Lektion 2, Flervariabelanalys den 19 januari 2000

11.1.6 Finn hastighet, fart och acceleration vid tidpunkt t av en partikel med lägesvektorn

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{e}_x + t^2\boldsymbol{e}_y + t^2\boldsymbol{e}_z.$$

Beskriv också partikelns trajektoria.

Vi skriver lägesvektorn i vektorform,

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Deriverar vi lägesvektorn får vi hastigheten till

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Farten är

$$v(t) = |\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 8t^2},$$

och accelerationen är

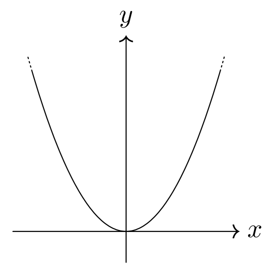
$$\boldsymbol{a}(t) = \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

För att rita upp kurvan som partikeln genomlöper kan det vara enklare att, precis som i konstruktionsritningar, bortse från en dimension och rita upp projektionen av kurvan för att senare lägga ihop projektionerna till en tredimensionell bild av kurvan.

Vi börjar med att betrakta kurvan i x, y-planet,

$$\boldsymbol{r}_{x,y}(t) = t\boldsymbol{e}_x + t^2\boldsymbol{e}_y.$$

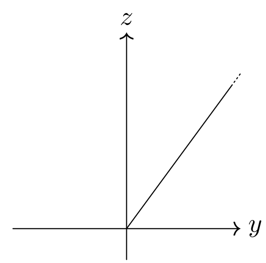
Genom att uttrycka y-koordinaten i x ser vi att kurvan är funktionsgrafen till $y = x^2$.



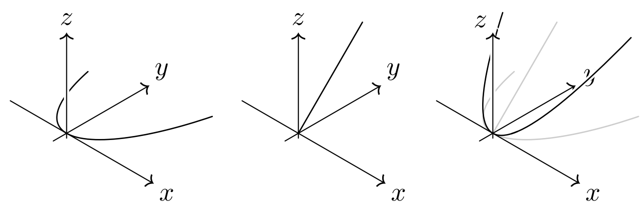
Den andra projektionen vi kan göra är att betrakta kurvan i y, z-planet,

$$\boldsymbol{r}_{y,z}(t) = t^2\boldsymbol{e}_y + t^2\boldsymbol{e}_z.$$

I detta fall ser vi att y- och z-koordinaterna är lika och icke-negativa eftersom t^2 alltid är icke-negativ. Kurvan ligger alltså på linjen $y = z$.



Dessa två bilder räcker för att rita upp den tredimensionella kurvan.



11.1.15 En partikel rör sig runt cirkeln $x^2 + y^2 = 25$ med den konstanta farten av 1 varv varannan sekund. Vilken acceleration har partikeln när den är i punkten $(3, 4)$.

Partikelns läge kan vi skriva som

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{e}_x + y(t)\,\boldsymbol{e}_y.$$

Genom att derivera två gånger fås accelerationen

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}(t)\,\boldsymbol{e}_y.$$

Eftersom vi vet att partikeln rör sig på en cirkel med radie 5 och mittpunkt i origo är det lämpligt att beskriva partikelns läge med polära koordinater.

En konstant vinkelhastighet av $\frac{1}{2}$ varv/s skrivs som

$$\theta = \pm\pi t + \theta_0,$$

där $\pm$ uppstår eftersom vi inte vet om partikeln rör sig med- eller motsols. θ_0 är den vinkel som partikeln har vid $t = 0$. Radien är $r = 5$.

Alltså är

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos\theta = 5\cos(\pm\pi t + \theta_0), \\ y(t) &= r\sin\theta = 5\sin(\pm\pi t + \theta_0). \end{aligned}$$

Från uppgiftstexten får vi inte direkt information om vid vilken tidpunkt som vi ska bestämma accelerationen, utan tidpunkten bestäms istället av villkoret att $x(t) = 3$ och $y(t) = 4$.

Om vi därför kan uttrycka $\ddot{x}$ och $\ddot{y}$ direkt i termer av x och y så undviker vi att behöva bestämma t. Vi har

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mp 5\pi\sin(\pm\pi t + \theta_0) = \mp\pi y(t), \\ \dot{y}(t) &= \pm 5\pi\cos(\pm\pi t + \theta_0) = \pm\pi x(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \mp\pi\dot{y}(t) = -\pi^2 x(t), \\ \ddot{y}(t) &= \pm\pi\dot{x}(t) = -\pi^2 y(t). \end{aligned}$$

Accelerationen i $(x, y) = (3, 4)$ är

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -3\pi^2\,\boldsymbol{e}_x - 4\pi^2\,\boldsymbol{e}_y.$$

11.1.16 En partikel rör sig åt höger längs kurvan $y = 3/x$. Om dess fart är 10 när den passerar genom punkten $(2, 3/2)$, vad är dess hastighet vid den tidpunkten.

Eftersom vi redan vet partikelns fart behöver vi bara dess hastighetsriktning i punkten.

Kurvan som partikeln rör sig på är en funktionsgraf som redan är parametriserad av x. Punkter på kurvan kan alltså skrivas som

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= 3/s \end{aligned} \qquad (s \text{ parameter}),$$

eller i vektorform

$$\boldsymbol{r}(s) = \begin{pmatrix} s \\ 3/s \end{pmatrix}.$$

Riktningsvektorn, som pekar åt höger, ges av

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(2)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(2)|} &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-3/s)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3/s^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{s=2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 9/16}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partikelns hastighet är farten gånger hastighetsriktningen

$$10\,\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

11.3.6 Planet $x + y + z = 1$ skär cylindern $z = x^2$ längs en parabel. Bestäm parametriseringen av parabeln med $t = x$ som parameter.

Skärningskurvan mellan de två ytorna tillhör båda ytorna och måste därför uppfylla båda ytornas ekvationer.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, && (1) \\ z &= x^2. && (2) \end{aligned}$$

Eftersom vi väljer $t = x$ som parameter ger (2) direkt att

$$z = t^2.$$

Detta insatt i (1) ger

$$t + y + t^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 1 - t - t^2.$$

Alltså har skärningskurvan parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t - t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

11.3.8 Parametrisera skärningskurvan mellan ytorna $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och $x + y = 1$.

Skärningskurvan tillhör båda ytorna och måste därför uppfylla båda ytornas ekvationer

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \tag{1}$$
$$x + y = 1. \tag{2}$$

Om vi fixerar x så ser vi att (2) bestämmer ett y-värde och (1) bestämmer ett z-värde. För varje x-värde finns alltså högst en punkt på skärningskurvan. Just detta 1:1 förhållande gör att vi kan välja $t = x$ som parameter. Löser vi ut y och z i termer av $t = x$, från (1) och (2), fås

$$y = 1 - x = 1 - t, \tag{3}$$
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - t^2 - (1-t)^2} = \sqrt{2t(1-t)}. \tag{4}$$

Det är dock inte alla x-värden som ger en punkt på skärningslinjen. Vi ser i (4) att vi måste begränsa t till intervallet $[0, 1]$ för att ett z-värde ska svara mot t. Ekvation (3) ställer inga sådana krav. Parametermängden måste alltså väljas till $[0, 1]$.

Sammantaget har alltså skärningslinjen parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \\ \sqrt{2t(1-t)} \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 1).$$

11.3.14 För vilka värden på parametern λ är längden $L(T)$ av kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{e}_x + \lambda t^2 \boldsymbol{e}_y + t^3 \boldsymbol{e}_z \qquad (0 \le t \le T)$$

lika med $T + T^3$?

Vi har

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \lambda t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Längden av kurvan ges av integralen

$$\begin{aligned} L(T, \lambda) &= \int_0^T |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt = \int_0^T \sqrt{1^2 + (2\lambda t)^2 + (3t^2)^2}\, dt \\ &= \int_0^T \sqrt{1 + 4\lambda^2 t^2 + 9t^4}\, dt \end{aligned} \tag{$*$}$$

En integral av den här typen är i allmänhet inte analytiskt lösbar. Det enda undantaget är när uttrycket under rottecknet råkar vara en kvadrat. Om vi kvadratkompletterar i t^2,

$$1 + 4\lambda^2 t^2 + 9t^4 = 9\big(t^2 + \tfrac{2}{9}\lambda^2\big)^2 + 1 - \tfrac{4}{9}\lambda^4,$$

så ser vi att uttrycket är en kvadrat endast då

$$1 - \tfrac{4}{9}\lambda^4 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

I dessa fall blir integralen

$$L(T) = \int_0^T \bigl|3(t^2 + \tfrac{1}{3})\bigr|\, dt = 3\bigl[\,\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{3}t\,\bigr]_0^T = T^3 + T.$$

Detta var minst sagt lyckosamt, men vi kan dock inte utesluta att det även finns andra λ-värden för vilka integralen också råkar anta värdet $T^3 + T$. Låt oss bevisa att detta inte inträffar.

Om vi betraktar integranden i $(*)$ som en funktion av λ,

$$f(\lambda) = \sqrt{1 + 4\lambda^2 t^2 + 9t^4},$$

så ser vi att f är strängt växande för $\lambda > 0$ och strängt avtagande för $\lambda < 0$ (derivera f om du inte är övertygad). Eftersom integralen har monotonicitets-egenskapen

$$f < g \quad \Rightarrow \quad \int f < \int g,$$

så har vi att $L(T,\lambda)$ är strängt växande i $\lambda > 0$ och strängt avtagande i $\lambda < 0$. Alltså kan $L(T)$ endast anta värdet $T + T^3$ högst en gång för negativa respektive positiva λ.

Vi har därmed visat att

$$L(T) = T + T^3$$

endast då $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

11.3.18 Beskriv skärningskurvan mellan sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och den elliptiska cylindern $x^2 + 2z^2 = 1$. Beräkna den totala längden av skärningskurvan.

Skärningskurvan mellan de två ytorna uppfyller båda ytornas ekvationer

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{1}$$
$$x^2 + 2z^2 = 1. \tag{2}$$

Ekvation (2) beskriver i x,z-planet en ellips med halvaxlar 1 och $1/\sqrt{2}$. Det betyder att skärningskurvans x- och z-koordinater alltid kommer ligga på denna ellips, m.a.o. om vi projicerar skärningskurvan på x,z-planet så får vi en kurva som är en del av ellipsen (eller hela ellipsen).

Standardparametriseringen av en ellips ger att vi kan skriva

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ z &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Detta insatt i (1) ger

$$y^2 = 1 - \cos^2 t - \tfrac{1}{2}\sin^2 t = \tfrac{1}{2}\sin^2 t \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t.$$

För varje t-värde finns alltså två y-värden, vilket betyder att skärningskurvan består av två kurvor

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Av parametriseringen ser vi också att de två kurvorna är spegelsymmetriska i x,z-planet $(y \leftrightarrow -y)$ varför de måste ha samma längd. Skärningskurvans totala längd är därför

$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^{2\pi} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t)^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t)^2}\, dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} 1\, dt = 4\pi. \end{aligned}$$

11.3.19 Låt C vara kurvan

$$\begin{aligned} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi). \\ z &= t \end{aligned}$$

Beräkna längden av C.

Kurvan C skriven i vektorform och dess riktningsvektor är

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \sin t + e^t \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Längden av C är

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + 1^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}+1}\,dt = \{\, s = \sqrt{2}\,e^t;\ ds = \sqrt{2}\,e^2\,dt = s\,dt \,\} \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} \frac{\sqrt{s^2+1}}{s}\,ds = \{\, \text{Beta handboken, integralformel 95} \,\} \\ &= \Big[\sqrt{s^2+1} - \log\Big| \frac{\sqrt{s^2+1}+1}{s} \Big| \Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} \\ &= \sqrt{2e^{4\pi}+1} - \log \frac{\sqrt{2e^{4\pi}+1}+1}{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} - \sqrt{3} + \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

11.4.4 Finn enhetstangentvektorn $\boldsymbol{e}_T(t)$ till kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = a \cos t\, \boldsymbol{e}_x + b \sin t\, \boldsymbol{e}_y + t\, \boldsymbol{e}_z.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= -a \sin t\, \boldsymbol{e}_x + b \cos t\, \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \\ |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| &= \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + 1}. \end{aligned}$$

Enhetstangentvektorn är

$$\boldsymbol{e}_T(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t)}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|} = \frac{-a \sin t\, \boldsymbol{e}_x + b \cos t\, \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + 1}}.$$

11.4.5 Visa att om krökningen uppfyller

$$\kappa(s) = 0 \qquad \text{för alla } s,$$

så är kurvan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ en rät linje.

Om vi låter $\boldsymbol{e}_T(s)$ beteckna kurvans enhetstangent så vet vi alltså att

$$\Big| \frac{d}{ds} \boldsymbol{e}_T(s) \Big| = \kappa(s) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{ds} \boldsymbol{e}_T(s) = \boldsymbol{0}. \tag{$*$}$$

Denna likhet kan vi med integralkalkylens huvudsats integrera upp (vi integrerar varje komponent för sig),

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{e}_T(s) - \boldsymbol{e}_T(0) = \int_0^s \frac{d}{ds} \boldsymbol{e}_T(s)\,ds = \int_0^s \boldsymbol{0}\,ds = \boldsymbol{0} \\ \Leftrightarrow \qquad & \boldsymbol{e}_T(s) = \boldsymbol{e}_T(0) = \boldsymbol{u} \quad \text{för alla } s. \end{aligned}$$

Alltså är enhetstangenten konstant för alla s.

Enhetstangenten är i sin tur derivatan av lägesvektorn (eftersom vi använder båglängden som parameter),

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{e}_T(s) = \boldsymbol{u}.$$

Integrerar vi upp denna likhet fås

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}(0) = \int_0^s \frac{d}{ds} \boldsymbol{r}(s)\,ds = \int_0^s \boldsymbol{u}\,ds = \boldsymbol{u}\,s \\ \Leftrightarrow \qquad & \boldsymbol{r}(s) = s\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}(0) = s\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

och detta är en parametrisering av en rät linje.

11.5.2 Finn krökningsradien till kurvan

$$y = \cos x$$

i punkten $x = 0$ och $x = \pi/2$.

Vi har

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{och} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

och med determinantformeln får vi

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & 1 & 0 \\ \boldsymbol{e}_y & -\sin t & -\cos t \\ \boldsymbol{e}_z & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Krökningsradien är

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{(1+\sin^2 t)^{3/2}}{|\cos t|}$$

vilket ger

$$1/\kappa(0) = 1, \qquad 1/\kappa(\pi/2) = \infty.$$

11.5.4 Finn krökningsradien till kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = t^3\boldsymbol{e}_x + t^2\boldsymbol{e}_y + t\boldsymbol{e}_z$$

i punkten med $t = 1$.

Vi har

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

och med determinantformeln får vi

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & 3t^2 & 6t \\ \boldsymbol{e}_y & 2t & 2 \\ \boldsymbol{e}_z & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6t \\ -6t^2 \end{pmatrix}.$$

Krökningsradien är

$$\frac{1}{\kappa(t)} = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}|^3}{|\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}|} = \frac{\left((3t^2)^2 + (2t)^2 + 1^2\right)^{3/2}}{\sqrt{(-2)^2 + (6t)^2 + (-6t^2)^2}} = \frac{\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)^{3/2}}{\sqrt{4 + 36t^2 + 36t^4}},$$

vilket ger

$$1/\kappa(1) = \frac{14\sqrt{14}}{\sqrt{76}}.$$