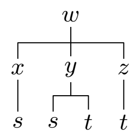
Lektion 5, Flervariabelanalys den 26 januari 2000

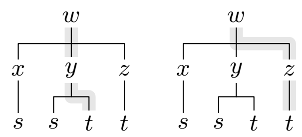
12.5.2 Bestäm $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ om $w = f(x, y, z)$, där $x = g(s)$, $y = h(s, t)$ och $z = k(t)$.

Vi ska först bena ut hur variablerna beror av varandra genom att rita upp variablerna i ett träd där en variabel i en högre nivå beror av de variabler som den är förbunden med i den lägre nivån.



När vi ska beräkna $\frac{\partial w}{\partial t}$ ska vi förbinda w med alla t i trädet. Varje stig från w till t ger upphov till en term i uttrycket för $\frac{\partial w}{\partial t}$. Varje sådan term är i sin tur en produkt av partialderivator av de variabler som ingår i stigen.

I detta fall finns två t:n i trädet och två stigar som sammanbinder respektive t med w.



$w \to y \to t$ $\quad$ $w \to z \to t$

Den första stigen går via y, så motsvarande term blir

$$\frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Den andra stigen går via z och ger termen

$$\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Notera att vi skriver $\frac{dz}{dt}$ istället för $\frac{\partial z}{\partial t}$. Detta brukar man göra när funktionen endast beror av en variabel.

Vår sökta partialderivata är alltså

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

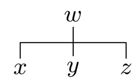
eller uttryckt med funktionerna

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dk}{dt}.$$

12.5.5 Om $w = f(x, y, z)$, där $x = g(y, z)$ och $y = h(z)$, beräkna

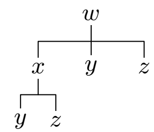
$$\frac{dw}{dz}, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x \quad \text{och} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}.$$

Vi börjar med att rita upp variabelträdet. Den första nivån är $w = f(x, y, z)$ och ger oss första delen av trädet



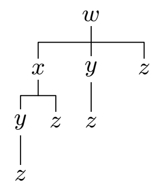
(1)

Sambandet $x = g(y, z)$ ger i sin tur



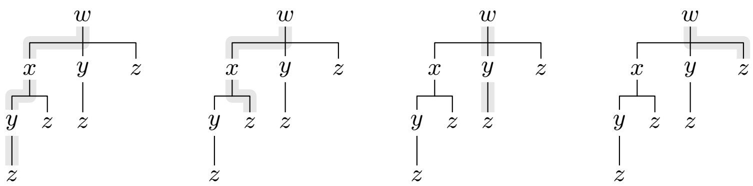
(2)

Notera här att y och z nu förekommer i två olika nivåer i trädet. Vi ska återkomma till vilka problem detta leder till. Sambandet $y = h(z)$ ger oss det slutgiltiga trädet.



(3)

Ett uttryck för $\frac{dw}{dz}$ får vi genom att förbinda alla z i trädet med w.



Var och en av dessa stigar ger upphov till en term i uttrycket för $\frac{dw}{dz}$.

Stigen längst till vänster ger termen

$$f_1 \cdot g_1 \cdot h_1,$$

där f_1 betyder att vi partialderiverar f med avseende på den första variabeln.

Stigen näst längst till vänster ger termen

$$f_1 \cdot g_2.$$

De två följande stigarna ger termerna

$$f_2 \cdot h' \quad \text{och} \quad f_3.$$

Alltså är

$$\frac{dw}{dz} = f_1 g_1 h_1 + f_1 g_2 + f_2 h' + f_3.$$

Det traditionella sättet att skriva denna formel är

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{$*$}$$

Notera skillnaden mellan $\frac{dw}{dz}$ och $\frac{\partial w}{\partial z}$. Med $\frac{dw}{dz}$ menar vi att w enbart är en funktion av z, d.v.s. att vi deriverar funktionen $w = w(z) = f\big(g(h(z), z), h(z), z\big)$.

Beteckningen $\frac{\partial w}{\partial z}$ betyder å andra sidan att vi, i vårt fall, betraktar x och y som konstanter och partialderiverar $w = w(z, y, z) = f(x, y, z)$ med avseende på z, d.v.s. $\frac{\partial w}{\partial z} = f_3$. Ett mer tydligt sätt att skriva detta på är

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_{x,y},$$

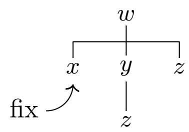
där vi indikerar att förutom z betraktar vi x och y som variabler som vi håller konstanta under partialderiveringen.

Med $\frac{\partial w}{\partial z}$ kan man nämligen också mena att man bara håller x fix men låter $y = h(z)$ och partialderiverar $w = w(x, z) = f\big(x, h(z), z\big)$ med avseende på z, d.v.s. att vi beräknar

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_x.$$

Med kedjeregeln får vi denna derivata till

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_x = f_2 \cdot h' + f_3$$

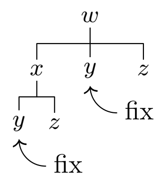


Ett tredje sätt att tolka $\frac{\partial w}{\partial z}$ är att vi håller y fix men låter $x = g(y, z)$ och partialderiverar $w = w(y, z) = f\big(g(y, z), y, z\big)$ med avseende på z, m.a.o. beräknar

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_y.$$

I detta fall ger kedjeregeln att

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)_y = f_1 \cdot g_2 + f_3.$$



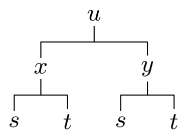
Beteckningen $\frac{\partial w}{\partial z}$ är alltså otydlig eftersom vi inte riktigt säkert vet vilka storheter som vi betraktar som variabler. När uttrycket $\frac{\partial w}{\partial z}$ dyker upp i en formel, som den gjorde i $(*)$, måste vi utifrån sammanhanget avgöra hur vi ska tolka $\frac{\partial w}{\partial z}$.

12.5.6 Använd två olika metoder för att beräkna

$$\frac{\partial u}{\partial t}$$

om $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ där $x = e^{st}$ och $y = 1 + s^2 \cos t$.

Variabelträdet har i detta fall utseendet



Derivatan $\frac{\partial u}{\partial t}$ tolkar vi som $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s$. Med kedjeregeln får vi att

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

där vi har att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{e^{st}}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}} \\
\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} e^{st} = s\, e^{st} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1+s^2\cos t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}} \\
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\big(1 + s^2 \cos t\big) = -s^2 \sin t
\end{aligned}$$

Sammanlagt får vi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{e^{st}}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}} \cdot s\, e^{st} \\
&\quad + \frac{1+s^2\cos t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}} \cdot (-s^2 \sin t) \\
&= \frac{s\, e^{2st} - s^2 \sin t - s^4 \cos t \sin t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}}.
\end{aligned}$$

Det andra sättet är att direkt stoppa in x och y uttryckta i s och t, i u,

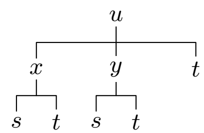
$$u = \sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}$$

och derivera

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{e^{2st} + (1+s^2\cos t)^2}} \cdot \big(2s\, e^{2st} + 2(1+s^2\cos t)\cdot(-s^2 \sin t)\big) \\
&= \frac{s\, e^{2st} - s^2 \sin t - s^4 \cos t \sin t}{\sqrt{(e^{st})^2 + (1+s^2\cos t)^2}}
\end{aligned}$$

Anm. Notera att egentligen råder inga tveksamheter om att tolka $\frac{\partial u}{\partial t}$ som $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s$. Andra tolkningar såsom $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x$ och $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_y$ är mer långsökta.

Hade emellertid variabelträdet haft utseendet



så hade det varit svårare att avgöra om $\frac{\partial u}{\partial t}$ betydde

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x,y} \quad \text{eller} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_s.$$

12.5.10 Beräkna

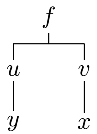
$$\frac{\partial}{\partial x} f(2y, 3x)$$

om funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga första ordningens partialderivator.

Det korrekta sättet att tolka formeln i uppgiftstexten är att först införa namn på de två argumenten till f. Om vi döper dessa till u och v, så ska vi alltså beräkna

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u, v)$$

där $u = 2y$ och $v = 3x$. Variabelträdet är därmed



Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{dv}{dx} = f_2(u, v) \cdot (3x)' = f_2(2y, 3x) \cdot 3.$$

Anm. Uppgiftstexten försöker faktiskt blanda bort korten genom att kalla funktionen för $f(x, y)$ och på så sätt antyda att $\frac{\partial}{\partial x}$ möjligen skulle kunna vara en partialderivering med avseende på den första variabeln. Hade formeln varit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2y, 3x)$$

så hade detta också varit vad som avsetts.

För att öka tydligheten skulle man istället kunnat skriva

$$\frac{\partial}{\partial x}\big[f(2y, 3x)\big].$$

12.5.12 Beräkna

$$\frac{\partial}{\partial y} f\Big(yf(x, t), f(y, t)\Big)$$

om funktionen $f(x, y)$ har kontinuerliga första ordningens partialderivator.

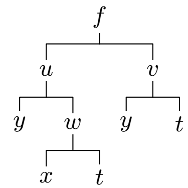
Vi döper de två argumenten till det yttre f:et till

$$\begin{aligned} u &= yf(x, t), \\ v &= f(y, t). \end{aligned}$$

Argumentet u kan dessutom skrivas $u = y \cdot w$ om vi sätter

$$w = f(x, t).$$

Ritar vi upp variabelträdet får vi



Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= f_1(u, v) \cdot w + f_2(u, v) \cdot f_1(y, t) \\ &= f_1\big(yf(x, t), f(y, t)\big) \cdot f(x, t) + f_2\big(yf(x, t), f(y, t)\big) \cdot f_1(y, t). \end{aligned}$$

12.5.15 Antag att f har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar. Om $z = f(x, y)$, där $x = 2s + 3t$ och $y = 3s - 2t$, beräkna

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$,

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}$,

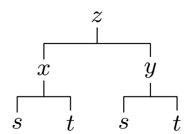
c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

Dessa andra ordningens partialderivator kan skrivas som

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial s},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Vi börjar därför med att bestämma $\frac{\partial z}{\partial s}$ och $\frac{\partial z}{\partial t}$.

Variabelträdet blir i detta fall



Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= f_1(x, y)\cdot 2 + f_2(x, y)\cdot 3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= f_1(x, y)\cdot 3 + f_2(x, y)\cdot (-2).\end{aligned}$$

a) Linjariteten gör att vi kan dela upp den sökta derivatan i två termer

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(f_1(x, y)\cdot 2 + f_2(x, y)\cdot 3\Big)\\ &= 2\frac{\partial}{\partial s}f_1(x, y) + 3\frac{\partial}{\partial s}f_2(x, y).\end{aligned}$$

Båda termerna har samma variabelberoende som z, så kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= f_{11}(x, y)\cdot 2 + f_{12}(x, y)\cdot 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= f_{21}(x, y)\cdot 2 + f_{22}(x, y)\cdot 3\end{aligned}$$

Eftersom andra ordningens partialderivator är kontinuerliga är $f_{12} = f_{21}$ och vi får att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 4\cdot f_{11}(x, y) + 12 f_{12}(x, y) + 9 f_{12}(x, y).$$

b) Vi får

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\Big(f_1(x, y)\cdot 3 + f_2(x, y)\cdot (-2)\Big)\\ &= 3\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\Big) - 2\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\Big)\\ &= 3\big(f_{11}(x, y)\cdot 2 + f_{12}(x, y)\cdot 3\big) - 2\big(f_{21}(x, y)\cdot 2 + f_{22}(x, y)\cdot 3\big)\\ &= \big\{\ f_{12} = f_{21}\ \big\} = 6 f_{11}(x, y) + 5 f_{12}(x, y) - 6 f_{22}(x, y)\end{aligned}$$

Som en extra kontroll kan man också räkna ut

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial s}$$

som ska vara lika med ovanstående.

c) Den sista derivatan får vi på motsvarande sätt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(f_1(x, y)\cdot 3 + f_2(x, y)\cdot (-2)\Big)\\ &= 3\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\Big) - 2\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\Big)\\ &= 3\big(f_{11}(x, y)\cdot 3 + f_{12}(x, y)\cdot (-2)\big) - 2\big(f_{21}(x, y)\cdot 3 + f_{22}(x, y)\cdot (-2)\big)\\ &= \big\{\ f_{12} = f_{21}\ \big\} = 9 f_{11}(x, y) - 12 f_{12}(x, y) + 4 f_{22}(x, y).\end{aligned}$$

12.5.16 Om $f(x,y)$ är harmonisk, visa att även

$$f\Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\Big)$$

är harmonisk.

Att f är harmonisk betyder att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0.$$

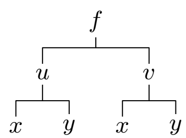
Om vi sätter

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{x^2+y^2}, \\ v &= \frac{-y}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

så ska vi alltså visa att

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u,v) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(u,v) = 0.$$

Om vi ritar upp variabelträdet så får vi



Kedjeregeln ger att

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \Big(-\frac{-y}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x\Big) \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} \\ &= f_1(u,v) \cdot \Big(-\frac{x}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y\Big) + f_2(u,v) \cdot \frac{(-1) \cdot (x^2+y^2) - (-y) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= f_1(u,v) \cdot \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Ytterligare en derivering ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(f_1(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_1(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_1(u,v) \cdot \frac{-2x \cdot (x^2+y^2)^2 - (-x^2+y^2) \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} \\ &\quad + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_2(u,v) \cdot \frac{2y \cdot (x^2+y^2)^2 - 2xy \cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \Big(f_{11}(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_{12}(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_1(u,v) \cdot \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\ &\quad + \Big(f_{21}(u,v) \cdot \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_{22}(u,v) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big) \cdot \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &\quad + f_2(u,v) \cdot \frac{-6x^2y + 2y^3}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f_{11}(u,v)\cdot\frac{(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} + f_{12}(u,v)\cdot\frac{-2x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_{21}(u,v)\cdot\frac{-2x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^4} + f_{22}(u,v)\cdot\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + f_2(u,v)\cdot\frac{-6x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} f &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(f_1(u,v)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_1(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + f_2(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+y^2)^2-(-2xy)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + \Big(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Big)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_2(u,v)\cdot\frac{2y\cdot(x^2+y^2)^2-(-x^2+y^2)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \Big(f_{11}(u,v)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_{12}(u,v)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}\\
&\quad + \Big(f_{21}(u,v)\cdot\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + f_{22}(u,v)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)\cdot\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
&\quad + f_2(u,v)\cdot\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}\\
&= f_{11}(u,v)\cdot\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^4} + f_{12}(u,v)\cdot\frac{2x^3y-2xy^3}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_{21}(u,v)\cdot\frac{2x^3y-2xy^3}{(x^2+y^2)^4} + f_{22}(u,v)\cdot\frac{(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}\\
&\quad + f_1(u,v)\cdot\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3} + f_2(u,v)\cdot\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}
$$

Sammanlagt har vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(u,v) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(u,v) &= \frac{4x^2y^2+(-x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4}\big(f_{11}(u,v)+f_{22}(u,v)\big)\\
&= \{\, f \text{ harmonisk} \Rightarrow\ f_{11}+f_{22}=0\,\} = 0,
\end{aligned}
$$

vilket betyder att vi visat $(*)$.

12.5.18 Uttryck

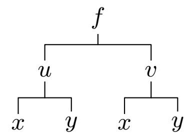
$$\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2} f(2x+3y, xy)$$

i termer av f:s partialderivator som alla är kontinuerliga.

Om vi döper f:s två argument till

$$
\begin{aligned}
u &= 2x+3y\\
v &= xy
\end{aligned}
$$

så har f variabelträdet



Med kedjeregeln får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\
&= f_1(u,v)\cdot 3 + f_2(u,v)\cdot x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(3f_1(u,v) + x f_2(u,v)\Big) \\
&= 3\Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Big) + x\Big(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Big) \\
&= 3\big(f_{11}(u,v)\cdot 3 + f_{12}(u,v)\cdot x\big) + x\big(f_{21}(u,v)\cdot 3 + f_{22}(u,v)\cdot x\big) \\
&= \big\{\, f_{12},\ f_{21} \text{ kontinuerliga} \Rightarrow\ f_{12} = f_{21} \,\big\} \\
&= 9f_{11}(u,v) + 6x f_{12}(u,v) + x^2 f_{22}(u,v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(9f_{11}(u,v) + 6x f_{12}(u,v) + x^2 f_{22}(u,v)\Big) \\
&= 9\Big(\frac{\partial f_{11}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{11}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\
&\quad + 6f_{12}(u,v) + 6x\Big(\frac{\partial f_{12}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{12}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\
&\quad + 2x f_{22}(u,v) + x^2\Big(\frac{\partial f_{22}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_{22}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big) \\
&= 9\Big(f_{111}(u,v)\cdot 2 + f_{112}\cdot y\Big) \\
&\quad + 6f_{12}(u,v) + 6x\big(f_{121}(u,v)\cdot 2 + f_{122}(u,v)\cdot y\big) \\
&\quad + 2x f_{22}(u,v) + x^2\big(f_{221}(u,v)\cdot 2 + f_{222}(u,v)\cdot y\big) \\
&= \big\{\, f_{112} = f_{121};\ f_{122} = f_{221} \,\big\} \\
&= 18 f_{111}(u,v) + (12x + 9y) f_{112}(u,v) + 6 f_{12}(u,v) + (2x^2 + 6xy) f_{122}(u,v) \\
&\quad + 2x f_{22}(u,v) + x^2 y f_{222}(u,v).
\end{aligned}
$$

12.6.2 Använd en lämplig linjarisering av funktionen

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

för att beräkna ett approximativt värde av funktionen i punkten $(3{,}01; 2{,}99)$.

Eftersom punkten befinner sig nära $(3,3)$ och f och dess derivator är enkla att räkna ut i $(3,3)$ så väljer vi att linjarisera f i punkten $(3,3)$.

Taylors formel ger att

$$f(x,y) = f(3,3) + \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(3,3)\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(3,3)\Big)\begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \end{pmatrix} + R_2(x-3, y-3)$$

där

$$
\begin{aligned}
f(3,3) &= \arctan\frac{3}{3} = \tfrac{1}{4}\pi, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(3,3) &= \frac{-y}{x^2+y^2}\Big|_{x=y=3} = -1/6, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=y=3} = 1/6.
\end{aligned}
$$

Alltså är

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \tfrac{1}{4}\pi + \big(-1/6\ \ 1/6\big)\begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \end{pmatrix} + R_2(x-3, y-3) \\
&= \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{6}(x-3) + \tfrac{1}{6}(y-3) + R_2(x-3, y-3).
\end{aligned}
$$

Ett approximativt värde av $f(3{,}01;\ 2{,}99)$ får vi om vi bortser från resttermen (som förhoppningsvis är liten)

$$f(3{,}01;\ 2{,}99) \approx \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}01 + \tfrac{1}{6}\cdot(-0{,}01) \approx 0{,}78206.$$

Notera att vi inte har någon skattning av resttermen R_2, så vår approximation är osäker.

12.6.6 Använd en lämplig linjarisering av funktionen

$$f(x,y) = x\,e^{y+x^2}$$

för att beräkna ett approximativt värde av funktionen i punkten (2,05; −3,92).

Eftersom punkten befinner sig nära $(2,-4)$ där f är enkel att räkna ut så väljer vi att linjarisera f i punkten $(2,-4)$.

Taylors formel ger att

$$f(x,y) = f(2,-4) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-4) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix} + R_2(x-2, y+4),$$

där

$$\begin{aligned} f(2,-4) &= 2\,e^{-4+2^2} = 2, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= (1+2x^2)e^{y+x^2}\Big|_{\substack{x=2\\y=-4}} = 9, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x\,e^{y+x^2}\Big|_{\substack{x=2\\y=-4}} = 2. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2 + \begin{pmatrix} 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix} + R_2(x-2,y+4) \\ &= 2 + 9(x-2) + 2(y+4) + R_2(x-2,y+4). \end{aligned}$$

Ett approximativt värde av $f(2{,}05;\ -3{,}92)$ får vi om vi bortser från resttermen (som förhoppningsvis är liten)

$$f(2{,}05;\ -3{,}92) \approx 2 + 9\cdot 0{,}05 + 2\cdot 0{,}08 = 2{,}61.$$

Vi måste göra samma anmärkning som efter förra uppgiften. Eftersom vi inte har någon skattning av resttermen så är approximationen osäker.

12.6.16 Bestäm Jacobimatrisen $D\boldsymbol{g}(1,3,3)$ till transformationen från $\boldsymbol{R}^3$ till $\boldsymbol{R}^3$ som ges av

$$\boldsymbol{g}(r,s,t) = (r^2 s, r^2 t, s^2 - t^2)$$

och använd resultatet för att beräkna ett approximativt värde av $\boldsymbol{g}(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97)$.

Jacobimatrisen till

$$\boldsymbol{g}(r,s,t) = \begin{pmatrix} g_1(r,s,t) \\ g_2(r,s,t) \\ g_3(r,s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 s \\ r^2 t \\ s^2 - t^2 \end{pmatrix}$$

ges av formeln

$$D\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial s} & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial s} & \frac{\partial g_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial s} & \frac{\partial g_3}{\partial t} \end{pmatrix}$$

där

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial g_1}{\partial r} = 2rs & \dfrac{\partial g_1}{\partial s} = r^2 & \dfrac{\partial g_1}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial r} = 2rt & \dfrac{\partial g_2}{\partial s} = 0 & \dfrac{\partial g_2}{\partial t} = r^2 \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial g_3}{\partial s} = 2s & \dfrac{\partial g_3}{\partial t} = -2t. \end{array}$$

I punkten $(r,s,t) = (1,3,3)$ är

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial g_1}{\partial r}(1,3,3) = 6 & \dfrac{\partial g_1}{\partial s}(1,3,3) = 1 & \dfrac{\partial g_1}{\partial t}(1,3,3) = 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial r}(1,3,3) = 6 & \dfrac{\partial g_2}{\partial s}(1,3,3) = 0 & \dfrac{\partial g_2}{\partial t}(1,3,3) = 1 \\ \dfrac{\partial g_3}{\partial r}(1,3,3) = 0 & \dfrac{\partial g_3}{\partial s}(1,3,3) = 6 & \dfrac{\partial g_3}{\partial t}(1,3,3) = -6. \end{array}$$

Alltså är

$$D\boldsymbol{g}(1,3,3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

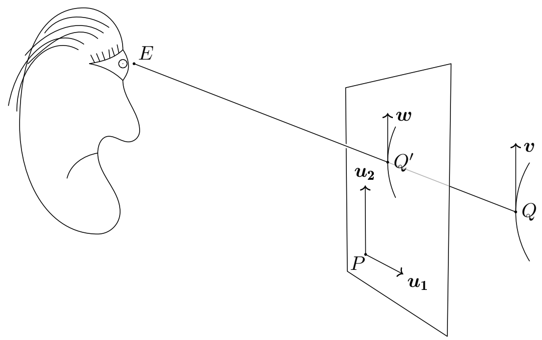
För att beräkna ett approximativt värde av $\boldsymbol{g}(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97)$ linjariserar vi $\boldsymbol{g}$ i den närbelägna punkten $(1, 3, 3)$ och approximerar $\boldsymbol{g}$:s värde i $(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97)$ med linjariseringens värde i samma punkt.

Taylors formel ger att

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}(r,s,t) &= \boldsymbol{g}(1,3,3) + D\boldsymbol{g}(1,3,3)\begin{pmatrix} r-1 \\ s-3 \\ t-3 \end{pmatrix} + R_2(r-1, s-3, t-3) \\
&= \begin{pmatrix} 1^2\cdot 3 \\ 1^2 \cdot 3 \\ 3^2 - 3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r-1 \\ s-3 \\ t-3 \end{pmatrix} + R_2(r-1, s-3, t-3) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\cdot(r-1) + 1\cdot(s-3) + 0\cdot(t-3) \\ 6\cdot(r-1) + 0\cdot(s-3) + 1\cdot(t-3) \\ 0\cdot(r-1) + 6\cdot(s-3) - 6\cdot(t-3) \end{pmatrix} + R_2 \\
&= \begin{pmatrix} 3 + 6(r-1) + (s-3) \\ 3 + 6(r-1) + (t-3) \\ 6(s-3) - 6(t-3) \end{pmatrix} + R_2
\end{aligned}
$$

Linjariseringens värde får vi genom att bortse från resttermen

$$
\boldsymbol{g}(0{,}99; 3{,}02; 2{,}97) \approx \begin{pmatrix} 3 + 6\cdot(-0{,}01) + 0{,}02 \\ 3 + 6\cdot(-0{,}01) + (-0{,}03) \\ 6\cdot 0{,}02 - 6\cdot(-0{,}03) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}96 \\ 2{,}91 \\ 0{,}30 \end{pmatrix}.
$$



(Fortsättning av datorgrafikexemplet)

Ofta när man ritar i rummet vill man inte bara projicera punkter på skärmen utan också riktningar.

Antag att vi har en riktning $\boldsymbol{v}$ utgående från punkten Q, vilken blir motsvarande riktningen $\boldsymbol{w}$ utgående från Q' på skärmen.

Problemet är: Givet Q, E, P och $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ samt $\boldsymbol{v}$. Bestäm riktningen $\boldsymbol{w}$ i planets koordinatsystem.

Avbildningen från rummet till skärmens plan ges av uttrycket

$$
\boldsymbol{F}\colon Q \mapsto \begin{pmatrix} F_1(Q) \\ F_2(Q) \end{pmatrix} = \frac{1}{\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2)} \begin{pmatrix} \overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times \boldsymbol{u}_2) \\ -\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times \boldsymbol{u}_1) \end{pmatrix}
$$

Den transformation som avbildar riktningar från rummet till riktningar i planet ges av differentialen $d\boldsymbol{F}$.

Differentialen har matrisen

$$
\begin{pmatrix} \nabla F_1 \\ \nabla F_2 \end{pmatrix}.
$$

För att beräkna matrisen behöver vi följande räkneregler

1. $\nabla\bigl(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bigr) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

2. $\nabla\Bigl(\dfrac{f}{g}\Bigr) = \dfrac{\nabla f\, g - f\,\nabla g}{g^2}$

Vi får

$$\nabla\Big(\frac{\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)}{\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)}\Big) = \frac{\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big]\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big) - \big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big)\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big]}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

$$= \frac{(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big) - (\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2)\big)}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

$$-\nabla\Big(\frac{\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)}{\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)}\Big) = \frac{-\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big]\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big) - \big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big)\nabla\big[\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big]}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

$$= \frac{-(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big) + (\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1)\big)}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}$$

Alltså har $d\boldsymbol{F}$ 2×3-matrisen

$$\frac{1}{\big(\overrightarrow{EQ}\cdot(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\big)^2}\begin{pmatrix} \big[\overrightarrow{EQ},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\big](\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_2) - \big[\overrightarrow{EQ},\overrightarrow{PE},\boldsymbol{u}_2\big](\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2) \\ -\big[\overrightarrow{EQ},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\big](\overrightarrow{PE}\times\boldsymbol{u}_1) + \big[\overrightarrow{EQ},\overrightarrow{PE},\boldsymbol{u}_1\big](\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\end{pmatrix},$$

där vi använt oss av trippelproduktbeteckningen

$$\big[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\big] = \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$