Lektion 16, Flervariabelanalys den 22 februari 2000

16.1.2 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{e}_x + x\,\boldsymbol{e}_y.$$

Divergensen och rotationen ges av

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(y,x,0)\\ &= \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial\,0}{\partial z} = 0+0+0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(y,x,0) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & x & 0\end{vmatrix}\\ &= \Big(\frac{\partial\,0}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial z},-\frac{\partial\,0}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial z},\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}\Big) = (0,0,0).\end{aligned}$$

Anm. När div $\boldsymbol{F} = 0$ sägs vektorfältet vara källfritt, och när rot $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ sägs vektorfältet vara virvelfritt.

16.1.4 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = yz\,\boldsymbol{e}_x + xz\,\boldsymbol{e}_y + xy\,\boldsymbol{e}_z.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(yz,xz,xy)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(yz)+\frac{\partial}{\partial y}(xz)+\frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0+0+0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(yz,xz,xy) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ yz & xz & xy\end{vmatrix}\\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial y}(xy)-\frac{\partial}{\partial z}(xz),-\frac{\partial}{\partial x}(xy)+\frac{\partial}{\partial z}(yz),\frac{\partial}{\partial x}(xz)-\frac{\partial}{\partial y}(yz)\Big)\\ &= (x-x,-y+y,z-z) = (0,0,0).\end{aligned}$$

16.1.6 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = xy^2\,\boldsymbol{e}_x - yz^2\,\boldsymbol{e}_y + zx^2\,\boldsymbol{e}_z.$$

Vi har

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\boldsymbol{F} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(xy^2,-yz^2,zx^2)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(-yz^2)+\frac{\partial}{\partial z}(zx^2) = y^2-z^2+x^2 = x^2+y^2-z^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} &= \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times(xy^2,-yz^2,zx^2)\\ &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & -yz^2 & zx^2\end{vmatrix}\\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial y}(zx^2)-\frac{\partial}{\partial z}(-yz^2),-\frac{\partial}{\partial x}(zx^2)+\frac{\partial}{\partial z}(xy^2),\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2)-\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\Big)\\ &= (0+2yz,-2xz+0,0-2xy) = (2yz,-2xz,-2xy).\end{aligned}$$

16.1.8 Beräkna div $\boldsymbol{F}$ och rot $\boldsymbol{F}$ av

$$\boldsymbol{F} = f(z)\,\boldsymbol{e}_x - f(z)\,\boldsymbol{e}_y.$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \nabla\cdot\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(f(z),-f(z),0)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}f(z) + \frac{\partial}{\partial y}\big(-f(z)\big) + \frac{\partial}{\partial z}0\\
&= 0+0+0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \nabla\times\boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\times\big(f(z),-f(z),0\big)\\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f(z) & -f(z) & 0 \end{vmatrix}\\
&= \Big(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\big(-f(z)\big), -\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}f(z), \frac{\partial}{\partial x}\big(-f(z)\big) - \frac{\partial}{\partial y}f(z)\Big)\\
&= \big(0+f'(z), -0+f'(z), 0-0\big) = \big(f'(z), f'(z), 0\big).
\end{aligned}$$

16.3.2 Beräkna

$$\oint_C (x^2-xy)\,dx + (xy-y^2)\,dy$$

medurs runt triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,0)$.

Linjeintegralen kan vi skriva om som

$$\oint_C (x^2-xy, xy-y^2)\cdot(dx,dy) = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Först undersöker vi om $\boldsymbol{F}$ är konservativ genom att kontrollera om $\boldsymbol{F}$:s Jakobian är symmetrisk,

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -x\\ y & * \end{pmatrix},$$

vilket den inte är.

Istället för att räkna ut linjeintegralen explicit längs de tre kantlinjerna använder vi Greens formel och skriver om linjeintegralen till en dubbelintegral

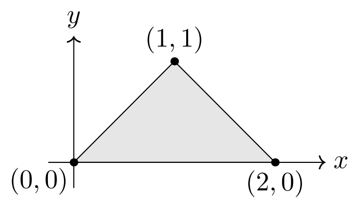
$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\iint_T \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\,dx\,dy,$$

där minustecknet uppstår eftersom kurvan C genomlöper triangeln T:s kantlinjer i negativ riktning (medurs).

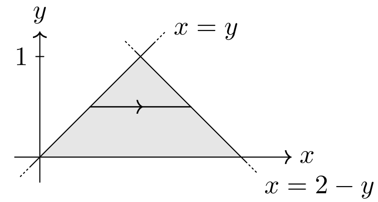
I vårt fall blir dubbelintegralen

$$-\iint_T (y+x)\,dx\,dy.$$

Om vi ritar upp triangeln T



så ser vi att den är enklast att först integrera i x-led. För ett givet y-värde ska x gå från kurvan $x=y$ till kurvan $x=2-y$,



och y ska sedan gå från 0 till 1. Området beskrivs alltså av

$$0\le y\le 1,\quad y\le x\le 2-y.$$

Vi har alltså att

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= -\iint_T (x+y)\,dx\,dy = -\int_0^1 dy\int_y^{2-y}(x+y)\,dx \\
&= -\int_0^1 dy\Big[\tfrac{1}{2}x^2+xy\Big]_y^{2-y} = -\int_0^1\Big(\tfrac{1}{2}(2-y)^2+(2-y)y-\tfrac{1}{2}y^2-y^2\Big)\,dy \\
&= -\int_0^1 \big(2-2y^2\big)\,dy = -\Big[2y-\tfrac{2}{3}y^3\Big]_0^1 = -\tfrac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

16.3.4 Beräkna

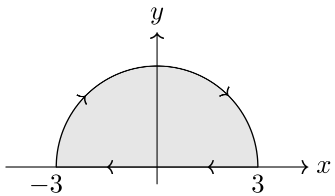
$$\oint_C x^2y\,dx - xy^2\,dy$$

där C är randen till området $0\le y\le\sqrt{9-x^2}$ genomlöpt medurs.

Olikheten $y\le\sqrt{9-x^2}$ kan vi efter kvadrering skriva som

$$y^2\le 9-x^2,\quad y\ge 0 \qquad\Leftrightarrow\qquad x^2+y^2\le 9,\quad y\ge 0.$$

Området består alltså av den övre halvan av cirkeldisken med mittpunkt i origo och radie 3.



Linjeintegralen kan skrivas

$$\oint_C (x^2y,-xy^2)\cdot(dx,dy) = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Vi undersöker först om vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt. Jakobianen till $\boldsymbol{F}$,

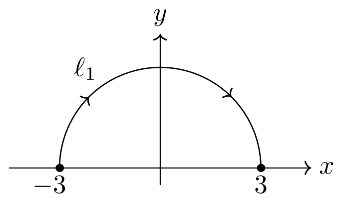
$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} * & x^2 \\ -y^2 & * \end{pmatrix},$$

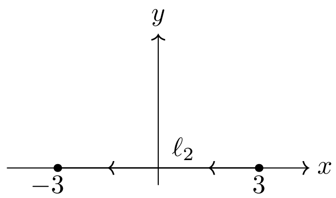
är inte symmetrisk så $\boldsymbol{F}$ är inte konservativ.

Vi ska lösa uppgiften med två metoder.

Metod 1 (explicit uträkning)

Områdets rand består av två randkurvor, dels halvcirkeln $x^2+y^2=9$ i övre halvplanet från $(-3,0)$ till $(3,0)$, dels den räta linjen från $(3,0)$ till $(-3,0)$.





Dessa två randkurvor kan vi parametrisera som

$$
\begin{aligned}
&\ell_1:\quad \boldsymbol{r}_1(t)=(3\cos t, 3\sin t) &&(0\le \underset{\leftarrow}{t}\le\pi),\\
&\ell_2:\quad \boldsymbol{r}_2(t)=(t,0) &&(-3\le \underset{\leftarrow}{t}\le 3),
\end{aligned}
$$

där pilen under parametern anger i vilken riktning parametern löper.

På de två randkurvorna är

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_1(t)\big) &= (x^2y,-xy^2) = \big(3^2\cos^2 t\cdot 3\sin t, -3\cos t\cdot 3^2\sin^2 t\big)\\
&= \big(27\cos^2 t\,\sin t, -27\cos t\,\sin^2 t\big),\\
d\boldsymbol{r}_1(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}_1(t)\,dt = (-3\sin t, 3\cos t)\,dt,\\
\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_2(t)\big) &= (x^2y,-xy^2) = \big((-t)^2\cdot 0, -(-t)\cdot 0^2\big) = (0,0).
\end{aligned}
$$

Linjeintegralen över den slutna kurvan C är summan av linjeintegralen över ℓ_1

och ℓ_2.

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\pi}^{0} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_1(t)\big)\cdot d\boldsymbol{r}_1(t) \\
&= -\int_0^{\pi} \big(27\cos^2 t\,\sin t, -27\cos t\,\sin^2 t\big)\cdot(-3\sin t, 3\cos t)\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} \big(-81\cos^2 t\,\sin^2 t - 81\cos^2 t\,\sin^2 t\big)\,dt \\
&= 162\int_0^{\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt = \tfrac{81}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 2t\,dt \\
&= \tfrac{81}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \tfrac{81}{4}\Big[\,t - \tfrac{1}{4}\sin 4t\,\Big]_0^{\pi} = \tfrac{81}{4}\pi
\end{aligned}$$

$$\int_{\ell_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{3}^{-3} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_2(t)\big)\cdot \dot{\boldsymbol{r}}_2(t)\,dt = 0.$$

Alltså är

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\ell_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\ell_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \tfrac{81}{4}\pi + 0 = \tfrac{81}{4}\pi.$$

Metod 2 (Greens formel)

Med Greens formel kan vi skriva om den slutna linjeintegralen som en dubbelintegral över det inneslutna området

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\iint_D \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = -\iint_D (-y^2 - x^2)\,dx\,dy,$$

där den negativa omloppsriktningen hos C ger minustecknet framför dubbelintegralen.

Eftersom området D är en halvdisk och integranden är $x^2 + y^2$ byter vi till polära koordinater.

$$-\iint_D (-y^2 - x^2)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 r^3\,r\,dr \quad = \pi\Big[\tfrac{1}{4}r^4\Big]_0^3 = \tfrac{81}{4}\pi.$$

16.3.7 Skissera den plana kurvan

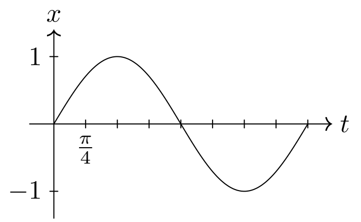
$$C:\ \boldsymbol{r} = \sin t\,\boldsymbol{e}_x + \sin 2t\,\boldsymbol{e}_y \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

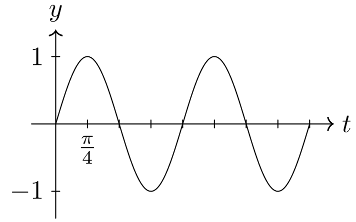
och beräkna

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

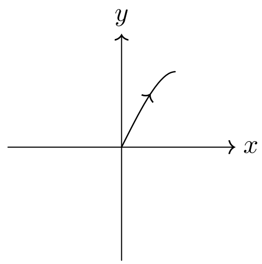
där $\boldsymbol{F} = ye^{x^2}\,\boldsymbol{e}_x + x^3 e^y\,\boldsymbol{e}_y$.

Om vi ritar upp hur x- och y-koordinaten varierar med parametern t får vi figurerna.

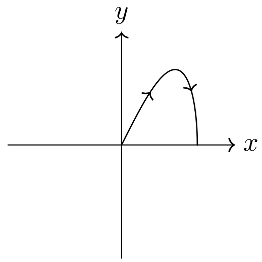




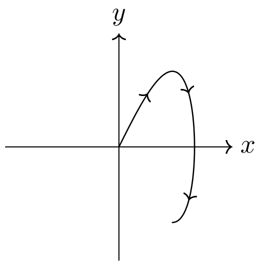
Kurvan startar i origo. När $t = \frac{1}{4}\pi$ har x växt till $\frac{1}{\sqrt{2}}$ medan y nått maxvärdet 1.



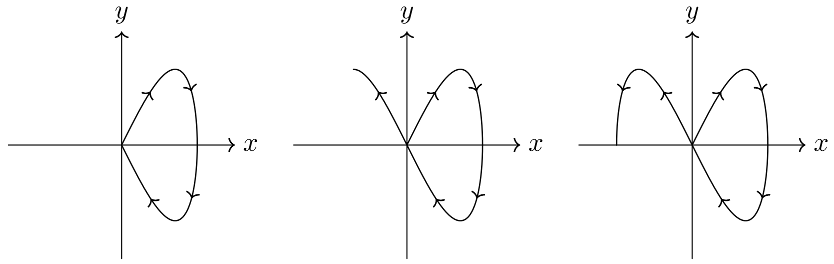
När $t = \frac{1}{2}\pi$ når x sitt maxvärde 1 medan y sjunkit till 0.



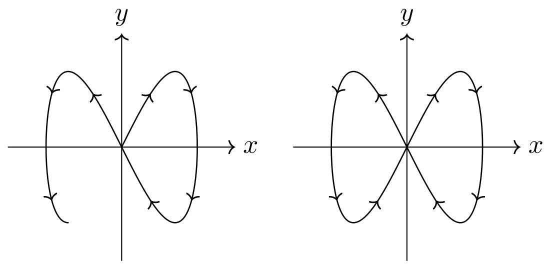
Vid $t = \frac{3}{4}\pi$ antar y sitt minsta värde -1 och $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



På detta sätt får vi stegvis fram kurvans utseende.



$t = \pi$ $\qquad$ $t = \frac{5}{4}\pi$ $\qquad$ $t = \frac{3}{2}\pi$



$t = \frac{7}{4}\pi$ $\qquad$ $t = 2\pi$

Först undersöker vi om vektorfältet är konservativt. Eftersom Jakobianen

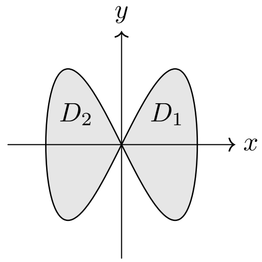
$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} * & e^{x^2} \\ 3x^2e^y & * \end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk är vektorfältet inte konservativt.

Med hjälp av Greens formel får vi att den slutna linjeintegralen är

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\iint_{D_1} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)\, dx\, dy + \iint_{D_2} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)\, dx\, dy,$$

där D_1 och D_2 är de två öglor som C innesluter. Vi får ett minustecken framför den första dubbelintegralen eftersom C genomlöper randen i negativ riktning.



Linjeintegralen är alltså lika med

$$-\iint_{D_1} \big(3x^2e^y - e^{x^2}\big)\, dx\, dy + \iint_{D_2} \big(3x^2e^y - e^{x^2}\big)\, dx\, dy.$$

Eftersom områdena D_1 och D_2 är varandras spegelbilder i y-axeln och integranden är en jämn funktion i x-led, så är integralerna lika och kancellerar varandra. Linjeintegralen har därmed värdet 0.

16.3.8 Om C är den positivt orienterade randkurvan till ett plant område R som har area A och tyngdpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$, tolka linjeintegralen

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

geometriskt när

a) $\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{e}_y$,

b) $\boldsymbol{F} = xy\,\boldsymbol{e}_x$, och

c) $\boldsymbol{F} = y^2\,\boldsymbol{e}_x + 3xy\,\boldsymbol{e}_y$.

Arean och tyngdpunkten till området R ges av uttrycken

$$A = \iint_R dx\,dy,$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{A} \iint_R (x, y)\,dx\,dy.$$

Vi ska använda Greens formel och skriva om linjeintegralen i uppgiftstexten till en dubbelintegral som vi ska försöka uttrycka i termer av arean A och tyngdpunkten $(\bar{x}, \bar{y})$.

$$\oint_C (0, x^2) \cdot (dx, dy) = \iint_R \Big(\frac{\partial x^2}{\partial x} - \frac{\partial\, 0}{\partial y} \Big)\,dx\,dy = 2 \iint_R x\,dx\,dy = 2A\bar{x}.$$

$$\oint_C (xy, 0) \cdot (dx, dy) = \iint_R \Big(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial (xy)}{\partial y} \Big)\,dx\,dy = -\iint_R x\,dx\,dy = -A\bar{x}.$$

$$\oint_C (y^2, 3xy) \cdot (dx, dy) = \iint_R \Big(\frac{\partial (3xy)}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial y} \Big)\,dx\,dy = \iint_R (3y - 2y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_R y\,dx\,dy = A\bar{y}.$$