Lektion 1, Flervariabelanalys den 18 januari 2000

8.2.2 Skissera parameterkurvan

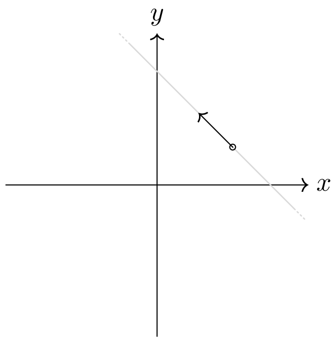
$$\begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 1 + t \end{aligned} \qquad (0 \le t < \infty)$$

och visa dess riktning med en pil. Eliminera sedan parametern och härled kurvans ekvation i x och y vars graf innehåller kurvan.

Om vi skriver om kurvans parametrisering till

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad (0 \le t < \infty),$$

så känner vi igen detta som en parametrisering av en rät linje som innehåller punkten $(2, 1)$ och har riktningen $(-1, 1)$.

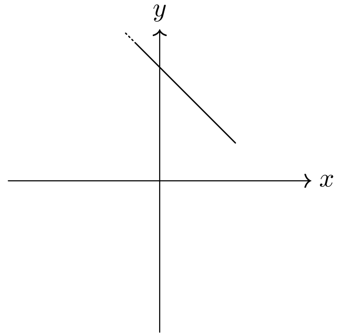


Om vi tillät parametern t löpa från $-\infty$ till ∞ så skulle vi få hela linjen som antyds i figuren ovan. I detta fall startar parametern t från 0, d.v.s. kurvan startar i punkten

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

och sedan antar t alla positiva värden, d.v.s. kurvan fortsätter i riktningen $(-1, 1)$.

En skiss av kurvan blir alltså



Kurvans ekvation får vi genom att eliminera t.

$$x = 2 - t \quad \Leftrightarrow \quad t = 2 - x$$

Detta insatt i y ger

$$y = 1 + t = 1 + (2 - x) \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 3.$$

Anm. Notera att kurvans ekvation är hela linjen medan kurvan bara är en halvlinje.

8.2.4 Skissera parameterkurvan

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+t^2} \\ y &= \frac{t}{1+t^2} \end{aligned} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

och visa dess riktning med en pil. Eliminera sedan parametern och härled kurvans ekvation i x och y vars graf innehåller kurvan.

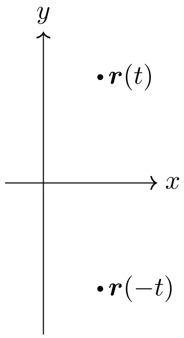
Vi skriver först om parameterkurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Det första vi kan göra är att försöka se symmetrier. I detta fall ser vi att

$$\boldsymbol{r}(-t) = \frac{1}{1+(-t)^2}\begin{pmatrix}1\\-t\end{pmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1\\-t\end{pmatrix},$$

så den punkt som svarar mot parametervärdet $-t$ har samma x-koordinat som punkten med parametervärdet t men omvänt tecken på y-koordinaten.



Kurvan är alltså symmetrisk kring x-axeln eftersom varje positivt parametervärde t har ett motsvarande negativt parametervärde $-t$ som också tillhör parametermängden.

Vi behöver alltså bara skissera kurvan för $0 \le t < \infty$.

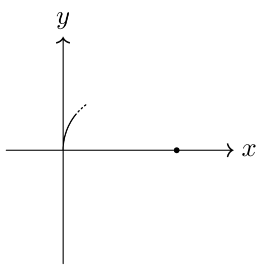
Startpunkten som svarar mot $t = 0$ är

$$\boldsymbol{r}(0) = \frac{1}{1+0^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

För stora t är

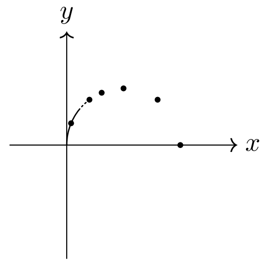
$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} \approx \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/t^2\\1/t\end{pmatrix}$$

så kurvan kommer närma sig origo $(0,0)$ när $t \to \infty$. Dessutom ser vi att x-koordinaten är mycket mindre än y-koordinaten ($t^{-2} \ll t^{-1}$) så kurvan kommer att närma sig origo längs y-axeln.

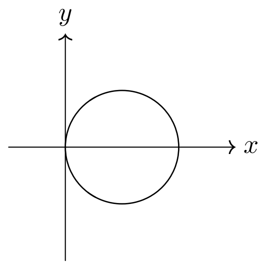


Vi skisserar resten av kurvan genom att välja några parametervärden och förbinda dessa med en kurva,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(0{,}5) &= (0{,}8; 0{,}4)\\ \boldsymbol{r}(1) &= (0{,}5; 0{,}5)\\ \boldsymbol{r}(1{,}5) &= (\tfrac{4}{13}; \tfrac{6}{13})\\ \boldsymbol{r}(2) &= (\tfrac{1}{5}; \tfrac{2}{5})\\ \boldsymbol{r}(5) &= (\tfrac{1}{26}; \tfrac{5}{26})\end{aligned}$$



Kurvskissen blir alltså



Kurvans ekvation får vi genom att eliminera t. Vi noterar att

$$\frac{y}{x} = t.$$

Detta ger att

$$x = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+y^2/x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = x$$
$$\Leftrightarrow \quad \bigl(x-\tfrac{1}{2}\bigr)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Kurvan är alltså en cirkel med mittpunkt i $\bigl(\frac{1}{2}, 0\bigr)$ och radie $\frac{1}{2}$.

8.2.7 Skissera parameterkurvan

$$\begin{aligned} x &= 3\sin \pi t \\ y &= 4\cos \pi t \end{aligned} \qquad (-1 \le t \le 1)$$

och visa dess riktning med en pil. Eliminera sedan parametern och härled kurvans ekvation i x och y.

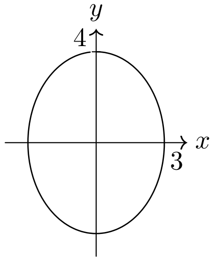
Kurvan är skriven i standardformen för en parametrisering av en ellips. Från parametriseringen ser vi att

$$\frac{x}{3} = \sin \pi t \qquad \text{och} \qquad \frac{y}{4} = \cos \pi t,$$

och den trigonometriska ettan ger att

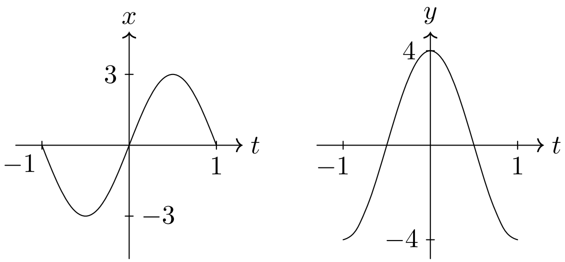
$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t = 1.$$

Alltså är kurvan en del av ellipsens med mittpunkt i origo och halvaxlar 3 och 4.



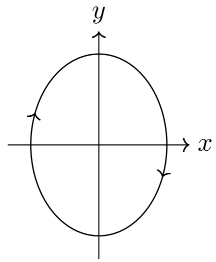
Parameterområdets storlek avgör hur stor del av ellipsen som kurvan upptar.

Då parametern t går från -1 till $+1$ går argumentet till de trigonometriska funktionerna från $-\pi$ till π. Om vi ritar upp hur x- och y-koordinaten beror på parametern t



så ser vi att x-koordinaten startar från 0, går till -3, rör sig sedan till $+3$ och tillbaka till 0. y-koordinaten startar från -4 och går upp till $+4$ för att sedan återvända till -4.

Kurvan beskriver alltså hela ellipsen medsols (negativ riktning) med start i punkten $(0,-4)$.



8.3.2 Finn de punkter där parameterkurvan

$$\begin{aligned} x &= t^2 - 2t \\ y &= t^2 + 2t \end{aligned}$$

har en

a) horisontell tangent,

b) vertikal tangent.

Låt oss först skriva om parameterkurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^2 + 2t \end{pmatrix}.$$

Kurvans riktningsvektor i den punkt med parametervärdet t ges av

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^2 + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 2 \\ 2t + 2 \end{pmatrix}.$$

a) En horisontell tangent har en riktningsvektor med y-komponent 0 och en nollskild x-komponent, d.v.s.

$$\dot{y} = 2t + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = -1.$$

och då är $\dot{x}(-1) = -4 \neq 0$. Kurvan har alltså en horisontell tangent i punkten

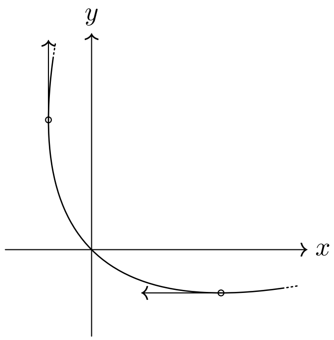
$$\boldsymbol{r}(-1) = \begin{pmatrix} (-1)^2 - 2\cdot(-1) \\ (-1)^2 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) En vertikal tangent har en riktningsvektor med x-komponent 0 och en nollskild y-komponent, d.v.s.

$$\dot{x} = 2t - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 1,$$

med $\dot{y}(1) = 4 \neq 0$. Kurvan har alltså en vertikal tangent i punkten

$$\boldsymbol{r}(1) = \begin{pmatrix} 1^2 - 2\cdot 1 \\ 1^2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



8.3.10 Finn lutningen till kurvan

$$x = t^4 - t^2$$
$$y = t^3 + 2t$$

i punkten med parametervärdet $t = -1$.

Kurvan i vektorform blir

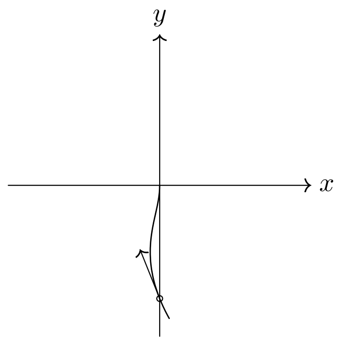
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 - t^2 \\ t^3 + 2t \end{pmatrix}.$$

Riktningsvektorn för kurvan i punkten med parametervärdet $t = -1$ är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(-1) = \begin{pmatrix} 4t^3 - 2t \\ 3t^2 + 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=-1} = \begin{pmatrix} 4(-1)^3 - 2(-1) \\ 3(-1)^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lutningen är

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{5}{-2} = -\tfrac{5}{2}.$$



8.3.14 Finn en parametrisering av tangentlinjen till kurvan

$$\begin{aligned} x &= t - \cos t \\ y &= 1 - \sin t \end{aligned}$$

i punkten som svarar mot parametervärdet $t = \frac{1}{4}\pi$.

En rät linje har parameterformen

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}_0 + s\boldsymbol{v} \qquad (-\infty < s < \infty),$$

där $\boldsymbol{r}_0$ är en punkt på linjen och $\boldsymbol{v}$ är linjens riktning.

Vi vet att tangentlinjen tangerar kurvan i punkten som svarar mot $t = \frac{1}{4}\pi$ så vi kan välja

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} x(t = \frac{1}{4}\pi) \\ y(t = \frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\pi - 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Tangentens riktning är kurvans riktningsvektor i punkten med $t = \frac{1}{4}\pi$,

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t = \frac{1}{4}\pi) \\ \dot{y}(t = \frac{1}{4}\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}\Bigg|_{t=\frac{1}{4}\pi} = \begin{pmatrix} 1 + 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

En parametrisering av tangentlinjen är alltså

$$\boldsymbol{r}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\pi - 1/\sqrt{2} \\ 1 - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 + 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

8.3.20 I vilka punkter är kurvan

$$\begin{aligned} x &= t^3 \\ y &= t - \sin t \end{aligned}$$

inte regulär.

Eftersom komponenterna till kurvan är kontinuerligt deriverbara funktioner av parametern t så är de enda punkter där kurvan inte behöver vara regulär de punkter där riktningsvektorn $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{0}$.

I vårt fall är

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t - \sin t \end{pmatrix},$$

varför

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$

Vi ser att riktningsvektorn är noll i punkten som svarar mot $t = 0$, d.v.s. i punkten $\boldsymbol{r}(0) = (0,0)$. Kurvan är alltså möjligtvis irregulär i origo (men behöver inte vara det).

Vi avgör regulariteten genom att undersöka gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0} (\text{lutningen hos riktningsvektorn i } \boldsymbol{r}(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2}.$$

Om gränsvärdet existerar är kurvan regulär annars inte.

Vi har

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} &= \{ \text{Maclaurinutveckling} \} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1 - \bigl(1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4)\bigr)}{3t^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \bigl(\tfrac{1}{6} + O(t^2)\bigr) = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

Alltså är kurvan regulär överallt.

8.4.2 Bestäm båglängden av kurvan

$$\begin{aligned} x &= 1 + t^3 \\ y &= 1 - t^2 \end{aligned} \qquad (-1 \le t \le 2).$$

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + t^2 \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}.$$

Riktningsvektorn är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Båglängden ges av formeln

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{2} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{(3t^2)^2 + (-2t)^2}\,dt = \int_{-1}^{2} \sqrt{9t^4 + 4t^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^{2} 3|t|\sqrt{t^2 + \tfrac{4}{9}}\,dt = \int_{-1}^{0} -3t\sqrt{t^2 + \tfrac{4}{9}}\,dt + \int_{0}^{2} 3t\sqrt{t^2 + \tfrac{4}{9}}\,dt \\ &= \left\{\, s = t^2 + \tfrac{4}{9};\ ds = 2t\,dt \,\right\} = -\tfrac{3}{2}\int_{13/9}^{4/9} \sqrt{s}\,ds + \tfrac{3}{2}\int_{4/9}^{40/9} \sqrt{s}\,ds \\ &= -\big[\, s\sqrt{s}\,\big]_{13/9}^{4/9} + \big[\, s\sqrt{s}\,\big]_{4/9}^{40/9} \\ &= -\left(\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3} - \tfrac{13}{9}\cdot\tfrac{\sqrt{13}}{3}\right) + \left(\tfrac{40}{9}\cdot\tfrac{\sqrt{40}}{3} - \tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{2}{3}\right) = \frac{13\sqrt{13} + 40\sqrt{40} - 16}{27}. \end{aligned}$$

8.4.6 Bestäm längden av kurvan

$$\begin{aligned} x &= \cos t + t\sin t \\ y &= \sin t - t\cos t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix}$$

Riktningsvektorn är

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix}.$$

Båglängden ges av formeln

$$\begin{aligned} L &= \int_{0}^{2\pi} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \int_{0}^{2\pi} \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\,dt \\ &= \int_{0}^{2\pi} |t|\,dt = \big[\, \tfrac{1}{2}t^2 \,\big]_{0}^{2\pi} = 2\pi^2. \end{aligned}$$

8.4.12 Finn arean av ytan som uppstår då kurvan

$$\begin{aligned} x &= e^t\cos t \\ y &= e^t\sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le \tfrac{1}{2}\pi)$$

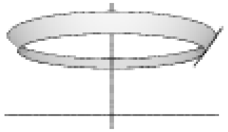
roteras kring y-axeln.

Först skriver vi kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t\sin t \end{pmatrix},$$

som har riktningsvektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix}.$$



Ytelementet till rotationsytan ges av

$$ds = 2\pi\, x(t)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt$$

Den totala arean blir

$$\begin{aligned}
A &= \int ds = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^t \cos t \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}\, dt \\
&= \cdots = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^{2t} \cos t\, dt = \{\text{ partiell integration }\} \\
&= 2\pi\sqrt{2}\, \big[\, e^{2t} \sin t\, \big]_0^{\pi/2} - 2\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} 2e^{2t} \cdot \sin t\, dt \\
&= 2\pi\sqrt{2}\, e^{\pi} - 0 - 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^{2t} \sin t\, dt = \{\text{ partiell integration }\} \\
&= 2\pi\sqrt{2}\, e^{\pi} - 4\pi\sqrt{2}\, \big[-e^{2t} \cos t\, \big]_0^{\pi/2} + 4\pi\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} 2e^{2t} \cdot (-\cos t)\, dt \\
&= 2\pi\sqrt{2}\, e^{\pi} - 4\pi\sqrt{2} - 4 \cdot A
\end{aligned}$$

Ur detta samband löser vi ut A,

$$A = \frac{2\pi\sqrt{2}\, (e^{\pi} - 2)}{5}.$$

8.4.14 Finn arean av ytan som uppstår då kurvan

$$\begin{aligned} x &= 3t^2 \\ y &= 2t^3 \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 1)$$

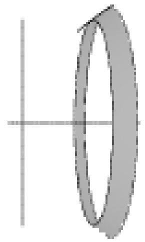
roteras kring x-axeln.

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix},$$

och räknar ut dess riktningsvektor

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{pmatrix}.$$



Ytelementet till rotationsytan ges av

$$ds = 2\pi\, y(t)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt$$

Den totala arean blir

$$A = \int ds = 2\pi \int_0^1 2t^3 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2}\, dt = 24\pi \int_0^1 t^4 \sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

För integraler av denna typ är standardmetoden att substituera $t = \tan\theta$ och då förenkla $\sqrt{1+t^2}$ till $1/|\cos\theta\,|$,

$$\begin{aligned}
&= \Big\{\, t = \tan\theta\,;\ dt = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\,;\ 0 \le \theta \le \pi/4 \,\Big\} \\
&= 24\pi \int_0^{\pi/4} \tan^4\theta\, \frac{1}{|\cos\theta|}\, \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^4\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta \\
&= 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4\theta}{\cos^7\theta}\, d\theta = 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4\theta}{\cos^8\theta}\, \cos\theta\, d\theta \\
&= \{\text{ trigonometriska ettan }\} = 24\pi \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4\theta}{\big(1 - \sin^2\theta\big)^4}\, \cos\theta\, d\theta \\
&= \{\, s = \sin\theta\,;\ ds = \cos\theta\, d\theta\,;\ 0 \le s \le 1/\sqrt{2} \,\} = 24\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{s^4}{(1 - s^2)^4}\, ds.
\end{aligned}$$

Nu har vi nått en rationell integrand och den kan vi integrera genom en partialbråkuppdelning, d.v.s. ansätta

$$\frac{s^4}{(1-s^2)^4} = \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} + \frac{E}{(s-1)^4} + \frac{F}{(s+1)} + \frac{G}{(s+1)^2} + \frac{H}{(s+1)^3} + \frac{I}{(s+1)^4},$$

men detta kommer att leda till mycket arbete. Ett alternativ är att succesivt lägga till och dra ifrån lämpliga termer så att täljaren och nämnaren kan förkortas,

$$\begin{aligned}\frac{s^4}{(1-s^2)^4} &= \frac{s^4-1+1}{(s^2-1)^4} = \frac{(s^2-1)(s^2+1)}{(s^2-1)^4} + \frac{1}{(s^2-1)^4}\\ &= \frac{s^2+1}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4} = \frac{s^2-1+2}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4}\\ &= \frac{1}{(s^2-1)^2} + \frac{2}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4}.\end{aligned}$$

Areaintegralen är alltså lika med

$$A = 24\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(s^2-1)^2} + \frac{2}{(s^2-1)^3} + \frac{1}{(s^2-1)^4} \right) ds.$$

Här kan vi notera att alla tre integraltermer är i formen

$$I_n = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^n}.$$

Just denna typ av integraler kan man i många fall beräkna genom att härleda en rekursionsformel med hjälp av partialintegrering, d.v.s. uttrycka I_n i termer av $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots, I_1$. I vårt fall är

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^n} = \int_0^{1/\sqrt{2}} 1 \cdot \frac{1}{(s^2-1)^n}\,ds = \{\,\text{partiell integration}\,\}\\ &= \left[s \cdot \frac{1}{(s^2-1)^n} \right]_0^{1/\sqrt{2}} - \int_0^{1/\sqrt{2}} s \cdot \frac{-n\cdot 2s}{(s^2-1)^{n+1}}\,ds\\ &= (-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{2}} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{s^2}{(s^2-1)^{n+1}}\,ds\\ &= (-1)^n\, 2^{n-1/2} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{s^2-1+1}{(s^2-1)^{n+1}}\,ds\\ &= (-1)^n\, 2^{n-1/2} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^n} + 2n \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{(s^2-1)^{n+1}}\\ &= (-1)^n\, 2^{n-1/2} + 2n\, I_n + 2n\, I_{n+1}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n-3/2}}{n} - \frac{2n-1}{2n}\, I_n. \qquad (*)$$

Om vi börjar med den enklaste av integralerna I_n, d.v.s. I_1, så är den ganska enkel att beräkna med en partialbråkuppdelning

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{ds}{s^2-1} = \tfrac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) ds = \tfrac{1}{2} \left[\log\left| \frac{s-1}{s+1} \right| \right]_0^{1/\sqrt{2}}\\ &= \tfrac{1}{2} \log\left| \frac{1/\sqrt{2}-1}{1/\sqrt{2}+1} \right| - 0 = \tfrac{1}{2} \log\left| \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \right| = \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\\ &= \tfrac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \log(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

Sedan kan vi använda rekursionsformeln $(*)$ för att bestämma de sökta integralerna I_2, I_3 och I_4,

$$\begin{aligned}I_2 &= \tfrac{(-1)^2\, 2^{-1/2}}{1} - \tfrac{2\cdot 1-1}{2\cdot 1}\, I_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2} \log(\sqrt{2}-1),\\ I_3 &= \tfrac{(-1)^3\, 2^{1/2}}{2} - \tfrac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}\, I_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2} \log(\sqrt{2}-1) \Big)\\ &= -\tfrac{7}{4\sqrt{2}} + \tfrac{3}{8} \log(\sqrt{2}-1),\\ I_4 &= \tfrac{(-1)^4\, 2^{3/2}}{3} - \tfrac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3}\, I_3 = \tfrac{2\sqrt{2}}{3} - \tfrac{5}{6}\Big(-\tfrac{7}{4\sqrt{2}} + \tfrac{3}{8} \log(\sqrt{2}-1) \Big)\\ &= \tfrac{67}{24\sqrt{2}} - \tfrac{15}{48} \log(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

Sammanställer vi uträkningarna fås

$$\begin{aligned}A &= 24\pi\big(I_2 + 2I_3 + I_4\big) = 24\pi\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2} \log(\sqrt{2}-1)\\ &\qquad + 2\Big(-\tfrac{7}{4\sqrt{2}} + \tfrac{3}{8} \log(\sqrt{2}-1) \Big) + \tfrac{67}{24\sqrt{2}} - \tfrac{15}{48} \log(\sqrt{2}-1) \Big)\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\pi\, \big(24 - 7\cdot 12 + 67\big) + \pi\, \big(-12 + 6\cdot 3 - \tfrac{15}{2}\big) \log(\sqrt{2}-1)\\ &= \tfrac{7}{\sqrt{2}}\pi - \tfrac{3}{2}\pi \log(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

8.5.4 Transformera den polära ekvationen

$$r = \sin\theta + \cos\theta$$

till kartesiska koordinater och bestäm vilken kurva ekvationen beskriver.

Multiplicera båda leden i den polära ekvationen med r,

$$\begin{aligned} \text{VL} &= r^2 = x^2 + y^2, \\ \text{HL} &= r\sin\theta + r\cos\theta = x + y. \end{aligned}$$

Ekvationen i kartesiska koordinater är alltså

$$x^2 - x + y^2 - y = 0.$$

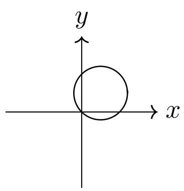
Kvadratkomplettera i x,

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + y^2 - y = 0.$$

Kvadratkomplettera i y,

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Ekvationen beskriver alltså en cirkel med mittpunkt i $\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$ och radie $1/\sqrt{2}$.



8.5.10 Transformera den polära ekvationen

$$r = \frac{2}{2 - \cos\theta}$$

till kartesiska koordinater och bestäm vilken kurva ekvationen beskriver.

Förläng med $2 - \cos\theta$,

$$\begin{aligned} r(2 - \cos\theta) &= 2, \\ 2r - r\cos\theta &= 2, \\ 2r - x &= 2. \end{aligned}$$

Samla r i ena ledet,

$$r = 1 + \tfrac{1}{2}x.$$

Kvadrera

$$\begin{aligned} r^2 &= 1 + \tfrac{1}{4}x^2 + x, \\ x^2 + y^2 &= 1 + \tfrac{1}{4}x^2 + x. \end{aligned}$$

Alltså är ekvationen

$$\tfrac{3}{4}x^2 + y^2 - x = 1.$$

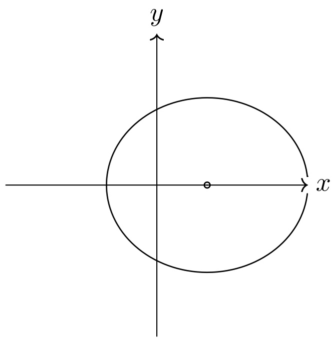
Kvadratkomplettera i x,

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{4}(x - \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{1}{3} + y^2 &= 1, \\ \tfrac{3}{4}(x - \tfrac{2}{3})^2 + y^2 &= \tfrac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ekvationen börjar påminna om ellipsens ekvation. Låt oss skriva om ekvationen i ellipsens standardform

$$\left(\frac{x - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2/\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

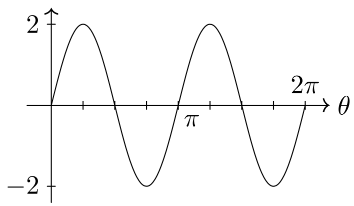
Ekvationen beskriver en ellips med mittpunkt i $(\frac{2}{3}, 0)$ och halvaxlar $\frac{4}{3}$ och $\frac{2}{\sqrt{3}}$.



8.5.18 Skissera kurvan som ges av den polära ekvationen

$$r = 2\sin 2\theta.$$

Vi ritar först upp hur VL beror av vinkeln θ.



Detta diagram visar alltså hur radien r varierar när θ går från 0 till 2π. För att underlätta ritandet av kurvan ritar vi några ögonblicksbilder vid de tidpunkter då radien antingen är noll eller antar ett max/min.