Lektion 17, Flervariabelanalys den 23 februari 2000

16.4.2 Använd Gauss sats för att beräkna flödet av

$$\boldsymbol{F} = ye^z\,\boldsymbol{e}_x + x^2e^z\,\boldsymbol{e}_y + xy\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ur sfären S med ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

där $a > 0$.

Flödet ut ur sfären S ges av

$$\oiint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S},$$

som enligt Gauss sats är lika med

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) \cdot \big(ye^z, x^2e^z, xy\big)\, dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(ye^z\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(x^2e^z\big) + \frac{\partial}{\partial z}(xy)\Big)\, dV \\
&= \iiint_V (0+0+0)\, dV = 0.
\end{aligned}$$

16.4.4 Använd Gauss sats för att beräkna flödet av

$$\boldsymbol{F} = x^3\,\boldsymbol{e}_x + 3yz^2\,\boldsymbol{e}_y + (3y^2z + x^2)\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ur sfären S med ekvationen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

där $a > 0$.

Flödet ut ur sfären S ges av

$$\oiint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

Gauss sats ger att flödet är lika med

$$\begin{aligned}
\oiint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) \cdot \big(x^3, 3yz^2, 3y^2z + x^2\big)\, dV \\
&= \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(3yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3y^2z + x^2)\Big)\, dV \\
&= \iiint_V (3x^2 + 3z^2 + 3y^2)\, dV = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dV,
\end{aligned}$$

där V är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ som innesluts av ytan S. Eftersom området V är helt rotationssymmetriskt och integranden är $x^2 + y^2 + z^2$ inför vi sfäriska koordinater. Området beskrivs då som

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Integranden blir

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

och volymelementet blir

$$dV = r^2 \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr.$$

Flödet ges alltså av

$$\begin{aligned}
&= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^a r^4\, dr = 3 \cdot 2\pi \cdot \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi} \cdot \Big[\tfrac{1}{5}r^5\Big]_0^a \\
&= 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{5}a^5 = \tfrac{12}{5}\pi a^5.
\end{aligned}$$

16.4.8 Beräkna flödet av

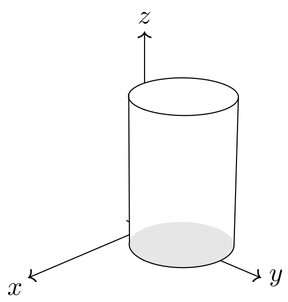
$$\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{e}_x + y^2\,\boldsymbol{e}_y + z^2\,\boldsymbol{e}_z$$

ut ur randen till cylindern $x^2 + y^2 \le 2y$, $0 \le z \le 4$.

Med kvadratkomplettering kan vi skriva cylinderns ekvation i standardform

$$x^2 + y^2 \le 2y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 \le 1.$$

Cylindern har alltså mittpunkt i $(x, y) = (0, 1)$ och radie 1. I z-led ligger cylindern mellan $z = 0$ och $z = 4$.

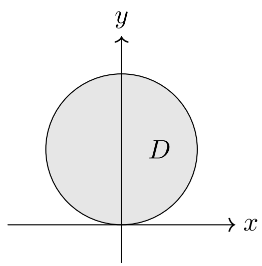


Cylinderns rand består av tre ytstycken, dels cylinderns mantelyta, och dels de två cirkulära ändytorna.

För att beräkna flödet måste vi därför dela upp flödesintegralen i tre integraler över respektive ytstycke. Om vi däremot använder Gauss sats blir flödesintegralen *en* trippelintegral över hela cylindern. Gauss sats ger

$$\begin{aligned}
&\oiint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV = \iiint_V \Bigl(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Bigr)\cdot(x^2, y^2, z^2)\,dV \\
&\quad = \iiint_V (2x, 2y, 2z)\,dV = 2\iint_D dx\,dy \int_0^4 (x+y+z)\,dz \\
&\quad = 2\iint_D \Bigl[\,(x+y)z + \tfrac{1}{2}z^2\,\Bigr]_0^4 dx\,dy = 2\iint_D \Bigl(4(x+y)+8\Bigr)\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

där D är projektionen av cylindern av cylindern på x, y-planet, d.v.s. $D : x^2 + (y-1)^2 \le 1$.



Integralen över D kan vi dela upp i tre termer

$$8\iint_D x\,dx\,dy + 8\iint_D (y-1)\,dx\,dy + 24\iint_D dx\,dy.$$

Eftersom området D är spegelsymmetrisk i y-axeln och x är en udda funktion är den första integralen lika med 0. I den andra integralen är $y - 1$ en udda funktion kring linjen $y = 1$ och D spegelsymmetrisk i samma linje. Den andra integralen är också den noll. Den tredje integralen är 24 gånger områdets area, d.v.s. $24 \cdot \pi \cdot 1^2 = 24\pi$.

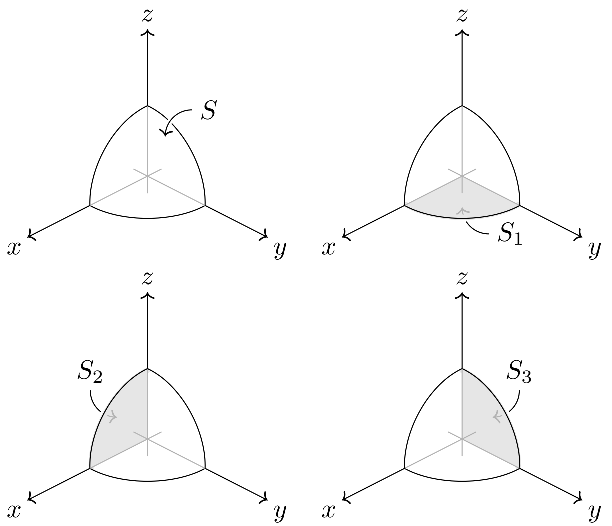
Flödet ut ur cylindern är alltså 24π.

16.4.12 Bestäm flödet av

$$\boldsymbol{F} = (y + xz)\,\boldsymbol{e}_x + (y + yz)\,\boldsymbol{e}_y - (2x + z^2)\,\boldsymbol{e}_z$$

upp genom den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i första oktanten.

Låt S beteckna den del av sfären som ligger i första oktanten. Låt vidare S_1, S_2 och S_3 beteckna de tre sidoytor i koordinatplanen i första oktanten som begränsas av sfären.



Tillsammans innesluter S, S_1, S_2 och S_3 en åttondel av ett klot med radie a. Flödet ut ur denna åttondel är enligt Gauss sats

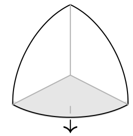
$$\begin{aligned}
&\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_3} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} \\
&\quad = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dV \\
&\quad = \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)\cdot(y + xz, y + yz, -2x - z^2)\,dV \\
&\quad = \iiint_V \Big(\frac{\partial}{\partial x}(y + xz) + \frac{\partial}{\partial y}(y + yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-2x - z^2)\Big)\,dV \\
&\quad = \iiint_V (z + 1 + z - 2z)\,dV = \iiint_V dV \\
&\quad = \text{Volym av } V = \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4}{3}\pi a^3 = \tfrac{1}{6}\pi a^3.
\end{aligned}$$

Alltså är

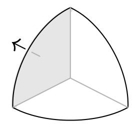
$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \iint_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} - \iint_{S_3} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

På de tre koordinatplanytorna ges ytelementet och vektorfältet av

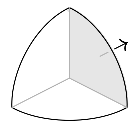
$$S_1: \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= (0, 0, -1)\,dx\,dy \\ \boldsymbol{F}(x, y, 0) &= (y, y, -2x) \end{aligned}$$



$$S_2: \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= (0, -1, 0)\,dx\,dz \\ \boldsymbol{F}(x, 0, z) &= (xz, 0, -2x - z^2) \end{aligned}$$



$$S_3: \quad \begin{aligned} d\boldsymbol{S} &= (-1, 0, 0)\,dy\,dz \\ \boldsymbol{F}(0, y, z) &= (y, y + yz, -z^2) \end{aligned}$$



Vi får

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \iint_{S_1} (y, y, -2x)\cdot(0, 0, -1)\,dx\,dy \\
&\quad - \iint_{S_2} (xz, 0, -2x - z^2)\cdot(0, -1, 0)\,dx\,dz \\
&\quad - \iint_{S_3} (y, y + yz, -z^2)\cdot(-1, 0, 0)\,dy\,dz \\
&= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \iint_{S_1} 2x\,dx\,dy - \iint_{S_2} 0\,dx\,dz - \iint_{S_3} -y\,dy\,dz \\
&= \{\,\text{polära koordinater i respektive plan}\,\} \\
&= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - 2\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^a r^2\,dr + \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^a r^2\,dr \\
&= \tfrac{1}{6}\pi a^3 - 2\cdot 1\cdot \tfrac{1}{3}a^3 + 1\cdot\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{1}{6}\pi a^3 - \tfrac{1}{3}a^3.
\end{aligned}$$

16.5.2 Beräkna

$$\oint_C y\,dx - x\,dy + z^2\,dz$$

runt skärningskurvan C mellan cylindern $z = y^2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$, som genomlöps moturs sett från en punkt högt belägen på z-axeln.

Linjeintegralen kan vi skriva som

$$\oint_C y\,dx - x\,dy + z^2\,dz = \oint_C (y, -x, z^2) \cdot (dx, dy, dz) = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Vi ska lösa uppgiften med två metoder.

Metod 1 (explicit uträkning)

Skärningskurvan C uppfyller båda ytornas ekvationer

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$

$$z = y^2. \tag{2}$$

Ekvation (1) ger att kurvans x- och y-koordinater ligger på en cirkel med mittpunkt i origo och radie 2. Vi kan därför beskriva kurvans x- och y-koordinater med standardparametriseringen

$$x = 2\cos t,$$
$$y = 2\sin t.$$

Ekvation (2) ger att

$$z = y^2 = 4\sin^2 t.$$

Eftersom dessa uttryck för x, y och z är 2π-periodiska i t har kurvan parameterformen

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4\sin^2 t) \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Om vi låter t gå från 0 till 2π så genomlöps kurvan i positiv riktning. Vi får

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \big(y(t), -x(t), z(t)^2\big) = \big(2\sin t, -2\cos t, 16\sin^4 t\big),$$

$$d\boldsymbol{r}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \big(-2\sin t, 2\cos t, 8\sin t\,\cos t\big)\,dt.$$

Linjeintegralen blir

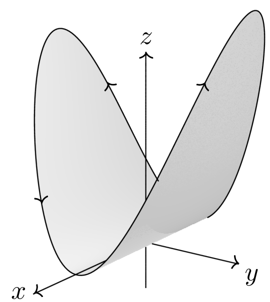
$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot d\boldsymbol{r}(t)\\ &= \int_0^{2\pi} 2\sin t \cdot (-2\sin t)\,dt - 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt + 16\,\sin^4 t \cdot 8\sin t\,\cos t\,dt\\ &= -4\int_0^{2\pi} \big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)\,dt + 128\int_0^{2\pi} \sin^5 t\,\cos t\,dt\\ &= -4 \cdot 2\pi + 128\Big[\tfrac{1}{6}\sin^6 t\Big]_0^{2\pi} = -8\pi + 0 = -8\pi.\end{aligned}$$

Metod 2 (Stokes sats)

Enligt Stokes sats har vi att

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S},$$

för alla ytor S som har C som randkurva och med C positivt orienterad relativt S. I vårt fall kan vi välja ytan S som den del av $z = y^2$ innanför cylindern $x^2+y^2 = 4$.



Då är

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z^2 \end{vmatrix} \\ &= \Big(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial(-x)}{\partial z}, -\frac{\partial z^2}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\Big) \\ &= (0-0, -0+0, -1-1) = (0,0,-2),\end{aligned}$$

$$d\boldsymbol{S} = \pm\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = \pm(0, 2y, -1)\,dx\,dy.$$

För att inducera en positiv orientering av randen ska vi välja minustecknet i $d\boldsymbol{S}$ så att $d\boldsymbol{S}$ pekar uppåt.

Vi får att

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D (0,0,-2)\cdot(0,-2y,1)\,dx\,dy \\ &= -2\iint_D dx\,dy = -2\cdot \operatorname{area}(D) = -2\cdot\pi\,2^2 = -8\pi,\end{aligned}$$

där D är ytan S:s projektion på x,y-planet, d.v.s. $D : x^2+y^2 \le 4$.

16.5.4 Beräkna

$$\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S},$$

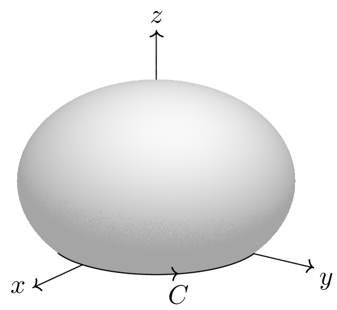
där S är ytan $x^2+y^2+2(z-1)^2 = 6$, $z \ge 0$, $d\boldsymbol{S}$ är riktad ut från S, och

$$\boldsymbol{F} = (xz - y^3\cos z)\,\boldsymbol{e}_x + x^3 e^z\,\boldsymbol{e}_y + xyz\,e^{x^2+y^2+z^2}\,\boldsymbol{e}_z.$$

Vi skriver S i standardform

$$\Big(\frac{x}{\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\sqrt{6}}\Big)^2 + \Big(\frac{z-1}{\sqrt{3}}\Big)^2 = 1, \quad z \ge 0.$$

Ytan S är alltså den del av ellipsoiden med mittpunkt i $(0,0,1)$ och halvaxlar $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ och $\sqrt{3}$ som har positiv z-koordinat.



Enligt Stokes sats kan flödesintegralen i uppgiftstexten skrivas

$$\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

där C är randkurvan till S i planet $z=0$, d.v.s.

$$x^2+y^2+2(0-1)^2 = 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2 = 4.$$

Eftersom $d\boldsymbol{S}$ är utåtriktad induceras en positiv riktning hos C i x,y-planet. Kurvan C, som är en cirkel med mittpunkt i origo och radie 2, kan därför skrivas i parameterformen

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0) \qquad (0 \le \underset{\longrightarrow}{t} \le 2\pi).$$

Längs kurvan ges vektorfältet och kurvelementet av

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \big(0 - y(t)^3, x(t)^3\cdot 1, 0\big) = \big(-8\sin^3 t, 8\cos^3 t, 0\big), \\ d\boldsymbol{r}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt = (-2\sin t, 2\cos t, 0)\,dt.\end{aligned}$$

Vi får

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} &= \oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \big(-8\sin^3 t, 8\cos^3 t, 0\big)\cdot\big(-2\sin t, 2\cos t, 0\big)\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 16\int_0^{2\pi}\bigl(\sin^4 t+\cos^4 t\bigr)\,dt = 16\int_0^{2\pi}\bigl(\tfrac14(1-\cos 2t)^2+\tfrac14(1+\cos 2t)^2\bigr)\,dt\\
&= 4\int_0^{2\pi}\bigl(2+2\cos^2 2t\bigr)\,dt = 8\int_0^{2\pi}\bigl(1+\tfrac12(1+\cos 4t)\bigr)\,dt\\
&= 8\int_0^{2\pi}\bigl(\tfrac32+\tfrac12\cos 4t\bigr)\,dt = \{\,\text{integral av cos över en hel period} = 0\,\}\\
&= 12\cdot 2\pi + 0 = 24\pi.
\end{aligned}
$$

16.5.6 Beräkna

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

runt kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\,\boldsymbol{e}_x + \sin t\,\boldsymbol{e}_y + \sin 2t\,\boldsymbol{e}_z \qquad (0\le t\le 2\pi),$$

där $\boldsymbol{F} = (e^x - y^3)\,\boldsymbol{e}_x + (e^y + x^3)\,\boldsymbol{e}_y + e^z\,\boldsymbol{e}_z$.

Ledtråd: Visa att C ligger på ytan $z = 2xy$.

Låt oss först visa att kurvan C verkligen är sluten och att parametriseringen genomlöper kurvan exakt ett varv.

- Eftersom $\boldsymbol{r}(0) = (0,0,1) = \boldsymbol{r}(2\pi)$ är kurvan sluten.
- Om vi betraktar C nerprojicerad på x,y-planet,

  $$\boldsymbol{r}_{x,y}(t) = \cos t\,\boldsymbol{e}_x + \sin t\,\boldsymbol{e}_y$$

  så får vi enhetscirkeln genomlöpt ett varv i positiv riktning. Varje (x,y)-värde på C antas alltså exakt en gång av parametriseringen, vilket visar att kurvan genomlöps exakt ett varv.

Vi ska lösa uppgiften med två metoder.

METOD 1 (byte av vektorfält)

Först gör vi det obligatoriska testet om vektorfältet är konservativt.

Vi har att

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & -3y^2 & 0\\ 3x^2 & * & 0\\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk, så vektorfältet är inte konservativt. Däremot ser vi att vektorfältet nästan är konservativt; det är bara index $(1,2)$ och $(2,1)$ som inte är lika. Om vi därför kompletterar $\boldsymbol{F}$ med vektorfältet $\boldsymbol{G} = 3x^2y\,\boldsymbol{e}_x - 3xy^2\,\boldsymbol{e}_y$, d.v.s. betraktar vektorfältet

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G},$$

så får vi ett konservativt vektorfält eftersom

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & 3x^2-3y^2 & 0\\ 3x^2-3y^2 & * & 0\\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Då har vi alltså att

$$
\begin{aligned}
&\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} + \oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{r} = 0\\
\Leftrightarrow\qquad &\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r}.
\end{aligned}
$$

Fördelen med $\boldsymbol{G}$ jämfört med $\boldsymbol{F}$ är att $\boldsymbol{G}$ endast har polynomkomponenter som är enklare att integrera analytiskt.

På kurvan C är

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G}\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr) &= \bigl(3x(t)^2y(t), -3x(t)y(t)^2, 0\bigr) = \bigl(3\cos^2 t\,\sin t, -3\cos t\,\sin^2 t, 0\bigr),\\
d\boldsymbol{r}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt = \bigl(-\sin t, \cos t, 2\cos 2t\bigr)\,dt.
\end{aligned}
$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= -\oint_C \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^{2\pi} \boldsymbol{G}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot d\boldsymbol{r}(t)\\
&= -\int_0^{2\pi} (3\cos^2 t\,\sin t, -3\cos t\,\sin^2 t, 0)\cdot(-\sin t, \cos t, 2\cos 2t)\,dt\\
&= -\int_0^{2\pi} \big(-3\cos^2 t\,\sin^2 t - 3\cos^2 t\,\sin^2 t + 0\big)\,dt\\
&= 6\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\sin^2 t\,dt = 6\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt\\
&= \tfrac{3}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos^2 2t)\,dt = \tfrac{3}{2}\int_0^{2\pi}\Big(1-\frac{1+\cos 4t}{2}\Big)\,dt\\
&= \{\,\text{integral av cos över en hel period} = 0\,\}\\
&= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,2\pi = \tfrac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Metod 2 (Stokes sats)

Enligt Stokes sats är linjeintegralen lika med

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S},$$

där S är en yta med C som randkurva och $d\boldsymbol{S}$ är riktad uppåt eftersom C är positivt orienterad i x,y-planet.

Kurvan befinner sig på ytan $z = 2xy$ eftersom den uppfyller ytans ekvation

$$\text{VL} = z(t) = \sin 2t = 2\cos t\,\sin t = 2x(t)y(t) = \text{HL}.$$

Ytan S kan vi därför välja som det ytstycke av $z = 2xy$ som begränsas av C. Vi har då att

$$d\boldsymbol{S} = (\pm)\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\Big)\,dx\,dy = (\pm)(2y, 2x, -1)\,dx\,dy,$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ e^x - y^3 & e^y + x^3 & e^z \end{vmatrix} = (0, 0, 3x^2+3y^2),$$

och Stokes sats ger

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_D 3(0,0,x^2+y^2)\cdot(-2y,-2x,1)\,dx\,dy$$

där D är ytans projektion på x,y-planet, d.v.s. enhetsdisken.

$$\begin{aligned}
&= 3\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \{\,\text{polära koordinater}\,\}\\
&= 3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^3\,dr = 3\cdot 2\pi\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$