yz^2, xz^2, 2xyz)$ är noll bara om åtminstone en av x, y och z är noll, men det strider mot bivillkoret.

3. Gradienterna ∇f och ∇g existerar överallt.

Kvadraten på minsta avståndet är det minsta av följande värden

$$\begin{aligned} f(1, 1, \sqrt{2}\,) &= 4, \\ f(1, 1, -\sqrt{2}\,) &= 4, \\ f(-1, -1, \sqrt{2}\,) &= 4, \\ f(-1, -1, -\sqrt{2}\,) &= 4. \end{aligned}$$

13.3.12 Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

på ellipsen som är skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $x - 2z = 3$.

Ellipsen tillhör både konen och planet, och uppfyller därför både konens och planets ekvation.

Sätter vi

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= z^2 - x^2 - y^2, \\ g_2(x, y, z) &= x - 2z - 3, \end{aligned}$$

blir problemet

$$\begin{array}{ll} \max/\min & f(x, y, z) \\ \text{då} & \begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \end{array}$$

Eftersom en ellips är en kompakt kurva så antar f ett största och minsta värde i någon av följande punkter,

1. punkter där ∇f tillhör det linjära hölje som spänns upp av ∇g_1 och ∇g_2,

2. punkter där $\dim\{\nabla g_1, \nabla g_2\} < 2$, och

3. punkter där ∇f, ∇g_1 och ∇g_2 inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2x, 2y, 2z) \\ \nabla g_1 &= (-2x, -2y, 2z) \\ \nabla g_2 &= (1, 0, -2) \end{aligned}$$

Gradienten ∇f tillhör $\text{span}\{\nabla g_1, \nabla g_2\}$ endast om

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} - \nabla f - \\ - \nabla g_1 - \\ - \nabla g_2 - \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -2x & -2y & 2z \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 8xy + 4yz + 0 - (-4yz) - 0 - 8xy = 8yz. \end{aligned}$$

Tillsammans med bivillkoren ger detta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} yz &= 0, & (1)\\ z^2 - x^2 - y^2 &= 0, & (2)\\ x - 2z &= 3. & (3) \end{aligned}$$

Ekvation (1) ger två möjligheter.

$y = 0:$ Ekvation (2) och (3) ger

$$\begin{aligned} (z-x)(z+x) &= 0, & (4)\\ x - 2z &= 3. & (5) \end{aligned}$$

Om $z = x$ ger (5) att $x = -3$, vilket ger punkten $(-3, 0, -3)$.
Om $z = -x$ ger (5) att $x = 1$, vilket ger punkten $(1, 0, -1)$.

$z = 0:$ Ekvation (2) och (3) ger

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0,\\ x &= 3. \end{aligned}$$

som saknar lösning.

2. Gradienterna ∇g_1 och ∇g_2 är linjärt beroende omm

$$\begin{vmatrix} - \nabla g_1 - \\ - \nabla g_2 - \\ a \quad b \quad c \end{vmatrix} = 0,$$

för alla vektorer (a, b, c). Med ∇g_1 och ∇g_2 insatta blir detta

$$\begin{vmatrix} -2x & -2y & -2z \\ 1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a \begin{vmatrix} -2y & 2z \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} -2x & 2z \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} -2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom a, b och c kan väljas fritt måste alla minorer vara noll,

$$\begin{vmatrix} -2y & 2x \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4y = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2x & 2z \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4x - 2z = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y = 0.$$

Tillsammans med bivillkoren får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} y &= 0, & (6)\\ 4x - 2z &= 0, & (7)\\ z^2 - x^2 - y^2 &= 0, & (8)\\ x - 2z &= 3. & (9) \end{aligned}$$

Ekvation (6), (7) och (9) är ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som har lösningen $(x, y, z) = (-1, 0, -2)$, vilken dock inte uppfyller (8).

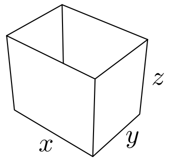
3. Gradienterna ∇f, ∇g_1 och ∇g_2 existerar överallt.

Det största och minsta värdet av f finns bland följande värden

$$\begin{aligned} f(-3, 0, -3) &= 18 \quad \text{(Största värdet)},\\ f(1, 0, -1) &= \ \ 2 \quad \text{(Minsta värdet)}. \end{aligned}$$

13.3.18 Bestäm de mest ekonomiska dimensionerna av en rektangulär låda utan lock.

Låt x, y och z beteckna sidolängderna av lådan enligt figuren nedan.



Vi tolkar uppgiften som att vi ska maximera lådans volym för en given total area av sidoväggar och botten.

Eftersom lådans volym är $V = xyz$ och area är $A = xy + 2xz + 2yz$ blir vårt problem

$$\begin{array}{ll} \max & xyz \\ \text{då} & \begin{cases} xy + 2xz + 2yz & = A \\ \quad x, y, z & \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Utefter ränderna $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$ är volymen noll, så vi har inga maxpunkter där.

Areabivillkoret ger upphov till en icke-kompakt mängd, så vi måste undersöka vad som händer med volymen då en av kantlängderna går mot ∞. Om t.ex. $x \to \infty$ så har vi att

$$\begin{aligned} xy \leq xy + 2xz + 2yz \leq A \qquad &\Rightarrow \qquad y \leq \frac{A}{x}, \\ 2xz \leq xy + 2xz + 2yz \leq A \qquad &\Rightarrow \qquad z \leq \frac{A}{2x}, \end{aligned}$$

vilket ger att volymen är

$$V = xyz \leq x \cdot \frac{A}{x} \cdot \frac{A}{2x} = \frac{A^2}{2x} \to 0.$$

Med ett liknande resonemang får vi att $V \to 0$ om $y \to \infty$ eller $z \to \infty$.

Volymen måste alltså anta sitt största värde i någon av följande punkter,

1. punkter där ∇V tillhör det linjära hölje som spänns upp av ∇A,
2. punkter där $\nabla A = \mathbf{0}$, och
3. punkter där ∇V eller ∇A inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\begin{aligned} \nabla V &= (yz, xz, xy), \\ \nabla A &= (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y). \end{aligned}$$

Gradienten ∇V tillhör span$\{\nabla A\}$ om de är linjärt beroende, d.v.s. omm

$$\begin{vmatrix} - \nabla V - \\ - \nabla A - \\ a \quad b \quad c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ y + 2z & x + 2z & 2x + 2y \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

för alla vektorer (a, b, c).

Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a \begin{vmatrix} xz & xy \\ x + 2z & 2x + 2z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} yz & xy \\ y + 2z & 2x + 2y \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} yz & xz \\ y + 2z & x + 2z \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom a, b och c kan väljas fritt måste alla minorer vara noll.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} xz & xy \\ x + 2z & 2x + 2z \end{vmatrix} &= xz(2x + 2z) - xy(x + 2z) = -x^2y + 2x^2z = 0, \\ \begin{vmatrix} yz & xy \\ y + 2z & 2x + 2y \end{vmatrix} &= yz(2x + 2y) - xy(y + 2z) = -xy^2 + 2y^2z = 0, \\ \begin{vmatrix} yz & xz \\ y + 2z & x + 2z \end{vmatrix} &= yz(x + 2z) - xz(y + 2z) = -2xz^2 + 2yz^2 = 0. \end{aligned}$$

Tillsammans med bivillkoret har vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x^2(2z - y) &= 0, && (1) \\ y^2(2z - x) &= 0, && (2) \\ z^2(y - x) &= 0, && (3) \\ xy + 2xz + 2yz &= A. && (4) \end{aligned}$$

Vi vet att i maxpunkten är $x, y, z \neq 0$ så (1), (2) och (3) ger att

$$x = y = 2z.$$

Detta insatt i (4) ger

$$12z^2 = A \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{A/3},$$

vilket ger punkten $\left(\sqrt{A/3}, \sqrt{A/3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{A/3}\right)$ (minustecknet strider mot positivitetsvillkoret).

2. Gradienten $\nabla A = (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y)$ är noll omm

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   som endast har den triviala lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eftersom determinanten är 8, men $(0, 0, 0)$ uppfyller inte bivillkoret.

3. ∇V och ∇A existerar överallt.

Störst volym av lådan är

$$V = V\big(\sqrt{A/3}, \sqrt{A/3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{A/3}\big) = \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}.$$

Lektion 9, Flervariabelanalys den 3 februari 2000

13.5.2 Genom att ersätta t med xt i den välbekanta integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

och derivera med avseende på x, bestäm

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^4\,e^{-t^2}\,dt.$$

Vi ska börja med att derivera integralen som uppstår utan hänsyn till de krav vi måste kontrollera att integranden uppfyller. Först när vi vet att uträkningarna ger önskat resultat kontrollerar vi att integranden uppfyller villkoren som ställs.

Ersätter vi t med xt blir integranden

$$f(x,t) = e^{-x^2t^2}$$

och vi har

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2t^2}\,dt = \{\, s = xt;\ ds = x\,dt \,\}\\ &= \frac{1}{|x|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{|x|}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Deriverar vi båda led fås

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2t^2}\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2t^2}\big(-2xt^2\big)\,dt = -2x\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-x^2t^2}\,dt,\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\,\text{HL} = \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{\pi}}{|x|} = -\frac{\sqrt{\pi}}{x^2}\operatorname{sgn} x,$$

vilket ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-x^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^3}\operatorname{sgn} x,$$

och med $x = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Deriverar vi $(*)$ ytterligare en gång fås

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\Big(-2x\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-x^2t^2}\,dt\Big)\\ &= -2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-x^2t^2}\,dt - 2x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\,t^2 e^{-x^2t^2}\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{x^3}\operatorname{sgn} x - 2x\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-x^2t^2}(-2xt^2)\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{x^3}\operatorname{sgn} x + 4x^2\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-x^2t^2}\,dt,\end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\text{HL} = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{\sqrt{\pi}}{x^2}\operatorname{sgn} x\Big) = \frac{2\sqrt{\pi}}{x^3}\operatorname{sgn} x,$$

vilket ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^4\,e^{-x^2t^2}\,dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{4x^5}\operatorname{sgn} x,$$

och med $x = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2}\,dt = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

För att deriveringen av integralerna ska vara legitim måste följande villkor vara uppfyllda

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt$ existerar,
2. $\displaystyle\Big|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big| \le g(t),$ där $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt < \infty,$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)\,dt,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,dt$ existerar, och
4. $\displaystyle\Big|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Big| \le k(t),$ där $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,dt < \infty,$

för alla x i en omgivning av 1, där

$$f(x,t) = e^{-x^2t^2},$$
$$h(x,t) = t^2\,e^{-x^2t^2}.$$

Alla dessa villkor reduceras i slutändan till att visa att integraler av typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n\,e^{-x^2t^2}\,dt \qquad (n \text{ naturligt tal}) \tag{$\dagger$}$$

är konvergenta.

Jämför vi med den konvergenta integralen av $1/t^2$ i $t=\infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n\,e^{-x^2t^2}}{1/t^2} = \lim_{t\to\infty} t^{n+2}\,e^{-x^2t^2} = 0 \qquad (x \neq 0)$$

ger jämförelseprincipen att (†) är konvergent.

13.5.7 Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2}$$

och använd resultatet för att beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} \quad \text{och} \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3}.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} &= \frac{1}{x^2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+(t/x)^2} = \{\, s=t/x;\ ds=dt/x \,\}\\ &= \frac{1}{|x|}\int_0^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{|x|}\Big[\arctan s\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2|x|}.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Vi deriverar båda led

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x^2+t^2}\,dt\\ &= \int_0^{\infty} \frac{-1}{(x^2+t^2)^2}\cdot 2x\,dt = -2x\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2},\\ \frac{d}{dx}\,\text{HL} &= \frac{d}{dx}\frac{\pi}{2|x|} = -\frac{\pi}{2x^2}\operatorname{sgn} x,\end{aligned}$$

vilket ger

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{4x^3}\operatorname{sgn} x. \tag{$\dagger$}$$

En derivering av (†) ger

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+t^2)^2}\,dt\\ &= \int_0^{\infty} \frac{-2}{(x^2+t^2)^3}\cdot 2x\,dt = -4x\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3},\\ \frac{d}{dx}\,\text{HL} &= \frac{d}{dx}\frac{\pi}{4x^3}\operatorname{sgn} x = -\frac{3\pi}{4x^4}\operatorname{sgn} x,\end{aligned}$$

vilket ger

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3} = \frac{3\pi}{16x^5}\operatorname{sgn} x.$$

För att kunna motivera deriveringen av integralerna måste villkoren i sats 13.5.5 vara uppfyllda. Dessa villkor består väsentligen av att visa att integraler av typen

$$\int_0^{\infty} \frac{t^m}{(x^2+t^2)^n}\,dt \qquad (m < n \text{ naturliga tal})$$

konvergerar, vilket man gör genom att jämföra med $1/t^2$ i $t=\infty$.

13.5.10 Lös integralekvationen

$$f(x) = Cx + D + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Vi ska begränsa oss till att söka efter lösningar som uppfyller villkoren för derivering av integral.

Vi deriverar integralekvationen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,\mathrm{VL} &= f'(x),\\
\frac{d}{dx}\,\mathrm{HL} &= C + \frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt\\
&= C + \frac{d}{d\underset{\cdot}{x}}\int_0^{\underset{\cdot}{x}} (x-t)f(t)\,dt + \frac{d}{d\underset{\cdot}{x}}\int_0^x (\underset{\cdot}{x}-t)f(t)\,dt\\
&= C + (x-t)f(t)\big|_{t=x} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)f(t)\,dt\\
&= C + \int_0^x f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

d.v.s.

$$f'(x) = C + \int_0^x f(t)\,dt. \qquad (*)$$

Ytterligare en derivering ger

$$f''(x) = 0 + f(x).$$

Denna differentialekvation har den allmänna lösningen

$$f(x) = A\,e^x + B\,e^{-x}.$$

Integralekvationen har randvillkoren

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 + D + 0 = D,\\
f'(0) &= C + 0 = C, \qquad \text{(från } (*)\text{)},
\end{aligned}$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
A + B &= D, &(1)\\
A - B &= C. &(2)
\end{aligned}$$

(1) + (2) och (1) − (2) ger

$$\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D,\\
B &= \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}C.
\end{aligned}$$

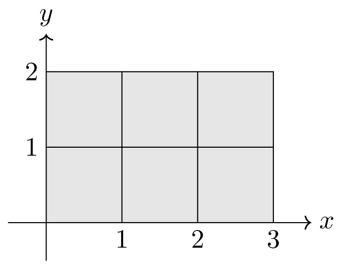
Alltså är lösningen

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D\right)e^x + \left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}C\right)e^{-x}.$$

14.1.4 Bestäm Riemannsumman av integralen

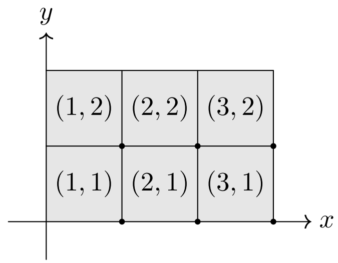
$$I = \iint_D (5 - x - y)\,dA$$

för partitionen av rektangeln $D: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$ som består av sex kvadrater med sidlängd 1 enligt figuren,



och med valet av partitionspunkt (x^*_{ij}, y^*_{ij}) som nedre höger hörnpunkt.

Vi indexerar först partitionselementen med ett indexpar (i,j) där i ansvarar för uppräkning i horisontell led och j för vertikal led.



I figuren har vi också ritat in partitionspunkterna.

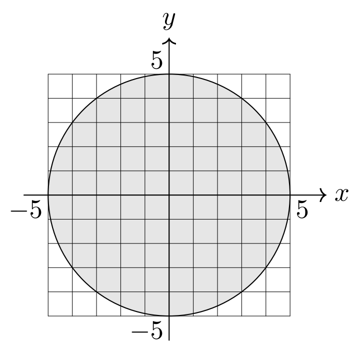
Eftersom partitionspunkterna är separerade med avståndet 1 både horisontellt och vertikalt, och index $(1,1)$ svarar mot punkten $(1,0)$ ges koordinaterna för partitionspunkterna av

$$x^*_{ij} = i,$$
$$y^*_{ij} = j-1.$$

Riemannsumman blir

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 2}} f\bigl(x^*_{ij},y^*_{ij}\bigr)\,\Delta A_{ij} &= \sum_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 2}} f(i,j-1)\cdot 1\\ &= f(1,0)+f(1,1)+f(2,0)+f(2,1)+f(3,0)+f(3,1)\\ &= 4+3+3+2+2+1 = 15.\end{aligned}$$

14.1.8 Låt D vara cirkeldisken $x^2+y^2 \le 25$ och P partitionen av kvadraten $-5\le x\le 5$, $-5\le y\le 5$ i etthundra 1×1-kvadrater enligt figuren.

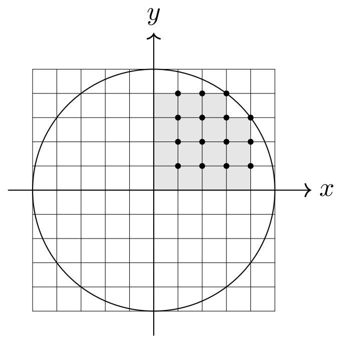


Approximera dubbelintegralen

$$J = \iint_D f(x,y)\,dA,$$

där $f(x,y) = 1$, med Riemannsumman $R(f,P)$ genom att välja partitionspunkterna (x^*_{ij}, y^*_{ij}) som den hörnpunkt i partitionskvadraten mest avlägsen från origo.

Eftersom f är noll utanför disken D och 1 innanför, är Riemannsumman antalet partitionspunkter innanför D gånger partitionselementets area.



P.g.a. symmetrin behöver vi bara räkna bidragande partitionspunkter i första kvadranten och multiplicera resultatet med 4.

$$R(f,P) = 4\cdot 15 = 60.$$

14.1.10 Beräkna integralen J från uppgift 14.1.8.

Integralens värde är arean av cirkeldisken D,

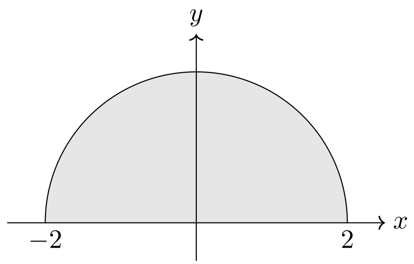
$$J = \pi\cdot 5^2 = 25\pi.$$

14.1.14 Beräkna följande dubbelintegral medelst inspektion,

$$\iint_D (x+3)\,dA,$$

där D är halvdisken $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$.

Området D är övre halvan av cirkelskivan $x^2+y^2 \le 4$ med mittpunkt i origo och radie 2.



Integralen kan med linjäriteten delas upp i två,

$$\iint_D (x+3)\,dA = \iint_D x\,dA + 3\iint_D dA.$$

Integranden i den första integralen i högerledet är en udda funktion av x, och eftersom integrationsområdet är origosymmetriskt i x-led är integralen noll.

Den andra integralens värde är arean av D, d.v.s. $\frac{1}{2}\pi\, 2^2 = 2\pi$. Alltså är

$$\iint_D (x+3)\,dA = 6\pi.$$

14.1.20 Beräkna följande dubbelintegral medelst inspektion,

$$\iint_S (x+y)\,dA,$$

där S är kvadraten $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$.

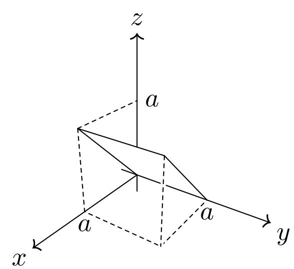
Vi delar upp integralen med linjäriteten

$$\iint_S (x+y)\,dA = \iint_S x\,dA + \iint_S y\,dA.$$

Eftersom kvadraten är spegelsymmetrisk i x och y ($(x,y) \leftrightarrow (y,x)$) är integralerna i högerledet lika,

$$\iint_S (x+y)\,dA = 2\iint_S x\,dA.$$

Värdet av integralen i högerledet är volymen under funktionsytan $z = f(x,y) = x$ inom kvadraten S.



Denna volym är $\frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{2}a^3$. Alltså är

$$\iint_S (x+y)\,dA = a^3.$$

Lektion 10, Flervariabelanalys den 8 februari 2000

14.2.4 Beräkna den itererade integralen

$$\int_0^2 dy \int_0^y y^2\, e^{xy}\, dx.$$

När vi beräknar den inre integralen (den med avseende på x) betraktar vi y som en konstant.

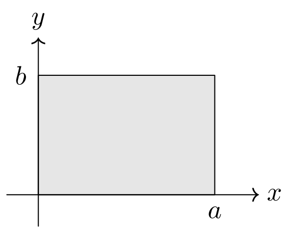
$$\begin{aligned}\int_0^2 dy \int_0^y y^2\, e^{xy}\, dx &= \int_0^2 dy \left[y e^{xy} \right]_0^y = \int_0^2 dy\, y(e^{y\cdot y} - e^{0\cdot y}) \\ &= \int_0^2 y(e^{y^2} - 1)\, dy = \{\, s = y^2;\ ds = 2y\, dy \,\} = \int_0^4 \tfrac{1}{2}(e^s - 1)\, ds \\ &= \left[\tfrac{1}{2}e^s - \tfrac{1}{2}s \right]_0^4 = \tfrac{1}{2}e^4 - \tfrac{1}{2}\cdot 4 - \left(\tfrac{1}{2}e^0 - 0\right) = \tfrac{1}{2}e^4 - \tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

14.2.6 Beräkna

$$\iint_R x^2 y^2\, dA,$$

där R är rektangeln $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

Vi ritar först upp området R.



Dubbelintegralen ska vi beräkna som en itererad integral, och då måste vi bestämma i vilken ordning variablerna ska integreras. I detta fall är området lika enkelt både i x- och y-led, och integranden är helt symmetrisk i x och y så det spelar ingen roll vilken variabel vi integrerar först. Låt oss välja att integrera i y-led först. Vi måste då beskriva området i formen

$$c \le x \le d, \quad g(x) \le y \le h(x).$$

I vårt fall är

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b.$$

Dubbelintegralen är

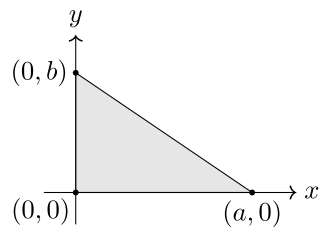
$$\begin{aligned}\iint_R x^2y^2\, dx\, dy &= \int_0^a dx \int_0^b x^2y^2\, dy = \int_0^a dx \left[\tfrac{1}{3}y^3 \right]_0^b \\ &= \tfrac{1}{3}b^3 \int_0^a x^2\, dx = \tfrac{1}{3}b^3 \left[\tfrac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \tfrac{1}{9}a^3b^3.\end{aligned}$$

14.2.8 Beräkna

$$\iint_T (x - 3y)\, dx\, dy,$$

där T är triangeln med hörnpunkter i $(0,0)$, $(a,0)$ och $(0,b)$.

Området T har utseendet



Om vi integrerar först i x-led måste vi för varje y mellan 0 och b kunna skriva

$$g(y) \le x \le h(y).$$

I detta fall är den undre gränsen noll och den övre gränsen är linjen mellan $(0, b)$ och $(a, 0)$, som har ekvationen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Området kan alltså beskrivas som

$$0 \le y \le b, \quad 0 \le x \le a(1 - y/b).$$

Dubbelintegralen är

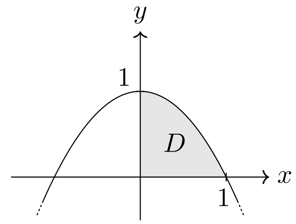
$$\begin{aligned}
&\iint_T (x - 3y)\,dx\,dy = \int_0^b dy \int_0^{a(1-y/b)} (x - 3y)\,dx \\
&= \int_0^b dy \left[\, \tfrac{1}{2} - 3xy \,\right]_0^{a(1-y/b)} \\
&= \int_0^b dy \left(\tfrac{1}{2}a^2(1 - y/b)^2 - 3ya(1 - y/b)\right) dy \\
&= \tfrac{1}{2}a^2 \int_0^b (1 - y/b)^2\,dy - 3a \int_0^b y\,dy + \frac{3a}{b}\int_0^b y^2\,dy \\
&= \tfrac{1}{2}a^2 \left[-\tfrac{1}{3}b(1 - y/b)^3 \right]_0^b - 3a\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^b + \frac{3a}{b}\left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^b \\
&= \tfrac{1}{6}a^2 b - \tfrac{3}{2}ab^2 + ab^2 = \tfrac{1}{6}a^2 b - \tfrac{1}{2}ab^2.
\end{aligned}$$

14.2.10 Beräkna

$$\iint_D x \cos y\,dA,$$

där D är det ändliga område i första kvadranten begränsad av koordinataxlarna och kurvan $y = 1 - x^2$.

Vi ritar upp området.



Eftersom D begränsas av kurvan $y = 1 - x^2$ beskrivs området av

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 - x^2.$$

Vårt förstahandsval är därför att integrera i y-led och sedan i x-led.

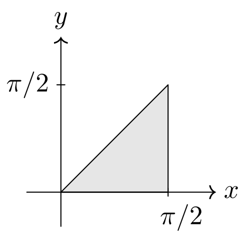
$$\begin{aligned}
&\iint_D x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} x\cos y\,dy = \int_0^1 x\left[\,\sin y\,\right]_0^{1-x^2} dx \\
&= \int_0^1 x\sin(1 - x^2)\,dx = \{\, s = 1 - x^2;\ ds = -2x\,dx \,\} = \int_1^0 -\tfrac{1}{2}\sin s\,ds \\
&= \left[\,\tfrac{1}{2}\cos s\,\right]_1^0 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 1.
\end{aligned}$$

14.2.16 Skissera integrationsområdet och beräkna den itererade integralen

$$\int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Integrationsområdet ges enligt den itererade integralen av

$$0 \le y \le \pi/2, \quad y \le x \le \pi/2.$$



Även om integralen är skriven som att vi först ska integrera i x-led och sedan i y-led, kan vi kasta om integrationsordningen om det beräkningstekniskt gynnar oss. Detta givetvis under förutsättning att integranden är kontinuerlig i hela triangeln.

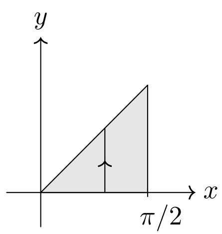
I vårt fall är integranden $\frac{\sin x}{x}$ som verkar svår att integrera i x-led, så vi väljer att kasta om integrationsordningen. Vi måste då skriva om området i formen

$$0 \le x \le \pi/2, \quad g(x) \le y \le h(x),$$

och dessutom kontrollera att integranden är kontinuerlig.

- Omskrivningen av området ger att

$$0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le x.$$



- Den enda punkt där vi inte på förhand kan säga om integranden är kontinuerlig är $(0,0)$. Men i den punkten har vi att

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

så om vi definierar integrandens värde till 1 i origo har vi en kontinuerlig funktion.

Integralen får vi nu till

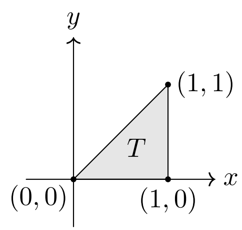
$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{x} \frac{\sin x}{x}\, dy = \int_0^{\pi/2} dx\, \frac{\sin x}{x} \Big[\, y \,\Big]_0^x$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

14.2.14 Beräkna

$$\iint_T \frac{xy}{1+x^4}\, dA,$$

där T är triangeln med hörnpunkter $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

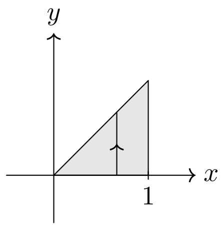
Om vi bara betraktar området T så är det lika enkelt att integrera i x-led som i y-led.



Däremot är integranden jobbigare att integrera i x-led än i y-led.

Strategin som vi ska använda är att först integrera i y-led och sedan hoppas på att resultatet är enklare att integrera i x-led är den nuvarande integranden.

För ett givet x-värde begränsas triangeln i y-led underifrån av $y = 0$ och ovanifrån av $y = x$.



Dubbelintegralen är därför

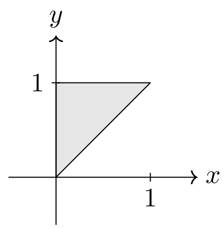
$$\iint_T \frac{xy}{1+x^4}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{xy}{1+x^4}\,dy = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^x\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\cdot\tfrac{1}{2}x^2\,dx = \{\, s = 1+x^4;\ ds = 4x^3\,dx \,\}$$
$$= \tfrac{1}{8}\int_1^2 \frac{ds}{s} = \Big[\tfrac{1}{8}\log|s|\Big]_1^2 = \frac{\log 2}{8}.$$

14.2.20 Bestäm volymen under funktionsytan $z = 1 - x^2$ och ovanför området $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$.

Om vi kallar området i x, y-planet för D så ges volymen under funktionsytan till en positiv funktion $z = f(x, y)$ av

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (*)$$

Om vi ritar upp området D



så ser vi att D helt ligger i det område där $1 - x^2$ är positiv, så vi kan använda $(*)$ utan att behöva beskära D.

I uppgiftstexten är D given i formen

$$0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y,$$

vilket gör det lämpligt att först integrera i x-led.

$$V = \iint_D (1-x^2)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y (1-x^2)\,dx = \int_0^1 dy\,\Big[x - \tfrac{1}{3}x^3\Big]_0^y$$
$$= \int_0^1 \big(y - \tfrac{1}{3}y^3\big)\,dy = \Big[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{12}y^4\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12} = \tfrac{5}{12}.$$

14.2.28 Bestäm volymen innanför cylindern $x^2 + 2y^2 = 8$, ovanför planet $z = y - 4$ och under planet $z = 8 - x$.

Vi ska först försöka föreställa oss den kropp som vi ska bestämma volymen av.

Cylindern skriver vi först i standardform

$$\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1,$$

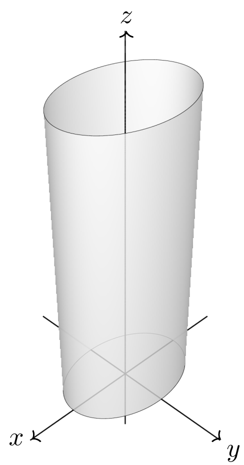
och vi ser att den elliptiska cylindern har halvaxlar $\sqrt{8}$ och 2, och z-axeln som generatris.

De två planen skär cylindern och avgränsar en ändlig del av cylindern. Avståndet i höjdled mellan planen ges av differensen mellan deras z-koordinater,

$$8 - x - (y - 4) = 12 - x - y.$$

Innanför cylindern är detta avstånd positivt vilket vi ser med skattningen

$$12 - x - y \geq 12 - \sqrt{8} - 2 \geq 12 - 8 - 2 = 2 > 0.$$



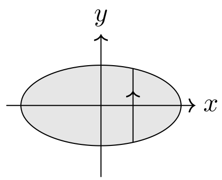
Alltså är det övre planet hela tiden ovanför det undre planet innanför cylindern.

Volymen av kroppen är volymen under det övre planet minus volymen under det undre planet.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (8 - x)\,dx\,dy - \iint_D (y - 4)\,dx\,dy \\ &= \iint_D (12 - x - y)\,dx\,dy, \end{aligned}$$

där D är ellipsen $x^2 + 2y^2 = 8$. Ellipsen kan vi också skriva i formen

$$-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}, \quad -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 - x^2} \leq y \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 - x^2}.$$



Volymintegralen är

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (12 - x - y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}} (12 - x - y)\,dy \\ &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} dx \left[(12 - x)y - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}} \\ &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt{2}\,(12 - x)\sqrt{8 - x^2}\,dx = 12\sqrt{2} \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt{8 - x^2}\,dx + \sqrt{2} \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} -x\sqrt{8 - x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Den första integralen är areaintegralen av en halvcirkel med radie $\sqrt{8}$ och har därför värdet $12\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\pi(\sqrt{8}\,)^2 = 48\sqrt{2}\,\pi$. I den andra integralen ser vi att integranden är udda, och eftersom integrationsområdet är origosymmetriskt är integralen noll.

Vi har alltså att

$$V = 48\sqrt{2}\,\pi.$$

14.3.2 Bestäm om integralen

$$\iint_Q \frac{dx\,dy}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

konvergerar, där Q är första kvadranten i x, y-planet.

Integranden är en positiv funktion och integralen konvergerar omm en av dess itererade varianter konvergerar.

Första kvadranten kan skrivas

$$0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty.$$

En av de itererade integralerna får vi till

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}$$
$$= \left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\right)^2 = \left(\Big[\arctan x\Big]_0^\infty\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi^2 < \infty.$$

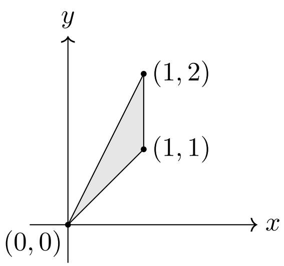
Alltså är integralen i uppgiftstexten konvergent med värdet $\pi^2/4$.

14.3.4 Bestäm om integralen

$$\iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}}\,dA$$

över triangeln T med hörnpunkter $(0,0)$, $(1,1)$ och $(1,2)$ är konvergent.

Vi ritar upp triangeln T.



Eftersom triangeln bara innehåller punkter med positiva x-koordinater är integranden positiv och integralen konvergent omm en av dess itererade integraler konvergerar.

I y-led är området begränsat av de två räta linjerna $y = x$ och $y = 2x$, varför triangeln kan beskrivas som

$$0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2x.$$

Integration först i y-led ger

$$\int_0^1 dx \int_x^{2x} \frac{dy}{x\sqrt{y}} = \int_0^1 dx\, \frac{1}{x}\Big[2\sqrt{y}\Big]_x^{2x}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x}(2\sqrt{2}-2)\sqrt{x}\,dx = (2\sqrt{2}-2)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= (2\sqrt{2}-2)\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 4(\sqrt{2}-1) < \infty.$$

Alltså är integralen i uppgiftstexten konvergent.

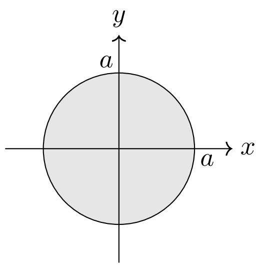
Lektion 11, Flervariabelanalys den 9 februari 2000

14.4.2 Beräkna integralen

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

där D är disken $x^2+y^2 \le a^2$ och $a>0$.

Vi ritar upp disken D.



Vi kan ganska enkelt beskriva området med polära koordinater,

$$0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Om vi därför gör ett byte till polära koordinater övergår areaelementet $dx\,dy$ till $r\,dr\,d\theta$ och uttrycket $\sqrt{x^2+y^2}$ till

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = |r|\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = |r|.$$

Dubbelintegralen blir

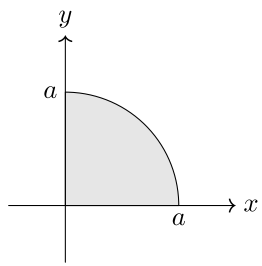
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_D r\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2\,dr$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_0^a = \tfrac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi} d\theta = \tfrac{2}{3}\pi a^3.$$

14.4.10 Beräkna integralen

$$\iint_Q \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dA,$$

där Q är kvartsdisken $x \ge 0$, $y \ge 0$ och $x^2+y^2 \le a^2$ med $a>0$.

Området Q består av den del av cirkeldisken i första kvadranten.



Eftersom integranden är positiv i området vållar inte den misstänkta singulariteten i origo några beräkningstekniska problem eftersom integralen konvergerar om och endast om dess itererade varianter konvergerar.

Området beskriver vi enklast med polära koordinater

$$0 \le \theta \le \pi/2, \quad 0 \le r \le a.$$

Ett byte till polära koordinater förändrar areaelementet dA till $r\,dr\,d\theta$ och omvandlar integranden till

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\,r\cos\theta\,r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = 2\cos\theta\,\sin\theta.$$

Dubbelintegralen blir

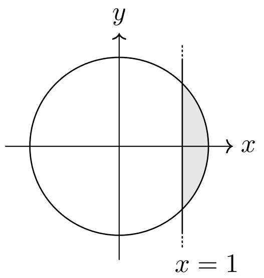
$$\iint_Q \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_Q 2\,\cos\theta\,\sin\theta\;r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^a r\,dr$$
$$= \left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^a = \tfrac{1}{2}a^2.$$

14.4.12 Bestäm

$$\iint_S x\,dA,$$

där S är cirkelsegmentet $x^2+y^2 \le 2$, $x \ge 1$.

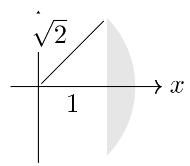
Området består av alla punkter innanför cirkeln med mittpunkt i origo och radie $\sqrt{2}$, och med x-koordinat större än eller lika med 1.



Området har ett visst mått av cirkelform så vi kan försöka oss på att beskriva området med polära koordinater.

Vinkeln θ ska gå mellan

$$-\arccos\tfrac{1}{\sqrt{2}} = -\tfrac{1}{4}\pi$$

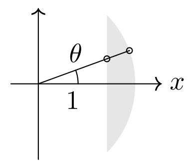


och

$$\arccos\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Radien r har $\sqrt{2}$ som övre gräns och

$$\frac{1}{\cos\theta}$$



som undre gräns.

Området beskrivs alltså i polära koordinater som

$$-\tfrac{1}{4}\pi \le \theta \le \tfrac{1}{4}\pi, \quad \tfrac{1}{\cos\theta} \le r \le \sqrt{2}.$$

Areaelementet är $r\,dr\,d\theta$ och integranden är $x = r\cos\theta$.

Dubbelintegralen blir

$$\begin{aligned}
\iint_S x\,dA &= \iint_S r\cos\theta\; r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta \int_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} r^2\,dr \\
&= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \left[\tfrac{1}{3}r^3\right]_{1/\cos\theta}^{\sqrt{2}} d\theta = \tfrac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\Bigl(2\sqrt{2} - \frac{1}{\cos^3\theta}\Bigr)\,d\theta \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta - \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\Bigl[\sin\theta\Bigr]_{-\pi/4}^{\pi/4} - \frac{1}{3}\Bigl[\tan\theta\Bigr]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot 2 = 2/3.
\end{aligned}$$

Anm. I detta fall är det inte ”självklart” att vi ska använda polära koordinater. I kartesiska koordinater kan området skrivas

$$1 \le x \le \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2},$$

och integralen blir

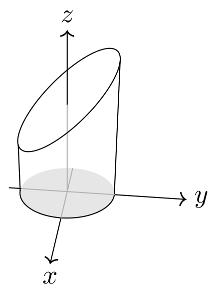
$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{2}} x\,dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy &= \{\, s = 2-x^2;\ ds = -2x\,dx \,\} \\
&= -\int_1^0 \sqrt{s}\,ds = \Bigl[\tfrac{2}{3}\,s\sqrt{s}\Bigr]_0^1 = \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}$$

14.4.24 Bestäm volymen av det område som ligger ovanför x,y-planet, innanför cylindern $x^2+y^2=4$ och under planet $z = x+y+4$.

Innanför cylindern, som har radie 2, uppfyller planets z-koordinat

$$z = x+y+4 \ge -2-2+4 = 0$$

och är alltså ovanför x, y-planet. Vi har därmed följande principskiss.



Området kan alltså beskrivas som under funktionsytan $z = x+y+4$ och innanför disken $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

Volymen ges av den välkända formeln

$$V = \iint_D (x + y + 4)\, dx\, dy.$$

Eftersom området är cirkelsymmetriskt beskrivs det enklast med polära koordinater

$$0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2.$$

Volymintegralen är

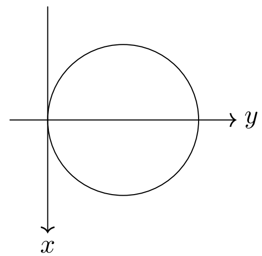
$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x + y + 4)\, dx\, dy = \{\, \text{polära koordinater} \,\} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r\cos\theta + r\sin\theta + 4)\ r\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\, \tfrac{1}{3} r^3 \cos\theta + \tfrac{1}{3} r^3 \sin\theta + 2r^2 \,\right]_0^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{8}{3}\cos\theta + \tfrac{8}{3}\sin\theta + 8 \right) d\theta \\ &= \{\, \text{integral av cos eller sin över en hel period} = 0 \,\} \\ &= \left[\, 8\theta \,\right]_0^{2\pi} = 16\pi. \end{aligned}$$

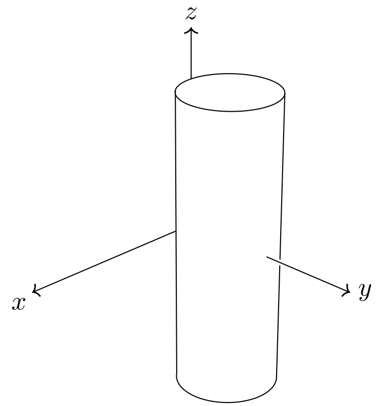
14.4.26 Bestäm volymen av området innanför den cirkulära cylindern $x^2 + y^2 = 2y$ och innanför den paraboliska cylindern $z^2 = y$.

Vi skriver först den cirkulära cylindern i standardform. Kvadratkomplettering i y ger

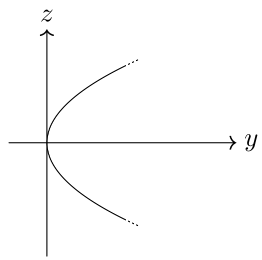
$$0 = x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y-1)^2 - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

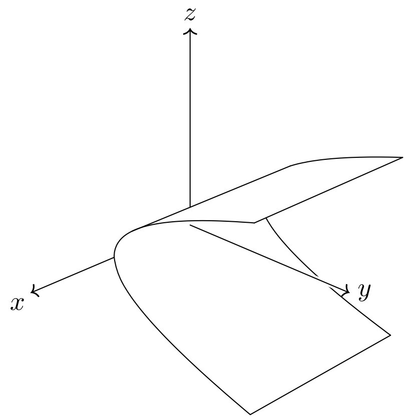
Den cirkulära cylindern har alltså mittpunkt i $(x, y) = (0, 1)$ och radie 1.





Den paraboliska cylindern är en parabel i y, z-planet.

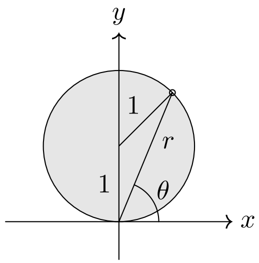




Området är alltså alla punkter innanför cirkeln $x^2 + (y-1)^2 = 1$ och mellan de två grenarna $z = -\sqrt{y}$ och $z = \sqrt{y}$. Volymen ges av integralen

$$V = \iint_D \bigl(\sqrt{y} - (-\sqrt{y})\bigr)\,dx\,dy = 2\iint_D \sqrt{y}\;dx\,dy.$$

Eftersom området är cirkulärt inför vi polära koordinater. Vinkeln θ ska gå mellan 0 och π.



Radien r har 0 som undre gräns, och cosinussatsen ger att den övre gränsen uppfyller

$$1^2 = 1^2 + r^2 - 2r\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad r = 2\cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = 2\sin\theta.$$

Området kan alltså beskrivas som

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le r \le 2\sin\theta.$$

Volymintegralen blir

$$\begin{aligned}
V &= 2\iint_D \sqrt{y}\;dx\,dy = \{\,\text{polära koordinater}\,\}\\
&= 2\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} \sqrt{r\sin\theta}\;r\,dr = 2\int_0^\pi \sqrt{\sin\theta}\,\Bigl[\,\tfrac{2}{5}r^2\sqrt{r}\,\Bigr]_0^{2\sin\theta} d\theta\\
&= 2\int_0^\pi \sqrt{\sin\theta}\cdot\tfrac{2}{5}\,4\sin^2\theta\sqrt{2}\,\sqrt{\sin\theta}\,d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta\\
&= \frac{16\sqrt{2}}{5}\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\Bigl[-\cos\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta\Bigr]_0^\pi\\
&= \frac{16\sqrt{2}}{5}\Bigl(1 - \tfrac{1}{3} - \bigl(-1 + \tfrac{1}{3}\bigr)\Bigr) = \frac{64\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Anm. Om vi bara sett till att förenkla området skulle vi infört polära koordinater centrerade kring $(0,1)$,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta,\\ y &= 1 + r\sin\theta, \end{aligned}$$

vilket hade givit

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1.$$

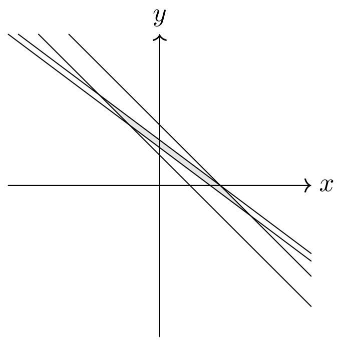
Men då hade integranden blivit jobbigare, så det är tveksamt om detta varit bättre. Det är alltid en balans mellan att förenkla integrationsområdet och att se till integrandens analytiska form, även om förenkling av integrationsområdet ofta väger tyngre.

14.4.32 Bestäm

$$\iint_P (x^2 + y^2)\,dA$$

där P är parallellogrammet som begränsas av de räta linjerna $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x + 4y = 5$ och $3x + 4y = 6$.

Vi ritar upp området P.



Området förenklas om vi väljer ett nytt koordinatsystem med områdets begränsningslinjer som koordinatlinjer,

$$\begin{aligned} u &= x + y, \\ v &= 3x + 4y. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Detta linjära koordinatbyte är 1:1 eftersom determinanten av basbytesmatrisen är

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0.$$

I detta nya koordinatsystem beskrivs området P som $1 \le u \le 2,\ 5 \le v \le 6$. Vid övergången till (u,v)-planet ändras areaelementet till

$$dx\,dy = \left|\det\Bigl(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Bigr)\right| du\,dv = \text{belopp} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv.$$

Från $(*)$ kan vi uttrycka x och y i u och v,

$$\begin{aligned} x &= 4u - v \\ y &= -3u + v \end{aligned}$$

och får

$$dx\,dy = \text{belopp} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} du\,dv = du\,dv.$$

Integralen blir

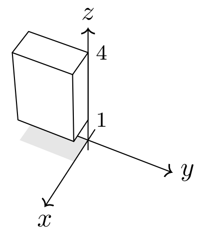
$$\begin{aligned} \iint_P (x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_1^2 du \int_5^6 \bigl((4u-v)^2 + (-3u+v)^2\bigr)\,dv \\ &= \int_1^2 du \int_5^6 \bigl(25u^2 - 14uv + 2v^2\bigr)\,dv \\ &= \int_1^2 du \Bigl[\,25u^2v - 7uv^2 + \tfrac{2}{3}v^3\,\Bigr]_{v=5}^{v=6} \\ &= \int_1^2 \Bigl(150u^2 - 252u + 144 - \bigl(125u^2 - 175u + \tfrac{250}{3}\bigr)\Bigr)\,du \\ &= \int_1^2 \bigl(25u^2 - 77u + \tfrac{182}{3}\bigr)\,du \\ &= \Bigl[\,\tfrac{25}{3}u^3 - \tfrac{77}{2}u^2 + \tfrac{182}{3}u\,\Bigr]_1^2 \\ &= \tfrac{200}{3} - 154 + \tfrac{364}{3} - \bigl(\tfrac{25}{3} - \tfrac{77}{2} + \tfrac{182}{3}\bigr) = \tfrac{7}{2}. \end{aligned}$$

14.5.2 Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_B xyz\,dV,$$

där B är rätblocket $0 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 0,\ 1 \le z \le 4$.

Vi ritar upp rätblocket B.



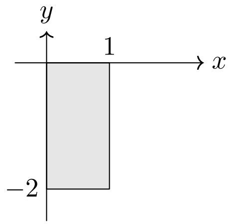
Området kan vi se som bestående av alla punkter (x,y,z) med x,y-koordinat innanför rektangeln $D : 0 \le x \le 1, -2 \le y \le 0$ och z-koordinat mellan funktionsytorna $z = 1$ och $z = 4$.

Med iterationsformeln har vi

$$\begin{aligned} \iiint_B xyz\,dV &= \iint_D dx\,dy \int_1^4 xyz\,dz \\ &= \iint_D dx\,dy\; xy \Bigl[\,\tfrac{1}{2}z^2\,\Bigr]_1^4 = \frac{15}{2} \iint_D xy\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Området D kan i sin tur beskrivas som området mellan funktionskurvorna $y = -2$ och $y = 0$.

$$0 \le x \le 1, \;\; -2 \le y \le 0$$



Vi får med iterationsformeln

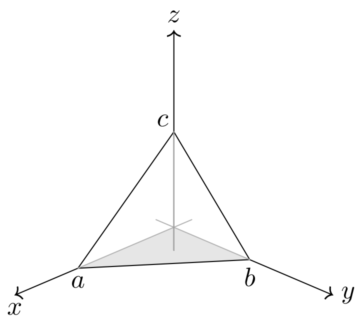
$$\begin{aligned}\frac{15}{2}\iint_D xy\,dx\,dy &= \frac{15}{2}\int_0^1 dx \int_{-1}^0 xy\,dy \\ &= \frac{15}{2}\int_0^1 dx\,\Big[\,\tfrac{1}{2}y^2\,\Big]_{-2}^0 = -15\int_0^1 x\,dx = -15/2.\end{aligned}$$

14.5.4 Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_R x\,dV,$$

där R är tetraedern som begränsas av koordinatplanen och planet $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Planet $x/a + y/b + z/c = 1$ skär koordinataxlarna i punkterna $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ och $(0, 0, c)$ varför tetraedern har utseendet

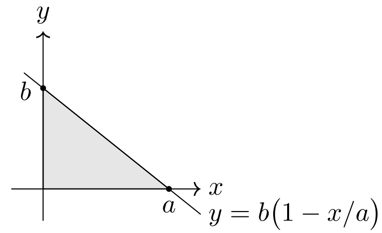


Vi kan beskriva området som alla punkter (x, y, z) med x, y-koordinater innanför bastriangeln T i x, y-planet och z-koordinat mellan funktionsytorna $z = 0$ och $z = c(1 - x/a - y/b)$. Iterationsformeln ger

$$\begin{aligned}\iiint_R x\,dV &= \iint_T x\,dx\,dy \int_0^{c(1-x/a-y/b)} dz \\ &= c\iint_T x(1 - x/a - y/b)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Triangeln T kan beskrivas som området mellan funktionskurvorna $y = 0$ och $y = b(1 - x/a)$.

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b(1 - x/a)$$



Vi får

$$\begin{aligned}c\iint_T x\Big(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\,dx\,dy &= c\int_0^a x\,dx \int_0^{b(1-x/a)} \Big(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\,dy \\ &= c\int_0^a x\,dx\,\Big[\,\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)y - \frac{1}{2b}y^2\,\Big]_0^{b(1-x/a)} \\ &= c\int_0^a x\Big(b\big(1 - x/a\big)^2 - \tfrac{1}{2}b\big(1 - x/a\big)^2\Big)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}bc\int_0^a x\big(1 - x/a\big)^2\,dx = \tfrac{1}{2}bc\int_0^a \big(x - \tfrac{2}{a}x^2 + \tfrac{1}{a^2}x^3\big)\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}bc\,\Big[\,\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3a}x^3 - \tfrac{1}{4a^2}x^4\,\Big]_0^a = \tfrac{1}{2}bc\Big(\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{2}{3}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2\Big) = \tfrac{1}{24}a^2bc.\end{aligned}$$

14.5.10 Beräkna trippelintegralen

$$\iiint_R y\,dV,$$

där R är den del av kuben $0 \le x, y, z \le 1$ som ligger ovanför planet $y + z = 1$ och under planet $x + y + z = 2$.

Området R består av alla punkter (x, y, z) som uppfyller olikheterna

$$\begin{aligned} 0 \le x &\le 1, & (1)\\ 0 \le y &\le 1, & (2)\\ 0 \le z &\le 1, & (3)\\ y + z &\ge 1, & (4)\\ x + y + z &\le 2. & (5) \end{aligned}$$

Istället för att försöka rita upp det ganska komplicerade området R ska vi skriva om (1) till (6) till en form som vi direkt kan använda i en itererad variant av trippelintegralen.

Från (3) får vi olikheten

$$0 \le z \le 1. \tag{6}$$

Olikhet (2) och (4) ger

$$0 \le y \le 1 - z. \tag{7}$$

Olikhet (1) och (5) ger

$$0 \le x \le 2 - y - z. \tag{8}$$

Vi har därmed visat att

$$\left\{ \begin{aligned} 0 \le x &\le 1,\\ 0 \le y &\le 1,\\ 0 \le z &\le 1,\\ y + z &\ge 1,\\ x + y + z &\le 2, \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} &0 \le z \le 1,\\ &0 \le y \le 1 - z,\\ &0 \le x \le 2 - y - z. \end{aligned} \right.$$

För att (6) till (8) ska beskriva samma område som (1) till (5) måste vi också visa den omvända implikationen, d.v.s. att (6), (7) och (8) medför olikheterna (1) till (5).

(3): följer direkt av (6),

(4): följer direkt av (7),

(5): följer direkt av (8),

(2): $y \le 1$: följer av (7),
$y \ge 0$: (7) och (6) ger $y \ge 1 - z \ge 1 - 1 = 0$,

(1): $x \le 1$: (8) och (4) ger $x \le 2 - y - z = 2 - (y + z) \le 2 - 1 = 1$,
$x \ge 0$: följer av (8).

Trippelintegralen är

$$\begin{aligned} \iiint_R y\,dV &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y\,dy \int_0^{2-y-z} dx = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y\,dy \Big[\, x \,\Big]_0^{2-y-z}\\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} y(2 - y - z)\,dy = \int_0^1 dz \Big[\, y^2 - \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2 z \,\Big]_0^{1-z}\\ &= \int_0^1 \Big((1-z)^2 - \tfrac{1}{3}(1-z)^3 - \tfrac{1}{2}z(1-z)^2 \Big)\,dz = \int_0^1 (1-z)^2(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6}z)\,dz\\ &= \tfrac{1}{6}\int_0^1 (1 - 2z + z^2)(4 - z)\,dz = \tfrac{1}{6}\int_0^1 \big(4 - 9z + 6z^2 - z^3\big)\,dz\\ &= \tfrac{1}{6}\Big[\, 4z - \tfrac{9}{2}z^2 + 2z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \,\Big]_0^1 = \tfrac{5}{24}. \end{aligned}$$

Lektion 12, Flervariabelanalys den 10 februari 2000

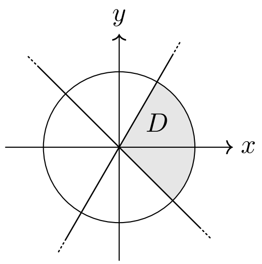
14.6.20 Bestäm volymen av området ovanför x, y-planet, under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och i kilen $-x \leq y \leq \sqrt{3}\,x$.

Paraboloiden är ovanför x, y-planet när

$$z = 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \leq 1,$$

d.v.s. innanför enhetscirkeln.

De punkter som tillhör området har alltså x- och y-koordinat i snittet mellan enhetsdisken och kilen $-x \leq y \leq \sqrt{3}\,x$.



I z-led begränsas området av funktionsytorna $z = 0$ och $z = 1 - x^2 - y^2$. Volymen ges av

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

I polära koordinater beskrivs området D i x, y-planet som

$$-\tfrac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \arctan\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}\pi, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

och volymintegralen blir

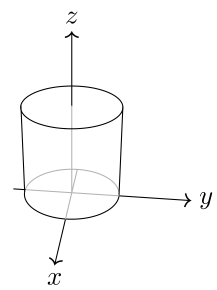
$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \left[\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \tfrac{7}{48}\pi. \end{aligned}$$

14.6.24 Beräkna

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

där R är cylindern $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$.

Enligt den första olikheten $0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ är cylindern parallell med z-axeln och med x- och y-koordinater innanför cirkeln med mittpunkt i origo och radie a. Den andra olikheten $0 \leq z \leq h$ begränsar cylindern i höjdled.



Eftersom området är rotationssymmetriskt kring z-axeln beskrivs det enklast med cylindriska koordinater

$$0 \leq z \leq h, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq r \leq a.$$

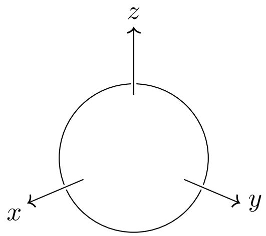
Integralen blir

$$\begin{aligned} &\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \{\,\text{cylindriska koordinater}\,\} \\ &\quad = \iiint_R (r^2 + z^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^a (r^2 + z^2) r\,dr \\ &\quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \left[\tfrac{1}{4}r^4 + \tfrac{1}{2}z^2 r^2\right]_0^a = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \left(\tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}a^2 z^2\right) dz \\ &\quad = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\tfrac{1}{4}a^4 z + \tfrac{1}{6}a^2 z^3\right]_0^h = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4}a^4 h + \tfrac{1}{6}a^2 h^3\right) d\theta \\ &\quad = \tfrac{1}{6}\pi a^2 h (3a^2 + 2h^2). \end{aligned}$$

14.6.26 Bestäm

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$$

där B är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.



Eftersom klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ är helt rotationssymmetriskt inför vi sfäriska koordinater. I dessa koordinater beskrivs klotet som

$$0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Integralen blir

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \left\{ \begin{array}{l|l} x = r\sin\varphi\cos\theta & \\ y = r\sin\varphi\sin\theta & dV = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta \\ z = r\cos\varphi & \end{array} \right\}$$

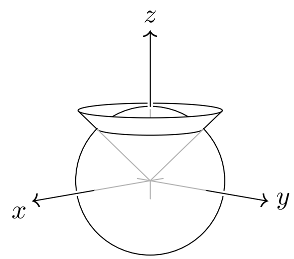
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^a r^4\, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{5} a^5 = \tfrac{4}{5}\pi a^5.$$

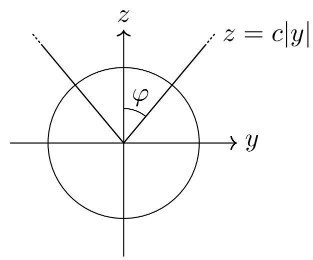
14.6.28 Beräkna

$$\iiint_R (x^2 + y^2)\, dV$$

där R är området ovanför konen $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ och innanför sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Funktionsytan $z = c\sqrt{x^2 + y^2}$ är en kon med spets i origo och z-axeln som symmetriaxel. Området R har alltså följande utseende.





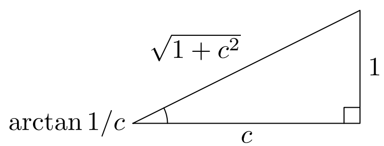
Vi beskriver området enklast med sfäriska koordinater

$$0 \le \varphi \le \arctan\frac{1}{c}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Integralen blir

$$\begin{aligned}
&\iiint_V (x^2 + y^2)\, dV = \{\,\text{sfäriska koordinater}\,\} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arctan 1/c} \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^a r^4\, dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arctan 1/c} (1 - \cos^2\varphi)\sin\varphi\; d\varphi \int_0^a r^4\, dr \\
&= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[-\cos\varphi + \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_0^{\arctan 1/c} \cdot \Big[\,\tfrac{1}{5} r^5\Big]_0^a \\
&= 2\pi\Big(-\cos\arctan 1/c + \tfrac{1}{3}\cos^3\arctan 1/c - \big(-1 + \tfrac{1}{3}\big)\Big) \cdot \tfrac{1}{5} a^5
\end{aligned}$$

För att förenkla $\cos\arctan 1/c$ ritar vi en hjälptriangel.



$$\cos\arctan 1/c = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}$$

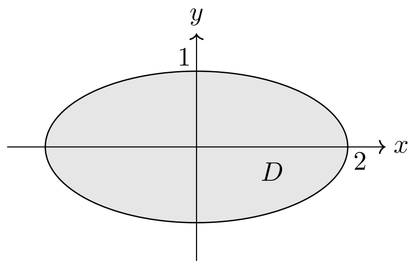
$$= \frac{2\pi a^5}{5}\Big(-\frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} + \frac{\frac{1}{3}c^3}{(1 + c^2)^{3/2}} + 2/3\Big).$$

14.7.2 Bestäm arean av ytan till planet $5z = 3x - 4y$ innanför den elliptiska cylindern $x^2 + 4y^2 = 4$.

Vi ska alltså bestämma arean av funktionsytan $z = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$ i området

$$x^2 + 4y^2 \le 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + y^2 \le 1.$$

Området består alltså av en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 2 och 1.



För att beskriva området inför vi omskalade polära koordinater

$$x = 2r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

och området ges då av

$$0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le r \le 1.$$

Areaelementet $dx\,dy$ övergår till

$$dx\,dy = \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dr\,d\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta$$
$$= \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta = (2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta)\,dr\,d\theta = 2r\,dr\,d\theta.$$

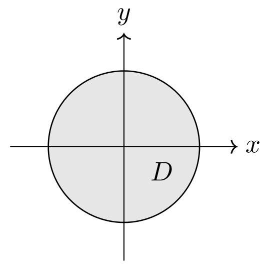
Areaintegralen blir

$$\iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 + \big(\tfrac{3}{5}\big)^2 + \big(-\tfrac{4}{5}\big)^2}\,dx\,dy$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r\,dr = \sqrt{2}\cdot 2\pi \Big[\,r^2\,\Big]_0^1 = 2\sqrt{2}\,\pi.$$

14.7.4 Bestäm arean av halvellipsytan $z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Funktionen har definitionsområdet

$$1 - x^2 - y^2 \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \le 1,$$



d.v.s. enhetsdisken.

Integranden till areaintegralen är

$$\sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \Big(\frac{2}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\cdot(-2x)\Big)^2 + \Big(\frac{2}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\cdot(-2y)\Big)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{4x^2+4y^2}{1-x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}.$$

"Den rikliga förekomsten av uttrycket $x^2 + y^2$ antyder att införandet av polära koordinater kan förenkla räknearbetet." [Leo Ullemar, 1972]

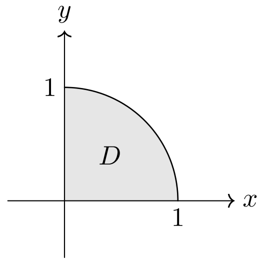
Areaintegralen blir

$$\iint_D \sqrt{\frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \{\,\text{polära koordinater}\,\}$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1+3r^2}{1-r^2}}\,r\,dr = \Big\{\, s = \sqrt{1-r^2};\ ds = \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \,\Big\}$$
$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{4-3s^2}\,ds = 4\pi\int_0^1 \sqrt{1-\tfrac{3}{4}s^2}\,ds$$
$$= \Big\{\, s = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi;\ ds = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi\,d\varphi \,\Big\}$$
$$= \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/3} |\cos\varphi|\,\cos\varphi\,d\varphi = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\Big[\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\,\Big]_0^{\pi/3}$$
$$= \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\Big) = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} + \pi.$$

14.7.6 Bestäm arean av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ i första oktanten.

Första oktanten definieras som $x, y, z \geq 0$. Den del av paraboloidens yta som tillhör första oktanten bestäms alltså av alla x och y s.a.

$$\begin{aligned} & x, y \geq 0 \quad \text{och} \quad 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x, y \geq 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 \leq 1. \end{aligned}$$



Arean ges av

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dx\, dy \\ & = \{\, \text{polära koordinater} \,\} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr \\ & = \{\, s = 1 + 4r^2;\ ds = 8r\, dr \,\} = \tfrac{1}{8} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^5 \sqrt{s}\, ds \\ & = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2}\pi \cdot \left[\, \tfrac{2}{3} s\sqrt{s} \,\right]_1^5 = \tfrac{1}{24}\pi(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

14.7.8 Bestäm arean av ytan $z = \sqrt{x}$ ovanför området $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Funktionen $z = \sqrt{x}$ är alltid icke-negativ och befinner sig därför alltid ovanför x, y-planet.

Arean av funktionsytan inom området ges av

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 0^2}\, dx\, dy \\ & = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\, dx \\ & = \left[\, \tfrac{2}{3}(x + \tfrac{1}{4})^{3/2} \,\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{5}{4}\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{3/2} = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}. \end{aligned}$$

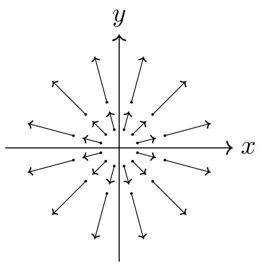
Lektion 13, Flervariabelanalys den 15 februari 2000

15.1.2 Skissera vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$$

och bestäm dess fältlinjer.

I varje punkt (x,y) har vektorfältet en vektor med komponenter (x,y), d.v.s. vektorn utgående från punkten är lika med punktens ortsvektor.



En kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ är en fältlinje till vektorfältet om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big).$$

Detta villkor kan vi t.ex. formulera som

$$\begin{vmatrix} \text{---}\ \dot{\boldsymbol{r}}(t)\ \text{---} \\ -\ \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\ - \end{vmatrix} = 0,$$

där

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big), \\ \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \big(x(t), y(t)\big). \end{aligned}$$

Determinantvillkoret blir alltså

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ x(t) & y(t) \end{vmatrix} = \dot{x}y - x\dot{y} = 0. \qquad (\dagger)$$

Om vi antar att $x, y \neq 0$ då kan $(\dagger)$ skrivas

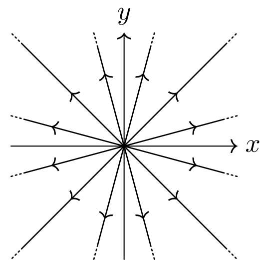
$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}.$$

Integration m.a.p. t av båda led ger

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\,dt = \Big[\log|x(t)|\Big]_0^t = \log|x(t)| - \log|x(0)| = \log\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right| \\ \text{HL} &= \int_0^t \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\,dt = \Big[\log|y(t)|\Big]_0^t = \log|y(t)| - \log|y(0)| = \log\left|\frac{y(t)}{y(0)}\right| \\ \Leftrightarrow \quad y(t) &= \pm\frac{y(0)}{x(0)}\,x(t). \end{aligned}$$

Minustecknet kan förkastas eftersom $y(0) = +y(0)$ $(\neq 0)$.

Fältlinjerna är alltså räta linjer som går genom origo.



Om $x = 0$ eller $y = 0$ ger $(\dagger)$ att $\dot{x} = 0$ respektive $\dot{y} = 0$, vilket ger fältlinjer längs y-axeln respektive x-axeln.

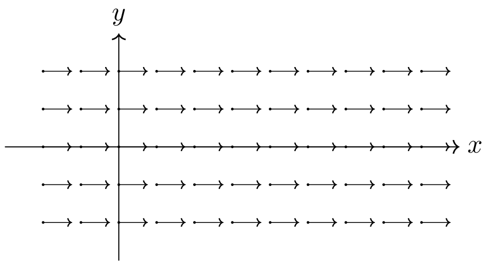
Om $x = 0$ och $y = 0$ befinner vi oss i en singulär punkt där vektorfältet har en nollvektor.

15.1.4 Skissera vektorfältet

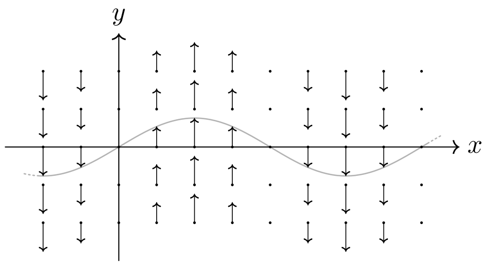
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{e}_x + \sin x \, \boldsymbol{e}_y$$

och bestäm dess fältlinjer.

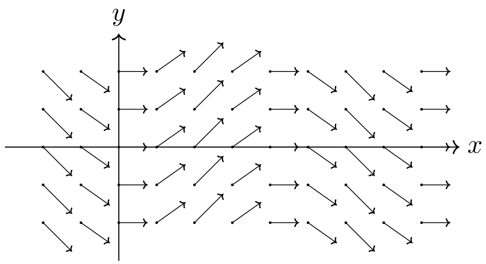
I varje punkt har vektorfältet x-komponenten 1.



Vektorfältets y-komponent har beroendet $\sin x$.



Sammanlagt har vektorfältet utseendet



En kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ är en fältlinje om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big),$$

d.v.s. om

$$\begin{vmatrix} — \dot{\boldsymbol{r}}(t) — \\ - \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ 1 & \sin x(t) \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{y} = \dot{x} \, \sin x.$$

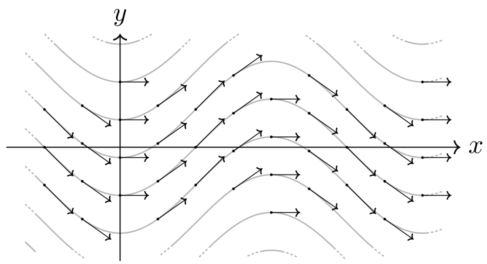
Vi integrerar båda led

$$\text{VL} = \int_0^t \dot{y}(t)\,dt = y(t) - y(0),$$

$$\text{HL} = \int_0^t \dot{x}(t) \sin x(t)\,dt = \Big[-\cos x(t) \Big]_0^t = -\cos x(t) + \cos x(0).$$

Alltså är fältlinjerna i formen

$$y = -\cos x + C.$$



15.1.10 Beskriv fältlinjerna till hastighetsfältet

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y - x\boldsymbol{e}_z.$$

En kurva $\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ är en fältlinje om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(t)\big).$$

Detta villkor kan formuleras som

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \lambda(t)\,\boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \\
\Leftrightarrow\quad &\dot{x}(t) = \lambda(t)\,x(t) \qquad (1)\\
&\dot{y}(t) = \lambda(t)\,y(t) \qquad (2)\\
&\dot{z}(t) = \lambda(t)\,z(t) \qquad (3)
\end{aligned}$$

för någon skalärfunktion $\lambda(t)$. (1) och (3) ger att

$$\dot{z}(t) = -\lambda(t)\,x(t) = -\dot{x}(t)$$

som efter integrering ger

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \int_0^t \dot{z}(t)\,dt = z(t) - z(0),\\
\text{HL} &= \int_0^t -\dot{x}(t)\,dt = -x(t) + x(0),\\
\Leftrightarrow\quad & z(t) = -x(t) + x(0) + z(0).
\end{aligned}$$

Ekvation (1) och (2) kan skrivas om till

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}.$$

Integrering av båda led ger

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\,dt = \Big[\log|x(t)|\Big]_0^t = \log\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right|\\
\text{HL} &= \int_0^t \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\,dt = \Big[\log|y(t)|\Big]_0^t = \log\left|\frac{y(t)}{y(0)}\right|\\
\Leftrightarrow\quad & y(t) = \pm\frac{y(0)}{x(0)}\,x(t).
\end{aligned}$$

Stoppar vi in $t=0$ i formeln för $y(t)$ fås $y(0) = \pm y(0)$ och därför måste minustecknet förkastas. Alltså ges fältlinjerna av kurvskaran

$$\begin{aligned}
y &= C_1\,x,\\
z &= -x + C_2.
\end{aligned}$$

15.2.2 Undersök om vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y + z^2\boldsymbol{e}_z$$

är konservativt, och bestäm i sådant fall potentialen.

Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt om det finns en potential Φ s.a.

$$\nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) = \boldsymbol{F}(x,y,z) = (y, x, z^2). \qquad (*)$$

Ett nödvändigt villkor för att en potential Φ ska existera är att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ har en symmetrisk Jakobian. Vi har

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

som är symmetrisk. Vektorfältet kan alltså möjligtvis vara konservativt.

Integrerar vi upp $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ och $\partial\Phi/\partial z$ i $(*)$ fås

$$\begin{aligned}
\Phi &= xy + C_1(y,z),\\
\Phi &= xy + C_2(x,z),\\
\Phi &= \tfrac{1}{3}z^3 + C_3(x,y).
\end{aligned}$$

Dessa samband tillsammans visar att

$$\Phi = xy + \tfrac{1}{3}z^3$$

är en potential till $\boldsymbol{F}$ som därmed är konservativ.

15.2.4 Undersök om vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{e}_y$$

är konservativt, och bestäm i sådant fall potentialen.

Det första testet vi ska utföra är att undersöka om vektorfältets Jakobian är symmetrisk. Uttryckt i $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ blir detta villkor

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

som i vårt fall blir

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\text{HL} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Vektorfältet klarade alltså testet. En potential Φ till $\boldsymbol{F}$ ska uppfylla

$$\nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big) = \boldsymbol{F}(x,y) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\Big)$$

och i komponentform

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Vi integrerar upp (1) med avseende på x,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \{\, s = x^2+y^2;\ ds = 2x\,dx \,\}\\
&= \tfrac{1}{2}\int \frac{ds}{s} = \tfrac{1}{2}\log|s| + C(y) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C(y).
\end{aligned}$$

Detta insatt i (2) ger

$$\begin{aligned}
\text{VL av (2)} &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+y^2}\cdot 2y + C'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(y)\\
\text{HL av (2)} &= \frac{y}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

vilket ger $C'(y) = 0$, d.v.s. $C =$ konstant som vi kan välja till 0. En potential är alltså

$$\Phi(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Notera att eftersom vektorfältet inte är definierat i origo är $\boldsymbol{F}$ konservativt överallt utom i origo.

15.2.6 Undersök om vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}(xz\boldsymbol{e}_x + yz\boldsymbol{e}_y + xy\boldsymbol{e}_z)$$

är konservativt, och bestäm i sådant fall potentialen.

Ett nödvändigt villkor för att $\boldsymbol{F}$ ska vara konservativ är att dess Jakobian

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

är symmetrisk, d.v.s. att följande samband är uppfyllda

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}. \tag{3}$$

Vi kontrollerar,

$$\begin{aligned}
\text{VL av } (1) &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(xz\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = xz\, e^{x^2+y^2+z^2} 2y,\\
\text{HL av } (1) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(yz\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = yz\, e^{x^2+y^2+z^2} 2x,\\
\text{VL av } (2) &= \frac{\partial}{\partial z}\Big(xz\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = (x+2xz^2)e^{x^2+y^2+z^2},\\
\text{HL av } (2) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(xy\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = (y+2x^2y)e^{x^2+y^2+z^2},
\end{aligned}$$

vilket visar att $\boldsymbol{F}$ inte är konservativ.

15.2.10 Visa att vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{2x}{z}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{2y}{z}\,\boldsymbol{e}_y + \Big(1-\frac{x^2+y^2}{z^2}\Big)\,\boldsymbol{e}_z$$

är konservativt och bestäm dess potential.

Beskriv ekvipotentialytorna och bestäm fältlinjerna till $\boldsymbol{F}$.

Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt om det finns en potential Φ s.a.

$$\nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) = \boldsymbol{F},$$

d.v.s.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{2x}{z},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{2y}{z}\quad \text{och}\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 1-\frac{x^2+y^2}{z^2}. \qquad (1),(2),(3)$$

Vi integrerar upp (1) med avseende på x,

$$\Phi = \int \frac{2x}{z}\,dx = \frac{x^2}{z} + C_1(y,z).$$

Detta insatt i (2) ger

$$0 + \frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{2y}{z}$$

som efter integrering m.a.p. y ger

$$C_1(y,z) = \int \frac{2y}{z}\,dy = \frac{y^2}{z} + C_2(z),$$

d.v.s. $\Phi = \dfrac{x^2}{z} + \dfrac{y^2}{z} + C_2(z)$. Stoppar vi slutligen in detta i (3) fås

$$\begin{aligned}
&C_2'(z) - \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad C_2'(z) = 1\\
\Leftrightarrow \qquad &C_2(z) = z + C_3.
\end{aligned}$$

En potential till $\boldsymbol{F}$ är alltså (C_3 vald till 0)

$$\Phi = \frac{x^2+y^2}{z} + z.$$

Ekvipotentialytorna ges av alla punkter (x,y,z) som uppfyller

$$\Phi(x,y,z) = C$$

för ett fixt C, d.v.s.

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+y^2}{z} + z = C \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2+z^2 = Cz\\
\Leftrightarrow \qquad &x^2+y^2+(z-C/2)^2 = (C/2)^2.
\end{aligned}$$

Ekvipotentialytorna är alltså sfäriska skal med mittpunkt i $(0,0,C/2)$ och radie $C/2$.

En fältlinje $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t),y(t),z(t)\big)$ uppfyller villkoret

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$$

som vi kan formulera som determinantvillkoret

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

för alla vektorer (a,b,c). Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a\begin{vmatrix} \dot y & \dot z \\ \dfrac{2y}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} \dot x & \dot z \\ \dfrac{2x}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \dot x & \dot y \\ \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom detta ska gälla för alla val av a, b och c måste de tre minorerna vara noll.

$$\begin{vmatrix} \dot y & \dot z \\ \dfrac{2y}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \end{vmatrix} = \dot y\Bigl(1-\frac{x^2+y^2}{z^2}\Bigr) - \frac{2y\dot z}{z} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dot x & \dot z \\ \dfrac{2x}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2} \end{vmatrix} = \dot x\Bigl(1-\frac{x^2+y^2}{z^2}\Bigr) - \frac{2x\dot z}{z} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \dot x & \dot y \\ \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} \end{vmatrix} = \frac{2\dot x y}{z} - \frac{2x\dot y}{z} = 0,$$

som efter förenkling ger ekvationerna

$$\dot y(z^2-x^2-y^2) - 2yz\dot z = 0 \tag{1}$$
$$\dot x(z^2-x^2-y^2) - 2xz\dot z = 0 \tag{2}$$
$$\dot x y - x\dot y = 0 \tag{3}$$

Ekvation (3) ger

$$\frac{\dot x}{x} = \frac{\dot y}{y}$$

och efter integrering (se uppgift 15.1.2)

$$y(t) = \frac{y(0)}{x(0)}\,x(t) = C\,x(t).$$

Sätter vi in detta i (1) och (2) får vi

$$\dot x(z^2-x^2-C^2x^2) - 2xz\dot z = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\dot x}{2x} = \frac{z/x\cdot \dot z/x}{\bigl(z/x\bigr)^2-(1+C^2)}.$$

Notera att variabeln z förekommer endast i kombinationerna z/x och $\dot z/x$. Om vi därför prövar att införa en ny variabel $u=z/x$ får vi att

$$\dot u = \frac{\dot z x - z\dot x}{x^2} = \frac{\dot z}{x} - \frac{z}{x}\frac{\dot x}{x} = \frac{\dot z}{x} - u\frac{\dot x}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\dot z}{x} = \dot u + u\frac{\dot x}{x}$$

och ekvationen blir

$$\frac{1}{2}\frac{\dot x}{x} = \frac{u\Bigl(\dot u + u\,\dfrac{\dot x}{x}\Bigr)}{u^2-(1+C^2)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\dot x}{x} = \frac{\dfrac{u\dot u}{u^2-(1+C^2)}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{u^2}{u^2-(1+C^2)}} = -\frac{2u\dot u}{u^2+(1+C^2)}.$$

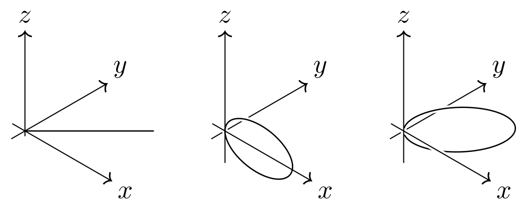
Vi integrerar båda led m.a.p. t,

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot x}{x}\,dt = \Bigl[\log|x(t)|\Bigr]_0^t = \log\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right| \\
\text{HL} &= -\int_0^t \frac{2u\dot u\,dt}{u^2+(1+C^2)} = \{\, s = u^2+(1+C^2);\ ds = 2u\dot u\,dt \,\} \\
&= -\int \frac{ds}{s} = -\log\left|\frac{s(t)}{s(0)}\right| = -\log\left|\frac{u^2+(1+C^2)}{D_1}\right| \\
&= -\log\left|\frac{z^2/x^2+(1+C^2)}{D_1}\right| \\
\Leftrightarrow &\qquad \frac{x}{x(0)} = \frac{D_1x^2}{z^2+(1+C^2)x^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = \frac{D_2x}{z^2+(1+C^2)x^2} \\
\Leftrightarrow &\qquad z^2+(1+C^2)x^2 = D_2x \\
\Leftrightarrow &\qquad z^2+(1+C^2)\Bigl(x-\frac{D_2}{2(1+C^2)}\Bigr)^2 = \frac{D_2^2}{4(1+C^2)} \\
\Leftrightarrow &\qquad z^2+\left(\frac{x-D_3}{D_3}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Fältlinjerna kan alltså skrivas i formen

$$y = Cx,$$
$$z^2+\Bigl(\frac{x-D_3}{D_3}\Bigr)^2 = 1,$$

d.v.s. fältlinjerna blir räta linjer när de projiceras på x,y-planet och ellipser när de projiceras på x,z-planet.



Lektion 14, Flervariabelanalys den 16 februari 2000

15.3.2 Låt C vara den koniska spiralkurvan med parameterformen

$$\begin{aligned} x &= t\,\cos t \\ y &= t\,\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi). \\ z &= t \end{aligned}$$

Bestäm $\displaystyle\int_C z\,ds$.

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\,\cos t \\ t\,\sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Båglängdselementet ds ges av formeln $ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt$, där

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| &= \sqrt{(\cos t - t\,\sin t)^2 + (\sin t + t\,\cos t)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1} \\ &= \sqrt{2+t^2} \end{aligned}$$

Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C z\,ds &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\;dt = \{\, u = 2+t^2;\; du = 2t\,dt \,\} \\ &= \tfrac{1}{2}\int_2^{2+4\pi^2} \sqrt{u}\;du = \tfrac{1}{3}\Big[\, u\sqrt{u}\,\Big]_2^{2+4\pi^2} \\ &= \tfrac{1}{3}\big((2+4\pi^2)\sqrt{2+4\pi^2} - 2\sqrt{2}\big). \end{aligned}$$

15.3.4 Visa att kurvan C som är skärningskurvan mellan den elliptiska paraboloiden $z = 2 - x^2 - 2y^2$ och den paraboliska cylindern $z = x^2$ i första oktanten från $(0,1,0)$ till $(1,0,1)$ har parametriseringen

$$\begin{aligned} x &= \cos u \\ y &= \sin u \qquad (0 \le u \le \pi/2), \\ z &= \cos^2 u \end{aligned}$$

och beräkna kurvans massa om dess densitet i punkten (x,y,z) är $\varrho(x,y,z) = xy$.

Skärningskurvan mellan de två ytorna uppfyller båda ytornas ekvationer

$$z = 2 - x^2 - 2y^2, \tag{1}$$
$$z = x^2. \tag{2}$$

(2) insatt i (1) ger

$$x^2 = 2 - x^2 - 2y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Skärningskurvans projektion på x,y-planet är alltså en del av enhetscirkeln. Vi kan därför beskriva x- och y-koordinaten med standardparametriseringen

$$\begin{aligned} x &= \cos u, \\ y &= \sin u. \end{aligned}$$

Från (2) har vi

$$z = x^2 = \cos^2 u.$$

Detta är en beskrivning av hela skärningskurvan. Eftersom kurvstycket C ligger i första oktanten måste vi begränsa parameterintervallet så att

$$\begin{aligned} x &= \cos u \ge 0, \\ y &= \sin u \ge 0, \\ z &= \cos^2 u \ge 0, \end{aligned}$$

vilket ger att $u \in [0, \pi/2]$. Kurvan C kan alltså skrivas

$$\boldsymbol{r}(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \cos^2 u \end{pmatrix} \qquad (0 \le u \le \pi/2).$$

Kurvans densitet ges av

$$\varrho(u) = \varrho\big(\boldsymbol{r}(u)\big) = x(u)y(u) = \cos u \sin u,$$

och kurvans båglängdselement ds är

$$\begin{aligned} ds &= |\dot{\boldsymbol{r}}(u)|\,du = \sqrt{(-\sin u)^2 + (\cos u)^2 + (2\cos u \sin u)^2}\;du \\ &= \sqrt{1 + 4\cos^2 u\,\sin^2 u}\;du. \end{aligned}$$

Kurvans totala massa blir

$$\begin{aligned} m &= \int_C \varrho(x,y,z)\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos u \sin u \sqrt{1+4\cos^2 u \sin^2 u}\;du \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin 2u \sqrt{1+\sin^2 2u}\;du = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin 2u \sqrt{2-\cos^2 2u}\;du \\ &= \{\, t = \cos 2u;\ dt = -2\,\sin 2u\,du \,\} = \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} \sqrt{2-t^2}\;dt \\ &= \{\, t = \sqrt{2}\,\sin\theta;\ dt = \sqrt{2}\,\cos\theta\,d\theta \,\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2-2\sin^2\theta}\;\cos\theta\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\cos\theta|\,\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} - (-\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2})\big) = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

15.3.6 Beräkna

$$\int_C e^z\,ds$$

där C är kurvan

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = e^t\cos t\,\boldsymbol{e}_x + e^t \sin t\,\boldsymbol{e}_y + t\,\boldsymbol{e}_z \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

I vektorform skrivs kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t \sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

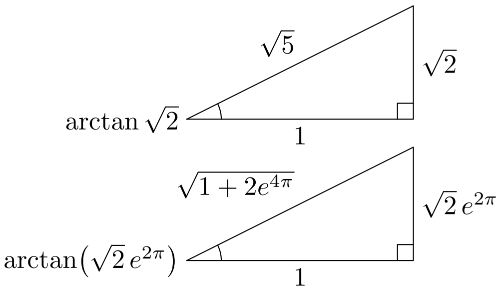
och båglängdselementet är

$$\begin{aligned} ds &= |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \sqrt{(e^t\cos t - e^t\sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t\cos t)^2 + 1^2}\;dt \\ &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t\sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t) + 1}\;dt \\ &= \sqrt{2e^{2t}+1}\;dt. \end{aligned}$$

Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C e^z\,ds &= \int_0^{2\pi} e^t\sqrt{2e^{2t}+1}\;dt = \{\, s = \sqrt{2}\,e^t;\ ds = \sqrt{2}\,e^t\,dt \,\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} \sqrt{s^2+1}\;ds = \{\, s = \tan\theta;\ ds = (1+\tan^2\theta)\,d\theta \,\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\arctan\sqrt{2}}^{\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\arctan\sqrt{2}}^{\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} \\ &= \{\, r = \sin\theta;\ dr = \cos\theta\,d\theta \,\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sin\arctan\sqrt{2}}^{\sin\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \frac{dr}{(1-r^2)^2} \\ &= \{\, \text{partialbråkuppdelning} \,\} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{1}{r-1} + \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{r+1}\right) dr \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{r-1} - \log|r-1| - \frac{1}{r+1} + \log|r+1|\right]_{\sin\arctan\sqrt{2}}^{\sin\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \end{aligned}$$

Med två hjälptrianglar kan vi förenkla övre och undre integrationsgränsen.



$$\sin\arctan\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{2}{5}}$$

$$\sin\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi}) = \tfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}$$

Linjeintegralen blir

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}-1} - \frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}+1} + \log\frac{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}+1}{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}-1} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2/5}-1} + \frac{1}{\sqrt{2/5}+1} - \log\frac{\sqrt{2/5}+1}{\sqrt{2/5}-1} \right).$$

Anm. Med en hyperbolisk substitution blir räkningarna något enklare

$$\begin{aligned}\int \sqrt{s^2+1}\,ds &= \{\, s=\sinh t;\ ds=\cosh t \,\} = \int \cosh^2 t\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int \bigl(1+\cosh 2t\bigr)\,dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sinh 2t + C\end{aligned}$$

men integrationsgränserna är fortfarande risiga.

15.3.7 Bestäm

$$\int_C x^2\,ds$$

längs skärningslinjen mellan planen $x-y+z=0$ och $x+y+2z=0$, från origo till $(3,1,-2)$.

Skärningslinjen är lösningarna till de båda planens ekvationer

$$\begin{aligned} x-y+z&=0,\\ x+y+2z&=0.\end{aligned}$$

Med gausseliminering får vi lösningarna till

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t\\ t\\ -2t\end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}),$$

som också är en parametrisering av skärningslinjen. Origo svarar mot $t=0$ och $(3,1,-2)$ svarar mot $t=1$. Båglängdselementet är

$$ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}\,dt = \sqrt{14}\,dt.$$

Linjeintegralen är alltså

$$\int_C x^2\,ds = \int_0^1 (3t)^2\sqrt{14}\,dt = 9\sqrt{14}\int_0^1 t^2\,dt = 3\sqrt{14}.$$

Anm. Eftersom skärningskurvan mellan två plan alltid är en rät linje, som dessutom måste gå genom origo och $(3,1,-2)$ kunde vi direkt ha skrivit upp linjens parametrisering.

15.4.2 Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \cos x\,\boldsymbol{e}_x - y\,\boldsymbol{e}_y$$

längs kurvan $y = \sin x$ från $(0,0)$ till $(\pi,0)$.

Vi ska lösa uppgiften med tre metoder.

Metod 1 (explicit uträkning)

Vi skriver kurvan i parameterform

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le \pi),$$

och har då

$$d\boldsymbol{r}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} dt.$$

Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (\cos x, -y)\cdot(dx,dy) = \int_0^\pi (\cos t, -\sin t)\cdot(dt, \cos t\,dt) \\ &= \int_0^\pi \cos t\,dt - \sin t\,\cos t\,dt = \Big[\sin t\Big]_0^\pi - \Big[\tfrac{1}{2}\sin^2 t\Big]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Metod 2 (potential)

Vi har

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

som är symmetrisk i hela planet. Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är därmed konservativ och har en potential Φ som uppfyller

$$\begin{aligned} \nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\cos x, -y) \\ \Leftrightarrow \qquad \Phi = \sin x - \tfrac{1}{2}y^2 + C. \end{aligned}$$

Linjeintegralen är oberoende av väg och vi har

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,0)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(\pi,0) - \Phi(0,0) = 0.$$

Metod 3 (byte av integrationskurva)

Precis som i metod 2 visar vi först att $\boldsymbol{F}$ är konservativ.

Eftersom $\boldsymbol{F}$ är konservativ är linjeintegralens värde oberoende av vilken kurva från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ som används. Vi byter därför ut kurvan i uppgiftstexten mot den enklare kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le \pi).$$

Linjeintegralen blir

$$\int_0^\pi (\cos t, 0)\cdot(dt, 0) = \int_0^\pi \cos t\,dt = \Big[\sin t\Big]_0^\pi = 0.$$

15.4.4 Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\,\boldsymbol{e}_x - y\,\boldsymbol{e}_y + 2x\,\boldsymbol{e}_z$$

längs kurvan $x = t$, $y = t^2$ och $z = t^3$ från $(0,0,0)$ till $(1,1,1)$.

Vi undersöker först om vektorfältet är konservativt. Vi har

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen inte är symmetrisk är $\boldsymbol{F}$ inte konservativ. Vi bestämmer därför linjeintegralens värde med en explicit uträkning. Vi har

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \begin{pmatrix} z(t) \\ -y(t) \\ 2x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \\ d\boldsymbol{r}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Kurvan genomlöps av denna parametrisering när t går från 0 till 1. Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot d\boldsymbol{r}(t) = \int_0^1 (t^3,-t^2,2t)\cdot(1,2t,3t^2)\,dt\\ &= \int_0^1 (t^3-2t^3+6t^3)\,dt = \Big[\tfrac{5}{4}t^4\Big]_0^1 = \tfrac{5}{4}.\end{aligned}$$

15.4.8 Bestäm

$$\oint_C x^2y^2\,dx + x^3y\,dy$$

moturs runt kvadraten med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$.

Vi undersöker om vektorfältet

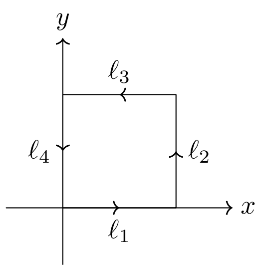
$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2y^2, x^3y)$$

är konservativt. Eftersom

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} * & 3x^2y \\ 2x^2y & * \end{pmatrix} \qquad (* = \text{ointressant})$$

inte är symmetrisk är $\boldsymbol{F}$ inte konservativ.

Kvadraten består av fyra räta randkurvor



som parametriseras av

$$\begin{aligned}&\ell_1: \quad \boldsymbol{r}_1(t) = (t,0) \quad (0\le t\le 1)\\ &\ell_2: \quad \boldsymbol{r}_2(t) = (1,t) \quad (0\le t\le 1)\\ &\ell_3: \quad \boldsymbol{r}_3(t) = (-t,1) \quad (0\le t\le 1)\\ &\ell_4: \quad \boldsymbol{r}_4(t) = (0,-t) \quad (0\le t\le 1)\end{aligned}$$

På de fyra kantlinjerna är

$$\begin{aligned}\ell_1:&\quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_1(t)\big) = (t^2\cdot 0^2, t^3\cdot 0) = (0,0),\\ \ell_2:&\quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_2(t)\big) = (1^2\cdot t^2, 1^3\cdot t) = (t^2,t),\\ &\quad d\boldsymbol{r}_2(t) = (0,dt),\\ \ell_3:&\quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_3(t)\big) = ((-t)^2\cdot 1^2, (-t)^3\cdot 1) = (t^2,-t^3),\\ &\quad d\boldsymbol{r}_3(t) = (-dt,0),\\ \ell_4:&\quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_4(t)\big) = (0^2\cdot(-t)^2, 0^3\cdot(-t)) = (0,0).\end{aligned}$$

Linjeintegralen runt kvadraten delar vi upp i fyra delar som svarar mot de fyra kantlinjerna.

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \sum_{i=1}^4 \int_{\ell_i} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \{\,\text{På } \ell_1 \text{ och } \ell_4 \text{ är } \boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}\,\}\\ &= \int_{\ell_2} + \int_{\ell_3} = \int_0^1 (t^2,t)\cdot(0,dt) + \int_0^1 (t^2,-t^3)\cdot(-dt,0)\\ &= \int_0^1 t\,dt - \int_0^1 t^2\,dt = \Big[\tfrac{1}{2}t^2\Big]_0^1 - \Big[\tfrac{1}{3}t^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

15.4.10 Vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (axy+z)\,\boldsymbol{e}_x + x^2\,\boldsymbol{e}_y + (bx+2z)\,\boldsymbol{e}_z$$

är konservativt. Bestäm a och b, och bestäm även en potential till $\boldsymbol{F}$.

Beräkna

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

där C är kurvan från $(1,1,0)$ till $(0,0,3)$ som ligger på skärningskurvan mellan ytorna $2x+y+z=3$ och $9x^2+9y^2+2z^2=18$ i oktanten $x,y,z \geq 0$.

Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt endast om

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & ax & 1 \\ 2x & * & 0 \\ b & 0 & * \end{pmatrix}$$

är symmetrisk. Detta ger direkt att $a=2$ och $b=1$. En potential Φ till $\boldsymbol{F}$ uppfyller

$$\begin{aligned} \nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) &= \boldsymbol{F}(x,y,z) = (2xy+z, x^2, x+2z) \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= 2xy+z, && (1) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= x^2, && (2) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= x+2z. && (3) \end{aligned}$$

Om vi integrerar upp (1), (2) och (3) fås

$$\begin{aligned} \Phi &= x^2y + xz + C_1(y,z), \\ \Phi &= x^2y + C_2(x,z), \\ \Phi &= xz + z^2 + C_3(x,y). \end{aligned}$$

Eftersom vänsterleden är lika måste högerleden vara lika, vilket ger

$$\Phi = x^2y + xz + z^2 + C.$$

Eftersom vektorfältet är konservativt och vi vet dess potential kan vi strunta i den komplicerade beskrivningen av kurvan C och istället få linjeintegralens värde som differensen mellan potentialens värde i kurvans två ändpunkter,

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(0,0,3) - \Phi(1,1,0) = 3^2 - 1^2\cdot 1 = 8.$$

15.4.12 Bestäm arbetet som kraftfältet

$$\boldsymbol{F} = (y^2\cos x + z^3)\,\boldsymbol{e}_x + (2y\sin x - 4)\,\boldsymbol{e}_y + (3xz^2+2)\,\boldsymbol{e}_z$$

utför när en partikel flyttas längs kurvan $x = \arcsin t$, $y = 1-2t$ och $z = 3t-1$ $(0 \leq t \leq 1)$.

Vi undersöker först om kraftfältet är konservativt. Jakobianen

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & 2y\cos x & 3z^2 \\ 2y\cos x & * & 0 \\ 3z^2 & 0 & * \end{pmatrix}$$

är symmetrisk vilket ger att $\boldsymbol{F}$ är konservativ. En potential Φ till $\boldsymbol{F}$ uppfyller

$$\begin{aligned} \nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) &= \boldsymbol{F} = (y^2\cos x + z^3, 2y\sin x - 4, 3xz^2+2) \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= y^2\cos x + z^3, && (1) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= 2y\sin x - 4, && (2) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 3xz^2 + 2, && (3) \end{aligned}$$

som efter integrering ger

$$\begin{aligned}\Phi &= y^2 \sin x + xz^3 + C_1(x,y),\\ \Phi &= y^2 \sin x - 4y + C_2(x,z),\\ \Phi &= xz^3 + 2z + C_3(x,y).\end{aligned}$$

Alltså måste potentialen vara

$$\Phi = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + C.$$

Kurvans ändpunkter är

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix}\arcsin 0\\ 1-2\cdot 0\\ 3\cdot 0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{r}(1) = \begin{pmatrix}\arcsin 1\\ 1-2\cdot 1\\ 3\cdot 1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/2\\ -1\\ 2\end{pmatrix}.$$

Arbetet som utförs är

$$\begin{aligned}W = \int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \Phi(\pi/2,-1,2) - \Phi(0,1,-1)\\ &= (-1)^2 \sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\,2^3 - 4(-1) + 2\cdot 2\\ &\quad - \big(1^2\cdot \sin 0 + 0\cdot(-1)^3 - 4\cdot 1 + 2\cdot(-1)\big)\\ &= 1 + 4\pi + 4 + 4 + 4 + 2 = 4\pi + 15.\end{aligned}$$

15.4.16 Beräkna de slutna linjeintegralerna

a) $\oint_C x\,dy$

b) $\oint_C y\,dx$

runt ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ moturs.

a) Från integranden kan vi avläsa vektorfältet $\boldsymbol{F}$,

$$x\,dy = (0,x)\cdot(dx,dy) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{F}(x,y) = (0,x).$$

Eftersom Jakobianen

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk är $\boldsymbol{F}$ inte konservativ.

Ellipsen har standardparametriseringen

$$\begin{aligned}x &= a\,\cos t\\ y &= b\,\sin t\end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

som genomlöper ellipsen moturs när t går från 0 till 2π. Med denna parametrisering har vi att

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= (0, a\cos t)\\ d\boldsymbol{r}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = (-a\,\sin t, b\,\cos t)\,dt\end{aligned}$$

och linjeintegralen blir

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} (0, a\cos t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} ab\,\cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt\\ &= \frac{ab}{2}\Big[\,t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\,\Big]_0^{2\pi} = \pi ab.\end{aligned}$$

b) I detta fall är vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = (y, 0)$$

som inte heller är konservativt eftersom Jakobianen

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk. Om vi däremot betraktar vektorfältet

$$\boldsymbol{G}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r} = x\,dy + y\,dx$$

så är $\boldsymbol{G}$ konservativ eftersom

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk. Alltså har vi att

$$\oint_C x\,dy + y\,dx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_C y\,dx = -\oint_C x\,dy = -\pi\,ab.$$

15.4.22 Beräkna

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

a) moturs runt cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$,

b) medurs runt kvadraten med hörnpunkter $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ och $(1,-1)$, och

c) moturs runt randen till området $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ och $y \ge 0$.

a) Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ i integranden får vi till

$$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \Bigl(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Bigr) \cdot (dx, dy) = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

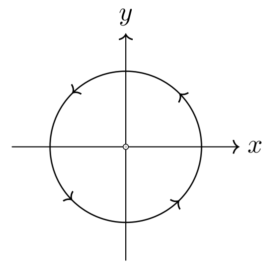
$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{F}(x,y) = \Bigl(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Bigr).$$

Jakobianen till $\boldsymbol{F}$ är symmetrisk

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} * & -x^2+y^2 \\ -x^2+y^2 & * \end{pmatrix},$$

vilket betyder att $\boldsymbol{F}$ är konservativ där den är definierad, vilket i detta fall är hela planet minus origo.

Eftersom cirkeln löper runt origo kan vi *inte* dra slutsatsen att den slutna linjeintegralen är noll.



Vi parametriserar cirkeln

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

och får då att

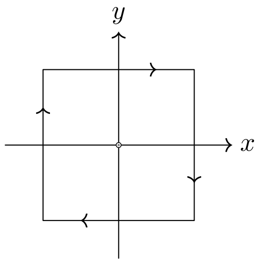
$$\boldsymbol{F}\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr) = \Bigl(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\Bigr) = (-\sin t, \cos t),$$

$$d\boldsymbol{r}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = (-\sin t, \cos t)\,dt.$$

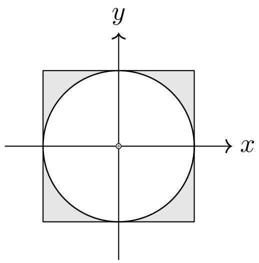
Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1. \end{aligned}$$

b) Vi ritar upp kvadraten.



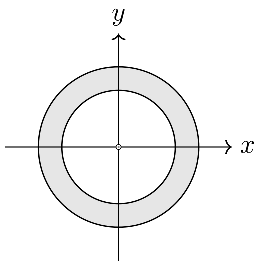
Om vi också ritar upp cirkeln från a-uppgiften

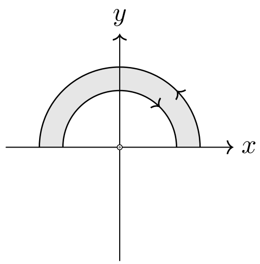


så ser vi att i området mellan kurvorna är vektorfältet konservativt, vilket betyder att linjeintegralerna runt kvadraten och cirkeln har samma värde om det nu inte vore för att de har olika omloppsriktningar vilket ger dem olika tecken. Alltså är

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -1.$$

c) Olikheten $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ definierar området mellan de två koncentriska cirklarna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y^2 = 2$. Olikheten $y \geq 0$ betyder att området är halvcirkelringen i övre halvplanet.





Eftersom origo inte tillhör området innanför den slutna kurvan är $\boldsymbol{F}$ konservativ där, och linjeintegralen är

$$\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

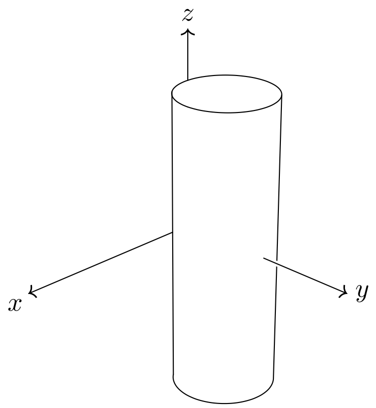
Lektion 15, Flervariabelanalys den 17 februari 2000

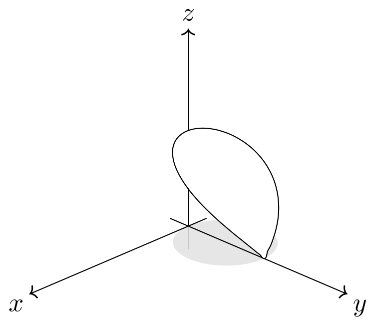
15.5.4 Bestäm arean av den del av sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$ som ligger innanför cylindern $x^2+y^2=2ay$.

Vi skriver om cylinderns ekvation i standardform

$$x^2+y^2-2ay=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+(y-a)^2=a^2.$$

Cylindern är alltså cirkulär med mittpunkt i $(x,y)=(0,a)$ och radie a. Sfären $x^2+y^2+z^2=4a^2$ har mittpunkt i origo och radie $2a$. Den del av sfären som är innanför cylindern består av två ytstycken.





Den övre ytan är funktionsytan

$$z=f(x,y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$$

över området $D: x^2+(y-a)^2\le a^2$. P.g.a. symmetrin är arean av det undre ytstycket lika med det övre ytstyckets area.

Eftersom sfären är 0-nivåytan till funktionen

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4a^2$$

ges areaelementet av

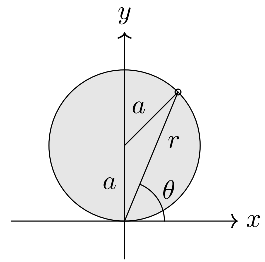
$$\begin{aligned} dS &= \left|\frac{\nabla f}{\partial f/\partial z}\right| dx\,dy = \frac{|(2x,2y,2z)|}{2z}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}\,dx\,dy \\ &= \{\, z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Området D är en cirkeldisk och areaelementet innehåller bara x och y i kombinationen x^2+y^2 så vi inför polära koordinater,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

Disken D beskrivs då som

$$\begin{aligned} &0\le\theta\le\pi, \\ &0\le r\le 2a\sin\theta. \end{aligned}$$



$$a^2=a^2+r^2-2ar\cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta)$$

Areaelementet blir

$$dS=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}}\,r\,dr\,d\theta=\frac{2ar}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr\,d\theta.$$

Arean av de två ytstyckena är

$$\begin{aligned} 2\iint_D dS &= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} \frac{2ar}{\sqrt{4a^2-r^2}}\,dr = \{\, t=4a^2-r^2;\ dt=-2r\,dr \,\} \\ &= 2a\int_0^{\pi} d\theta \int_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 4a\int_0^{\pi} \big[\sqrt{s}\,\big]_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} = 8a\int_0^{\pi}\big(a-a|\cos\theta|\big)\,d\theta \\ &= 16a^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,d\theta = 16a^2\Big[\,\theta-\sin\theta\,\Big]_0^{\pi/2} = 8a^2\pi-16a^2. \end{aligned}$$

15.5.14 Bestäm

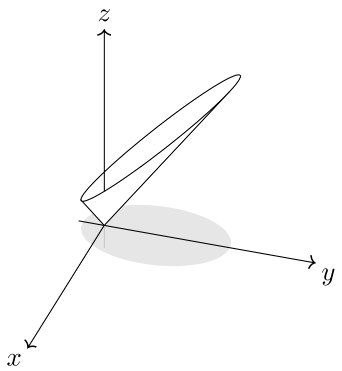
$$\iint_S y\,dS$$

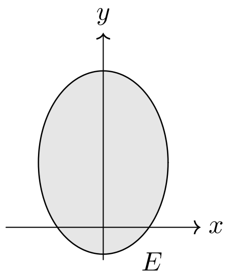
där S är den del av konen $z = \sqrt{2(x^2+y^2)}$ som ligger under planet $z = 1 + y$.

En punkt (x, y, z) på konen ligger under planet om $z \le 1 + y$, d.v.s. om

$$\begin{aligned}
z = \sqrt{2(x^2+y^2)} \le 1 + y \qquad &\Leftrightarrow \qquad 2(x^2+y^2) \le (1+y)^2 \\
\Leftrightarrow \qquad 2x^2 + y^2 - 2y \le 1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 2x^2 + (y-1)^2 \le 2 \\
\Leftrightarrow \qquad x^2 + \Bigl(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\Bigr)^2 \le 1.&
\end{aligned}$$

Punkterna på S är alltså de punkter med x- och y-koordinat innanför ellipsen E : $x^2 + \bigl(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\bigr)^2 \le 1$.





Areaelementet i ytintegralen är

$$\begin{aligned}
dS &= \sqrt{1 + \Bigl(\frac{\partial z}{\partial x}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{\partial z}{\partial y}\Bigr)^2}\; dx\,dy \\
&= \sqrt{1 + \Bigl(\frac{4x}{2\sqrt{2(x^2+y^2)}}\Bigr)^2 + \Bigl(\frac{4y}{2\sqrt{2(x^2+y^2)}}\Bigr)^2}\; dx\,dy \\
&= \sqrt{1 + \frac{4x^2+4y^2}{2(x^2+y^2)}}\; dx\,dy = \sqrt{3}\; dx\,dy.
\end{aligned}$$

För att beskriva området innanför ellipsen på ett enkelt sätt gör vi koordinatbytet

$$\begin{aligned}
x &= r\,\cos\theta, \\
y &= 1 + \sqrt{2}\,r\,\sin\theta,
\end{aligned}$$

(omskalade polära koordinater centrerade kring $(0, 1)$). Området ges då av

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1,$$

och areaelementet är

$$\begin{aligned}
dS = \sqrt{3}\; dx\,dy = \sqrt{3}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = \sqrt{3}\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sqrt{2}\,\sin\theta & \sqrt{2}\,r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta \\
= \sqrt{3}\,\bigl(\sqrt{2}\,r\cos^2\theta + \sqrt{2}\,r\sin^2\theta\bigr)\,dr\,d\theta = \sqrt{6}\,r\,dr\,d\theta.
\end{aligned}$$

Ytintegralen blir

$$\begin{aligned}
\iint_S y\,dS &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + \sqrt{2}\,r\sin\theta)\,\sqrt{6}\,r\,dr \\
&= \sqrt{6}\int_0^{2\pi} d\theta \Bigl[\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{\sqrt{2}}{3}r^3\cos\theta\Bigr]_0^1 = \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\bigl(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{3}\cos\theta\bigr)\,d\theta = \sqrt{6}\,\pi.
\end{aligned}$$

15.5.15 Bestäm

$$\iint_S xz\,dS$$

där S är den del av ytan $z = x^2$ som ligger i första oktanten och innanför paraboloiden $z = 1 - 3x^2 - y^2$.

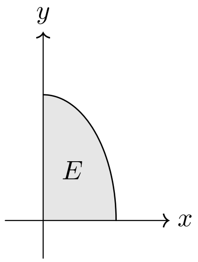
”Innanför paraboloiden” betyder i detta fall ”under paraboloiden”. Ytan $z = x^2$ ska alltså begränsas till området som uppfyller olikheterna

$$\begin{aligned}
z &\le 1 - 3x^2 - y^2, \\
x &\ge 0, \\
y &\ge 0, \\
z &\ge 0.
\end{aligned}$$

Eftersom vi på ytan har att $z = x^2$ ger dessa olikheter att

$$\begin{aligned} x^2 &\le 1 - 3x^2 - y^2, \\ x &\ge 0, \\ y &\ge 0, \\ x^2 &\ge 0, \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} \Big(\frac{x}{1/2}\Big)^2 + y^2 &\le 1, \\ x, y &\ge 0. \end{aligned}$$

Projicerar vi alltså ner S på x,y-planet får vi en kvartsellips E med mittpunkt i origo och halvaxlar $\frac{1}{2}$ och 1.



Ytan S består därmed av de punkter på funktionsytan $z = x^2$ med x- och y-koordinater innanför området E.

Området E kan vi i kartesiska koordinater beskriva som

$$0 \le x \le \tfrac{1}{2}, \quad 0 \le y \le \sqrt{1 - 4x^2}.$$

Areaelementet är

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\,dx\,dy \\ &= \sqrt{1 + (2x)^2 + 0^2}\,dx\,dy = \sqrt{1 + 4x^2}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Ytintegralen blir

$$\begin{aligned} \iint_S xz\,dx\,dy &= \iint_S x \cdot x^2\,dS = \int_0^{1/2} x^3\,dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} \sqrt{1+4x^2}\,dy \\ &= \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1+4x^2}\,\sqrt{1-4x^2}\,dx = \int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1-16x^4}\,dx \\ &= \{\, t = 1 - 16x^4;\ dt = -64x^3\,dx \,\} = \tfrac{1}{64} \int_0^1 \sqrt{t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{64} \Big[\tfrac{2}{3} t\sqrt{t} \Big]_0^1 = \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{96} \end{aligned}$$

15.6.2 Bestäm flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

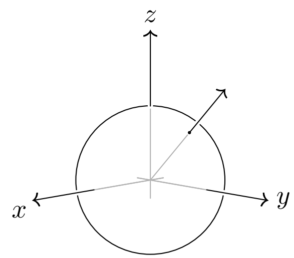
Sfären är 0-nivåytan till funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2,$$

och har det vektoriella ytelementet

$$d\boldsymbol{S} = \pm \frac{\nabla f}{\partial f/\partial z} = \pm \frac{(2x, 2y, 2z)}{2z}\,dx\,dy = \pm \frac{1}{z}(x,y,z)\,dx\,dy.$$

I den övre halvan av sfären väljer vi +:tecknet eftersom vi söker flödet ut ur sfären och $+\frac{1}{z}(x,y,z)$ pekar då ut ur sfären.



I den undre halvan måste vi välja −:tecknet.

Flödesintegralen blir

$$\begin{aligned} \oiint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{\text{övre}} (x,y,z) \cdot \frac{1}{z}(x,y,z)\,dx\,dy \\ &\quad + \iint_{\text{undre}} (x,y,z) \cdot \frac{-1}{z}(x,y,z)\,dx\,dy \\ &= \iint_{\text{övre}} \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\,dx\,dy - \iint_{\text{undre}} \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\,dx\,dy \\ &= \iint_{\text{övre}} \frac{a^2}{z}\,dx\,dy - \iint_{\text{undre}} \frac{a^2}{z}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Den övre och undre halvan av S ges av

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{där } x^2 + y^2 \le a^2,$$

respektive

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{där } x^2 + y^2 \le a^2.$$

Flödesintegralen blir alltså

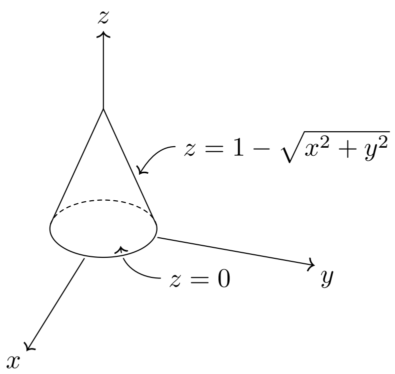
$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= 2 \iint_{x^2+y^2 \le a^2} \frac{a^2\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \{\,\text{polära koordinater}\,\} \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\,dr = \{\, t = a^2 - r^2;\ dt = -2r\,dr \,\} \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = a^2 \cdot 2\pi \cdot 2a = 4\pi a^3.
\end{aligned}$$

15.6.4 Bestäm flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\,\boldsymbol{e}_x + z\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ut randytan till konen $0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Randytan till konen består dels av mantelytan $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \ge 0$, dels av undersidan $z = 0$.



Det vektoriella ytelementet på de två ytorna ges av

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm\Big(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\Big)\,dx\,dy,$$

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm(0, 0, -1)\,dx\,dy,$$

där vi i första formeln väljer $-$:tecknet och i andra formeln väljer $+$:tecknet, så att $d\boldsymbol{S}$ pekar ut från konen.

Flödet blir

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{\text{mantel}} (y, 0, z) \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big)\,dx\,dy \\
&\quad + \iint_{\text{under}} (y, 0, z) \cdot (0, 0, -1)\,dx\,dy \\
&= \iint_{\text{mantel}} \Big(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + z\Big)\,dx\,dy + \iint_{\text{under}} -z\,dx\,dy \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \Big(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 - \sqrt{x^2+y^2}\Big)\,dx\,dy + \iint_{\text{under}} 0\,dx\,dy \\
&= \{\,\text{polära koordinater}\,\} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \Big(\frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r} + 1 - r\Big)\, r\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \,\Big[\tfrac{1}{3} r^3 \cos\theta \sin\theta + \tfrac{1}{2} r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\Big]_0^1 \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{3}\cos\theta \sin\theta + \tfrac{1}{6}\big)\,d\theta = \tfrac{1}{3}\pi.
\end{aligned}$$

15.6.6 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = x\,\boldsymbol{e}_x + x\,\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$$

upp genom den del av ytan $z = x^2 - y^2$ innanför cylindern $x^2 + y^2 = a^2$.

Punkter innanför cylindern har x- och y-koordinater som uppfyller $x^2 + y^2 \le a^2$.
Eftersom $z = x^2 - y^2$ är en funktionsyta är

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm\big(2x, -2y, -1\big)\,dx\,dy$$

som pekar uppåt om vi väljer $-$:tecknet (z-koordinat positiv). Flödet genom ytan är

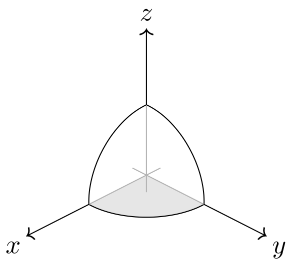
$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S (x,x,1)\cdot(-2x,2y,1)\,dx\,dy\\
&= \iint_{x^2+y^2\le a^2} \big(-2x^2 + 2xy + 1\big)\,dx\,dy = \{\,\text{polära koordinater}\,\}\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (-2r^2\cos^2\theta + 2r^2\cos\theta\sin\theta + 1)\,r\,dr\\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\,\Big[-\tfrac12 r^4\cos^2\theta + \tfrac12 r^4\cos\theta\sin\theta + \tfrac12 r^2\Big]_0^a\\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\tfrac12 a^4\cos^2\theta + \tfrac12 a^4\cos\theta\sin\theta + \tfrac12 a^2\Big)\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\tfrac14 a^4 - \tfrac14 a^4\cos 2\theta + \tfrac12 a^2\Big)\,d\theta\\
&= \{\,\text{integral av cos och sin över en hel period} = 0\,\}\\
&= -\tfrac14 a^4\cdot 2\pi + \tfrac12 a^2\cdot 2\pi = \pi a^2\big(1 - \tfrac12 a^2\big).
\end{aligned}$$

15.6.8 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = z^2\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ som ligger i första oktanten.

I första oktanten $x, y, z \ge 0$ är sfären en funktionsyta $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ över kvartsdisken $D: x^2 + y^2 \le a^2,\ x, y \ge 0$.



Det vektoriella ytelementet är

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm\Big(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, -1\Big)\,dx\,dy$$

och väljer vi $-$:tecknet pekar $d\boldsymbol{S}$ uppåt. Flödet blir

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S (0,0,z^2)\cdot\Big(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1\Big)\,dx\,dy\\
&= \iint_S z^2\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le a^2} (a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy\\
&= \{\,\text{polära koordinater}\,\} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a (a^2 - r^2)\,r\,dr\\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta\,\Big[\tfrac12 a^2 r^2 - \tfrac14 r^4\Big]_0^a = \int_0^{\pi/2} \big(\tfrac12 a^4 - \tfrac14 a^4\big)\,d\theta = \frac{\pi a^4}{8}.
\end{aligned}$$

15.6.10 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = 2x\,\boldsymbol{e}_x + y\,\boldsymbol{e}_y + z\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom ytan

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = u^2 v\,\boldsymbol{e}_x + uv^2\,\boldsymbol{e}_y + v^3\,\boldsymbol{e}_z \qquad (0 \le u, v \le 1).$$

Eftersom ytan är parametriserad ges ytelementet av

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= \pm \frac{d\boldsymbol{r}}{du} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dv}\,du\,dv = \pm(2uv, v^2, 0) \times (u^2, 2uv, 3v^2)\,du\,dv \\ &= \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2uv & v^2 & 0 \\ u^2 & 2uv & 3v^2 \end{vmatrix} du\,dv = (3v^4, -6uv^3, 3u^2v^2)\,du\,dv, \end{aligned}$$

där vi väljer +:tecknet så att $d\boldsymbol{S}$ pekar uppåt. Flödet är

$$\begin{aligned} \iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_S (2x, y, z) \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint_S (2u^2v, uv^2, v^3) \cdot (3v^4, -6uv^3, 3u^2v^2)\,du\,dv \\ &= \iint_S (6u^2v^5 - 6u^2v^5 + 3u^2v^5)\,du\,dv \\ &= 3\int_0^1 u^2\,du \int_0^1 v^5\,dv = 3 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

15.6.12 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = yz\,\boldsymbol{e}_x - xz\,\boldsymbol{e}_y + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom ytan

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = e^u \cos v\,\boldsymbol{e}_x + e^u \sin v\,\boldsymbol{e}_y + u\,\boldsymbol{e}_z$$

där $0 \le u \le 1$ och $0 \le v \le \pi$.

Ytelementet ges av

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= \pm \frac{d\boldsymbol{r}}{du} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dv}\,du\,dv = \pm \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ e^u \cos v & e^u \sin v & 1 \\ -e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \end{vmatrix} du\,dv \\ &= \pm(-e^u \cos v, -e^u \sin v, e^{2u})\,du\,dv. \end{aligned}$$

Med +:tecken pekar $d\boldsymbol{S}$ uppåt. Flödet är

$$\begin{aligned} \iint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint (yz, -xz, x^2 + y^2) \cdot d\boldsymbol{S} \\ &= \iint (ue^u \sin v, -ue^u \cos v, e^{2u}) \cdot (-e^u \cos v, -e^u \sin v, e^{2u})\,du\,dv \\ &= \iint (0 + e^{4u})\,du\,dv = \int_0^1 e^{4u}\,du \int_0^\pi dv = \tfrac{1}{4}(e^4 - 1)\pi. \end{aligned}$$

Lektion 16, Flervariabelanalys den 22 februari 2000

16.1.2 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{e}_x + x\,\boldsymbol{e}_y.$$

Divergensen och rotationen ges av

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(y,x,0)\\ &= \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial\,0}{\partial z} = 0+0+0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \nabla\times\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(y,x,0) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & x & 0\end{vmatrix}\\ &= \Big(\frac{\partial\,0}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial z}, -\frac{\partial\,0}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}\Big) = (0,0,0).\end{aligned}$$

Anm. När div $\boldsymbol{F} = 0$ sägs vektorfältet vara källfritt, och när rot $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ sägs vektorfältet vara virvelfritt.

16.1.4 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = yz\,\boldsymbol{e}_x + xz\,\boldsymbol{e}_y + xy\,\boldsymbol{e}_z.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(yz,xz,xy)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(yz)+\frac{\partial}{\partial y}(xz)+\frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0+0+0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \nabla\times\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(yz,xz,xy) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}\\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial y}(xy)-\frac{\partial}{\partial z}(xz), -\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial z}(yz), \frac{\partial}{\partial x}(xz)-\frac{\partial}{\partial y}(yz)\Big)\\ &= (x-x, -y+y, z-z) = (0,0,0).\end{aligned}$$

16.1.6 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = xy^2\,\boldsymbol{e}_x - yz^2\,\boldsymbol{e}_y + zx^2\,\boldsymbol{e}_z.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(xy^2,-yz^2,zx^2)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(-yz^2)+\frac{\partial}{\partial z}(zx^2) = y^2-z^2+x^2 = x^2+y^2-z^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \nabla\times\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(xy^2,-yz^2,zx^2)\\ &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & -yz^2 & zx^2\end{vmatrix}\\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial y}(zx^2)-\frac{\partial}{\partial z}(-yz^2), -\frac{\partial}{\partial x}(zx^2)+\frac{\partial}{\partial z}(xy^2), \frac{\partial}{\partial x}(-yz^2)-\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\Big)\\ &= (0+2yz, -2xz+0, 0-2xy) = (2yz,-2xz,-2xy).\end{aligned}$$

16.1.8 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = f(z)\,\boldsymbol{e}_x - f(z)\,\boldsymbol{e}_y.$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \Bigl(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Bigr)\cdot\bigl(f(z),-f(z),0\bigr)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}f(z) + \frac{\partial}{\partial y}\bigl(-f(z)\bigr) + \frac{\partial}{\partial z}0\\
&= 0+0+0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} &= \Bigl(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Bigr)\times\bigl(f(z),-f(z),0\bigr)\\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f(z) & -f(z) & 0\end{vmatrix}\\
&= \Bigl(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\bigl(-f(z)\bigr), -\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}f(z), \frac{\partial}{\partial x}\bigl(-f(z)\bigr) - \frac{\partial}{\partial y}f(z)\Bigr)\\
&= \bigl(0+f'(z), -0+f'(z), 0-0\bigr) = \bigl(f'(z), f'(z), 0\bigr).
\end{aligned}$$

16.3.2 Beräkna

$$\oint_C (x^2-xy)\,dx + (xy-y^2)\,dy$$

medurs runt triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,0)$.

Linjeintegralen kan vi skriva om som

$$\oint_C (x^2-xy, xy-y^2)\cdot(dx,dy) = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Först undersöker vi om $\boldsymbol{F}$ är konservativ genom att kontrollera om $\boldsymbol{F}$:s Jakobian är symmetrisk,

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -x\\ y & *\end{pmatrix},$$

vilket den inte är.

Istället för att räkna ut linjeintegralen explicit längs de tre kantlinjerna använder vi Greens formel och skriver om linjeintegralen till en dubbelintegral

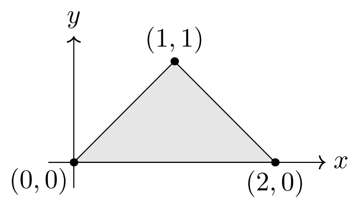
$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\iint_T \Bigl(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Bigr)\,dx\,dy,$$

där minustecknet uppstår eftersom kurvan C genomlöper triangeln T:s kantlinjer i negativ riktning (medurs).

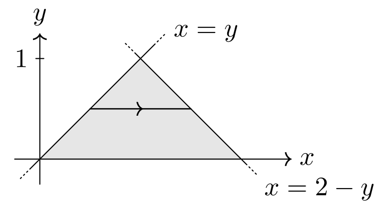
I vårt fall blir dubbelintegralen

$$-\iint_T (y+x)\,dx\,dy.$$

Om vi ritar upp triangeln T



så ser vi att den är enklast att först integrera i x-led. För ett givet y-värde ska x gå från kurvan $x=y$ till kurvan $x=2-y$,



och y ska sedan gå från 0 till 1. Området beskrivs alltså av

$$0\le y\le 1,\quad y\le x\le 2-y.$$

Vi har alltså att

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\iint_T (x+y)\,dx\,dy = -\int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x+y)\,dx$$
$$= -\int_0^1 dy \Big[\tfrac{1}{2}x^2 + xy\Big]_y^{2-y} = -\int_0^1 \Big(\tfrac{1}{2}(2-y)^2 + (2-y)y - \tfrac{1}{2}y^2 - y^2\Big)\,dy$$
$$= -\int_0^1 \big(2-2y^2\big)\,dy = -\Big[2y - \tfrac{2}{3}y^3\Big]_0^1 = -\tfrac{4}{3}.$$

16.3.4 Beräkna

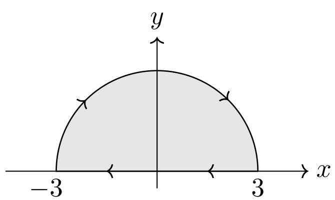
$$\oint_C x^2y\,dx - xy^2\,dy$$

där C är randen till området $0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$ genomlöpt medurs.

Olikheten $y \le \sqrt{9-x^2}$ kan vi efter kvadrering skriva som

$$y^2 \le 9 - x^2, \quad y \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2 \le 9, \quad y \ge 0.$$

Området består alltså av den övre halvan av cirkeldisken med mittpunkt i origo och radie 3.



Linjeintegralen kan skrivas

$$\oint_C (x^2y, -xy^2)\cdot(dx,dy) = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Vi undersöker först om vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Jakobianen till $\boldsymbol{F}$,

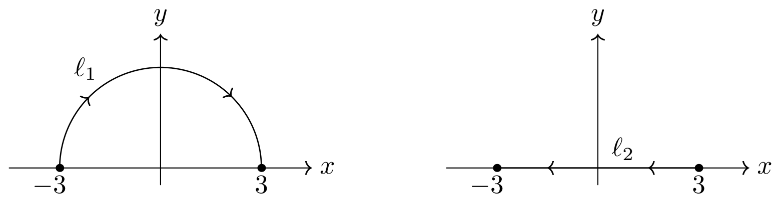
$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} * & x^2 \\ -y^2 & * \end{pmatrix},$$

är inte symmetrisk så $\boldsymbol{F}$ är inte konservativ.

Vi ska lösa uppgiften med två metoder.

Metod 1 (explicit uträkning)

Områdets rand består av två randkurvor, dels halvcirkeln $x^2+y^2=9$ i övre halvplanet från $(-3,0)$ till $(3,0)$, dels den räta linjen från $(3,0)$ till $(-3,0)$.



Dessa två randkurvor kan vi parametrisera som

$$\begin{aligned} \ell_1{:}\quad & \boldsymbol{r}_1(t) = (3\cos t, 3\sin t) && (0 \le \underset{\longleftarrow}{t} \le \pi),\\ \ell_2{:}\quad & \boldsymbol{r}_2(t) = (t,0) && (-3 \le \underset{\longleftarrow}{t} \le 3), \end{aligned}$$

där pilen under parametern anger i vilken riktning parametern löper.

På de två randkurvorna är

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_1(t)\big) &= (x^2y, -xy^2) = \big(3^2\cos^2 t\cdot 3\sin t, -3\cos t\cdot 3^2\sin^2 t\big)\\ &= \big(27\cos^2 t\,\sin t, -27\cos t\,\sin^2 t\big),\\ d\boldsymbol{r}_1(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}_1(t)\,dt = (-3\sin t, 3\cos t)\,dt,\\ \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_2(t)\big) &= (x^2y, -xy^2) = \big((-t)^2\cdot 0, -(-t)\cdot 0^2\big) = (0,0). \end{aligned}$$

Linjeintegralen över den slutna kurvan C är summan av linjeintegralen över ℓ_1

och ℓ_2.

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\pi}^{0} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_1(t)\big)\cdot d\boldsymbol{r}_1(t) \\
&= -\int_0^{\pi} \big(27\cos^2 t\,\sin t, -27\cos t\,\sin^2 t\big)\cdot(-3\sin t, 3\cos t)\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} \big(-81\cos^2 t\,\sin^2 t - 81\cos^2 t\,\sin^2 t\big)\,dt \\
&= 162\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt = \tfrac{81}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 2t\,dt \\
&= \tfrac{81}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \tfrac{81}{4}\Big[\,t - \tfrac{1}{4}\sin 4t\,\Big]_0^{\pi} = \tfrac{81}{4}\pi
\end{aligned}$$

$$\int_{\ell_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{3}^{-3} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_2(t)\big)\cdot \dot{\boldsymbol{r}}_2(t)\,dt = 0.$$

Alltså är

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\ell_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\ell_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \tfrac{81}{4}\pi + 0 = \tfrac{81}{4}\pi.$$

METOD 2 (Greens formel)

Med Greens formel kan vi skriva om den slutna linjeintegralen som en dubbelintegral över det inneslutna området

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\iint_D \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = -\iint_D (-y^2 - x^2)\,dx\,dy,$$

där den negativa omloppsriktningen hos C ger minustecknet framför dubbelintegralen.

Eftersom området D är en halvdisk och integranden är $x^2 + y^2$ byter vi till polära koordinater.

$$-\iint_D (-y^2 - x^2)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 r^3\,r\,dr \quad = \pi\,\Big[\,\tfrac{1}{4}r^4\,\Big]_0^3 = \tfrac{81}{4}\pi.$$

16.3.7 Skissera den plana kurvan

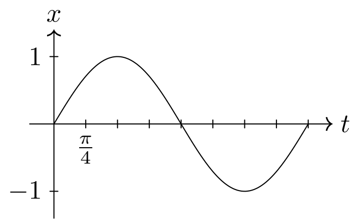
$$C:\ \boldsymbol{r} = \sin t\,\boldsymbol{e}_x + \sin 2t\,\boldsymbol{e}_y \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

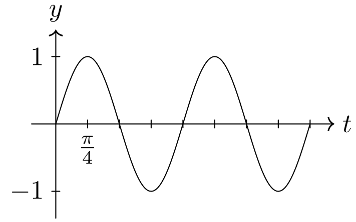
och beräkna

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

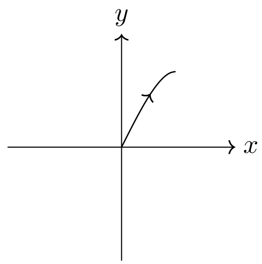
där $\boldsymbol{F} = ye^{x^2}\,\boldsymbol{e}_x + x^3 e^y\,\boldsymbol{e}_y$.

Om vi ritar upp hur x- och y-koordinaten varierar med parametern t får vi figurerna.

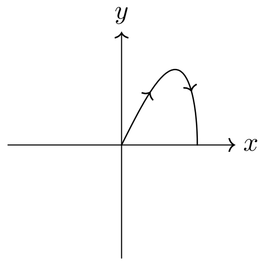




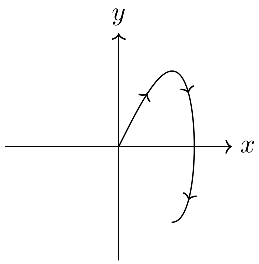
Kurvan startar i origo. När $t = \frac{1}{4}\pi$ har x växt till $\frac{1}{\sqrt{2}}$ medan y nått maxvärdet 1.



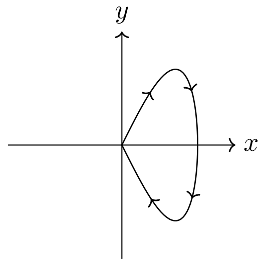
När $t = \frac{1}{2}\pi$ når x sitt maxvärde 1 medan y sjunkit till 0.



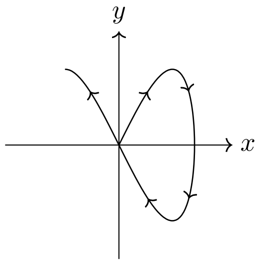
Vid $t = \frac{3}{4}\pi$ antar y sitt minsta värde -1 och $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



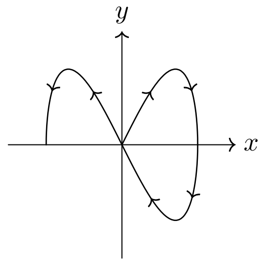
På detta sätt får vi stegvis fram kurvans utseende.



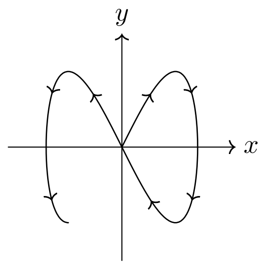
$t = \pi$



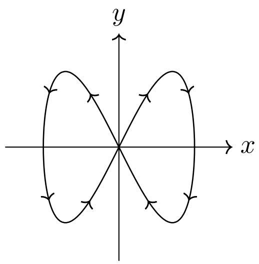
$t = \frac{5}{4}\pi$



$t = \frac{3}{2}\pi$



$t = \frac{7}{4}\pi$



$t = 2\pi$

Först undersöker vi om vektorfältet är konservativt. Eftersom Jakobianen

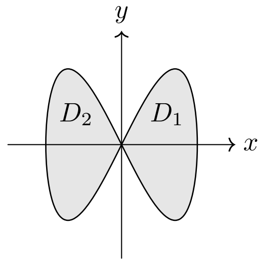
$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} * & e^{x^2} \\ 3x^2e^y & * \end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk är vektorfältet inte konservativt.

Med hjälp av Greens formel får vi att den slutna linjeintegralen är

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\iint_{D_1} \Bigl(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Bigr)\, dx\, dy + \iint_{D_2} \Bigl(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Bigr)\, dx\, dy,$$

där D_1 och D_2 är de två öglor som C innesluter. Vi får ett minustecken framför den första dubbelintegralen eftersom C genomlöper randen i negativ riktning.



Linjeintegralen är alltså lika med

$$-\iint_{D_1} \bigl(3x^2e^y - e^{x^2}\bigr)\, dx\, dy + \iint_{D_2} \bigl(3x^2e^y - e^{x^2}\bigr)\, dx\, dy.$$

Eftersom områdena D_1 och D_2 är varandras spegelbilder i y-axeln och integranden är en jämn funktion i x-led, så är integralerna lika och kancellerar varandra. Linjeintegralen har därmed värdet 0.

16.3.8 Om C är den positivt orienterade randkurvan till ett plant område R som har area A och tyngdpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$, tolka linjeintegralen

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

geometriskt när

a) $\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{e}_y$,

b) $\boldsymbol{F} = xy\,\boldsymbol{e}_x$, och

c) $\boldsymbol{F} = y^2\,\boldsymbol{e}_x + 3xy\,\boldsymbol{e}_y$.

Arean och tyngdpunkten till området R ges av uttrycken

$$A = \iint_R dx\,dy,$$
$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{A}\iint_R (x, y)\,dx\,dy.$$

Vi ska använda Greens formel och skriva om linjeintegralen i uppgiftstexten till en dubbelintegral som vi ska försöka uttrycka i termer av arean A och tyngdpunkten $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$\oint_C (0, x^2)\cdot(dx, dy) = \iint_R \Big(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial\, 0}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = 2\iint_R x\,dx\,dy = 2A\bar{x}.$$

$$\oint_C (xy, 0)\cdot(dx, dy) = \iint_R \Big(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = -\iint_R x\,dx\,dy = -A\bar{x}.$$

$$\oint_C (y^2, 3xy)\cdot(dx, dy) = \iint_R \Big(\frac{\partial(3xy)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = \iint_R (3y - 2y)\,dx\,dy$$
$$= \iint_R y\,dx\,dy = A\bar{y}.$$

Lektion 17, Flervariabelanalys den 23 februari 2000

16.4.2 Använd Gauss sats för att beräkna flödet av

$$\boldsymbol{F} = ye^z\,\boldsymbol{e}_x + x^2e^z\,\boldsymbol{e}_y + xy\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ur sfären S med ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

där $a > 0$.

Flödet ut ur sfären S ges av

$$\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S},$$

som enligt Gauss sats är lika med

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot\big(ye^z, x^2e^z, xy\big)\,dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(ye^z\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(x^2e^z\big) + \frac{\partial}{\partial z}(xy)\Big)\,dV \\
&= \iiint_V (0+0+0)\,dV = 0.
\end{aligned}$$

16.4.4 Använd Gauss sats för att beräkna flödet av

$$\boldsymbol{F} = x^3\,\boldsymbol{e}_x + 3yz^2\,\boldsymbol{e}_y + (3y^2z + x^2)\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ur sfären S med ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

där $a > 0$.

Flödet ut ur sfären S ges av

$$\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

Gauss sats ger att flödet är lika med

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot\big(x^3, 3yz^2, 3y^2z + x^2\big)\,dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3y^2z + x^2)\Big)\,dV \\
&= \iiint_V (3x^2 + 3z^2 + 3y^2)\,dV = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dV,
\end{aligned}$$

där V är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ som innesluts av ytan S. Eftersom området V är helt rotationssymmetriskt och integranden är $x^2 + y^2 + z^2$ inför vi sfäriska koordinater. Området beskrivs då som

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Integranden blir

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

och volymelementet blir

$$dV = r^2 \sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr.$$

Flödet ges alltså av

$$\begin{aligned}
&= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^a r^4\,dr = 3\cdot 2\pi\cdot\Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}\cdot\Big[\tfrac{1}{5}r^5\Big]_0^a \\
&= 3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\tfrac{1}{5}a^5 = \tfrac{12}{5}\pi a^5.
\end{aligned}$$

16.4.8 Beräkna flödet av

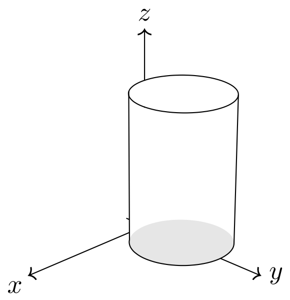
$$\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{e}_x + y^2\,\boldsymbol{e}_y + z^2\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ur randen till cylindern $x^2 + y^2 \leq 2y$, $0 \leq z \leq 4$.

Med kvadratkomplettering kan vi skriva cylinderns ekvation i standardform

$$x^2 + y^2 \leq 2y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Cylindern har alltså mittpunkt i $(x, y) = (0, 1)$ och radie 1. I z-led ligger cylindern mellan $z = 0$ och $z = 4$.

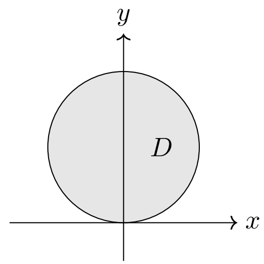


Cylinderns rand består av tre ytstycken, dels cylinderns mantelyta, och dels de två cirkulära ändytorna.

För att beräkna flödet måste vi därför dela upp flödesintegralen i tre integraler över respektive ytstycke. Om vi däremot använder Gauss sats blir flödesintegralen *en* trippelintegral över hela cylindern. Gauss sats ger

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV = \iiint_V \Bigl(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Bigr)\cdot(x^2, y^2, z^2)\,dV \\
&\quad = \iiint_V (2x, 2y, 2z)\,dV = 2\iint_D dx\,dy \int_0^4 (x+y+z)\,dz \\
&\quad = 2\iint_D \Bigl[\,(x+y)z + \tfrac{1}{2}z^2\,\Bigr]_0^4\,dx\,dy = 2\iint_D \Bigl(4(x+y)+8\Bigr)\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

där D är projektionen av cylindern av cylindern på x, y-planet, d.v.s. $D : x^2 + (y-1)^2 \leq 1$.



Integralen över D kan vi dela upp i tre termer

$$8\iint_D x\,dx\,dy + 8\iint_D (y-1)\,dx\,dy + 24\iint_D dx\,dy.$$

Eftersom området D är spegelsymmetrisk i y-axeln och x är en udda funktion är den första integralen lika med 0. I den andra integralen är $y-1$ en udda funktion kring linjen $y = 1$ och D spegelsymmetrisk i samma linje. Den andra integralen är också den noll. Den tredje integralen är 24 gånger områdets area, d.v.s. $24\cdot\pi\cdot 1^2 = 24\pi$.

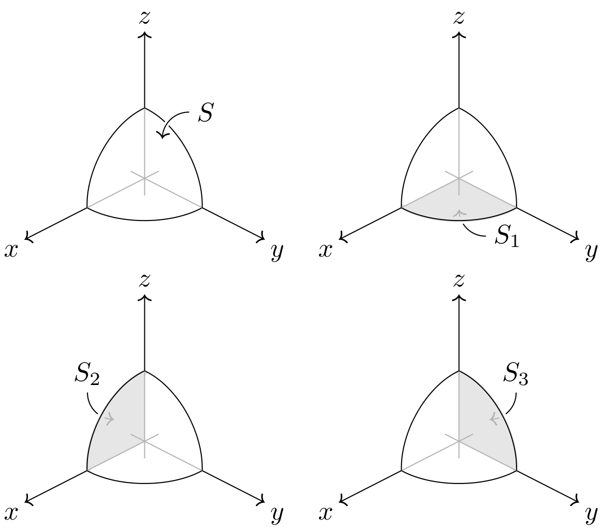
Flödet ut ur cylindern är alltså 24π.

16.4.12 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = (y + xz)\,\boldsymbol{e}_x + (y + yz)\,\boldsymbol{e}_y - (2x + z^2)\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i första oktanten.

Låt S beteckna den del av sfären som ligger i första oktanten. Låt vidare S_1, S_2 och S_3 beteckna de tre sidoytor i koordinatplanen i första oktanten som begränsas av sfären.



Tillsammans innesluter S, S_1, S_2 och S_3 en åttondel av ett klot med radie a. Flödet ut ur denna åttondel är enligt Gauss sats

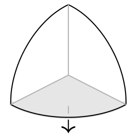
$$\begin{aligned}
&\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_3} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}\\
&\quad= \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV\\
&\quad= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(y + xz, y + yz, -2x - z^2)\,dV\\
&\quad= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}(y + xz) + \frac{\partial}{\partial y}(y + yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-2x - z^2)\Big)\,dV\\
&\quad= \iiint_V (z + 1 + z - 2z)\,dV = \iiint_V dV\\
&\quad= \text{Volym av } V = \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4}{3}\pi a^3 = \tfrac{1}{6}\pi a^3.
\end{aligned}$$

Alltså är

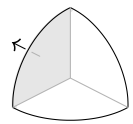
$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \iint_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{S_3} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

På de tre koordinatplanytorna ges ytelementet och vektorfältet av

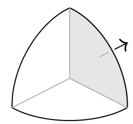
$$S_1: \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= (0, 0, -1)\,dx\,dy\\ \boldsymbol{F}(x, y, 0) &= (y, y, -2x)\end{aligned}$$



$$S_2: \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= (0, -1, 0)\,dx\,dz\\ \boldsymbol{F}(x, 0, z) &= (xz, 0, -2x - z^2)\end{aligned}$$



$$S_3: \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= (-1, 0, 0)\,dy\,dz\\ \boldsymbol{F}(0, y, z) &= (y, y + yz, -z^2)\end{aligned}$$



Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \iint_{S_1} (y, y, -2x)\cdot(0, 0, -1)\,dx\,dy\\
&\quad - \iint_{S_2} (xz, 0, -2x - z^2)\cdot(0, -1, 0)\,dx\,dz\\
&\quad - \iint_{S_3} (y, y + yz, -z^2)\cdot(-1, 0, 0)\,dy\,dz\\
&= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \iint_{S_1} 2x\,dx\,dy - \iint_{S_2} 0\,dx\,dz - \iint_{S_3} -y\,dy\,dz\\
&= \{\,\text{polära koordinater i respektive plan}\,\}\\
&= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^a r^2\,dr + \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^a r^2\,dr\\
&= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - 2\cdot 1\cdot\tfrac{1}{3}a^3 + 1\cdot\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \tfrac{1}{3}a^3.
\end{aligned}$$

16.5.2 Beräkna

$$\oint_C y\,dx - x\,dy + z^2\,dz$$

runt skärningskurvan C mellan cylindern $z = y^2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$, som genomlöps moturs sett från en punkt högt belägen på z-axeln.

Linjeintegralen kan vi skriva som

$$\oint_C y\,dx - x\,dy + z^2\,dz = \oint_C (y, -x, z^2)\cdot(dx, dy, dz) = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Vi ska lösa uppgiften med två metoder.

Metod 1 (explicit uträkning)

Skärningskurvan C uppfyller båda ytornas ekvationer

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$

$$z = y^2. \tag{2}$$

Ekvation (1) ger att kurvans x- och y-koordinater ligger på en cirkel med mittpunkt i origo och radie 2. Vi kan därför beskriva kurvans x- och y-koordinater med standardparametriseringen

$$x = 2\cos t,$$
$$y = 2\sin t.$$

Ekvation (2) ger att

$$z = y^2 = 4\sin^2 t.$$

Eftersom dessa uttryck för x, y och z är 2π-periodiska i t har kurvan parameterformen

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4\sin^2 t) \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Om vi låter t gå från 0 till 2π så genomlöps kurvan i positiv riktning. Vi får

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \big(y(t), -x(t), z(t)^2\big) = \big(2\sin t, -2\cos t, 16\sin^4 t\big),$$

$$d\boldsymbol{r}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \big(-2\sin t, 2\cos t, 8\sin t\,\cos t\big)\,dt.$$

Linjeintegralen blir

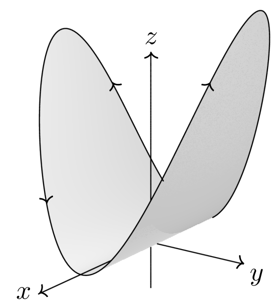
$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot d\boldsymbol{r}(t)\\ &= \int_0^{2\pi} 2\sin t\cdot(-2\sin t)\,dt - 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt + 16\,\sin^4 t\cdot 8\sin t\,\cos t\,dt\\ &= -4\int_0^{2\pi}\big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)\,dt + 128\int_0^{2\pi}\sin^5 t\,\cos t\,dt\\ &= -4\cdot 2\pi + 128\left[\tfrac{1}{6}\sin^6 t\right]_0^{2\pi} = -8\pi + 0 = -8\pi.\end{aligned}$$

Metod 2 (Stokes sats)

Enligt Stokes sats har vi att

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S},$$

för alla ytor S som har C som randkurva och med C positivt orienterad relativt S. I vårt fall kan vi välja ytan S som den del av $z = y^2$ innanför cylindern $x^2+y^2 = 4$.



Då är

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z^2 \end{vmatrix} \\
&= \Big(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z}, -\frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \Big) \\
&= (0-0, -0+0, -1-1) = (0,0,-2),
\end{aligned}
$$

$$
d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \Big)\, dx\, dy = \pm(0, 2y, -1)\, dx\, dy.
$$

För att inducera en positiv orientering av randen ska vi välja minustecknet i $d\boldsymbol{S}$ så att $d\boldsymbol{S}$ pekar uppåt.

Vi får att

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D (0,0,-2) \cdot (0,-2y,1)\, dx\, dy \\
&= -2 \iint_D dx\, dy = -2 \cdot \text{area}(D) = -2 \cdot \pi\, 2^2 = -8\pi,
\end{aligned}
$$

där D är ytan S:s projektion på x,y-planet, d.v.s. $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

16.5.4 Beräkna

$$
\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S},
$$

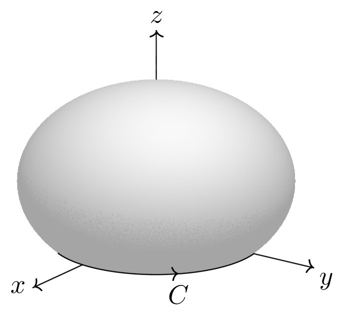
där S är ytan $x^2 + y^2 + 2(z-1)^2 = 6$, $z \geq 0$, $d\boldsymbol{S}$ är riktad ut från S, och

$$
\boldsymbol{F} = (xz - y^3 \cos z)\, \boldsymbol{e}_x + x^3 e^z\, \boldsymbol{e}_y + xyz\, e^{x^2+y^2+z^2}\, \boldsymbol{e}_z.
$$

Vi skriver S i standardform

$$
\Big(\frac{x}{\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{z-1}{\sqrt{3}}\Big)^2 = 1, \quad z \geq 0.
$$

Ytan S är alltså den del av ellipsoiden med mittpunkt i $(0,0,1)$ och halvaxlar $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ och $\sqrt{3}$ som har positiv z-koordinat.



Enligt Stokes sats kan flödesintegralen i uppgiftstexten skrivas

$$
\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r},
$$

där C är randkurvan till S i planet $z = 0$, d.v.s.

$$
x^2 + y^2 + 2(0-1)^2 = 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = 4.
$$

Eftersom $d\boldsymbol{S}$ är utåtriktad induceras en positiv riktning hos C i x,y-planet. Kurvan C, som är en cirkel med mittpunkt i origo och radie 2, kan därför skrivas i parameterformen

$$
\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0) \qquad (0 \leq \underset{\longrightarrow}{t} \leq 2\pi).
$$

Längs kurvan ges vektorfältet och kurvelementet av

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \big(0 - y(t)^3, x(t)^3 \cdot 1, 0\big) = \big(-8\sin^3 t, 8\cos^3 t, 0\big), \\
d\boldsymbol{r}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt = (-2\sin t, 2\cos t, 0)\, dt.
\end{aligned}
$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-8\sin^3 t, 8\cos^3 t, 0\big) \cdot \big(-2\sin t, 2\cos t, 0\big)\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 16\int_0^{2\pi} \bigl(\sin^4 t + \cos^4 t\bigr)\,dt = 16\int_0^{2\pi} \bigl(\tfrac{1}{4}(1-\cos 2t)^2 + \tfrac{1}{4}(1+\cos 2t)^2\bigr)\,dt\\
&= 4\int_0^{2\pi} \bigl(2 + 2\cos^2 2t\bigr)\,dt = 8\int_0^{2\pi} \bigl(1 + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4t)\bigr)\,dt\\
&= 8\int_0^{2\pi} \bigl(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 4t\bigr)\,dt = \{\,\text{integral av cos över en hel period} = 0\,\}\\
&= 12\cdot 2\pi + 0 = 24\pi.
\end{aligned}
$$

16.5.6 Beräkna

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

runt kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{e}_x + \sin t\,\boldsymbol{e}_y + \sin 2t\,\boldsymbol{e}_z \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

där $\boldsymbol{F} = (e^x - y^3)\,\boldsymbol{e}_x + (e^y + x^3)\,\boldsymbol{e}_y + e^z\,\boldsymbol{e}_z$.

Ledtråd: Visa att C ligger på ytan $z = 2xy$.

Låt oss först visa att kurvan C verkligen är sluten och att parametriseringen genomlöper kurvan exakt ett varv.

- Eftersom $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,1) = \boldsymbol{r}(2\pi)$ är kurvan sluten.
- Om vi betraktar C nerprojicerad på x,y-planet,

  $$\boldsymbol{r}_{x,y}(t) = \cos t\,\boldsymbol{e}_x + \sin t\,\boldsymbol{e}_y$$

  så får vi enhetscirkeln genomlöpt ett varv i positiv riktning. Varje (x,y)-värde på C antas alltså exakt en gång av parametriseringen, vilket visar att kurvan genomlöps exakt ett varv.

Vi ska lösa uppgiften med två metoder.

Metod 1 (byte av vektorfält)

Först gör vi det obligatoriska testet om vektorfältet är konservativt.

Vi har att

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & -3y^2 & 0\\ 3x^2 & * & 0\\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk, så vektorfältet är inte konservativt. Däremot ser vi att vektorfältet nästan är konservativt; det är bara index $(1,2)$ och $(2,1)$ som inte är lika. Om vi därför kompletterar $\boldsymbol{F}$ med vektorfältet $\boldsymbol{G} = 3x^2y\,\boldsymbol{e}_x - 3xy^2\,\boldsymbol{e}_y$, d.v.s. betraktar vektorfältet

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G},$$

så får vi ett konservativt vektorfält eftersom

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & 3x^2 - 3y^2 & 0\\ 3x^2 - 3y^2 & * & 0\\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Då har vi alltså att

$$
\begin{aligned}
&\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = 0\\
\Leftrightarrow\qquad &\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r}.
\end{aligned}
$$

Fördelen med $\boldsymbol{G}$ jämfört med $\boldsymbol{F}$ är att $\boldsymbol{G}$ endast har polynomkomponenter som är enklare att integrera analytiskt.

På kurvan C är

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr) &= \bigl(3x(t)^2y(t), -3x(t)y(t)^2, 0\bigr) = \bigl(3\cos^2 t\,\sin t, -3\cos t\,\sin^2 t, 0\bigr),\\
d\boldsymbol{r}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt = \bigl(-\sin t, \cos t, 2\cos 2t\bigr)\,dt.
\end{aligned}
$$

Vi får

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^{2\pi} \boldsymbol{G}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot d\boldsymbol{r}(t)$$

$$= -\int_0^{2\pi} (3\cos^2 t\,\sin t, -3\cos t\,\sin^2 t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 2\cos 2t)\,dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \big(-3\cos^2 t\,\sin^2 t - 3\cos^2 t\,\sin^2 t + 0\big)\,dt$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt = 6\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \tfrac{3}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos^2 2t)\,dt = \tfrac{3}{2}\int_0^{2\pi} \Big(1-\frac{1+\cos 4t}{2}\Big)\,dt$$

$$= \{\,\text{integral av cos över en hel period} = 0\,\}$$

$$= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,2\pi = \tfrac{3}{2}\pi.$$

Metod 2 (Stokes sats)

Enligt Stokes sats är linjeintegralen lika med

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S},$$

där S är en yta med C som randkurva och $d\boldsymbol{S}$ är riktad uppåt eftersom C är positivt orienterad i x,y-planet.

Kurvan befinner sig på ytan $z = 2xy$ eftersom den uppfyller ytans ekvation

$$\text{VL} = z(t) = \sin 2t = 2\cos t\,\sin t = 2x(t)y(t) = \text{HL}.$$

Ytan S kan vi därför välja som det ytstycke av $z = 2xy$ som begränsas av C. Vi har då att

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm(2y, 2x, -1)\,dx\,dy,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x - y^3 & e^y + x^3 & e^z \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2+3y^2),$$

och Stokes sats ger

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_D 3(0, 0, x^2+y^2)\cdot(-2y, -2x, 1)\,dx\,dy$$

där D är ytans projektion på x,y-planet, d.v.s. enhetsdisken.

$$= 3\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \{\,\text{polära koordinater}\,\}$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\,dr = 3\cdot 2\pi\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2}\pi.$$