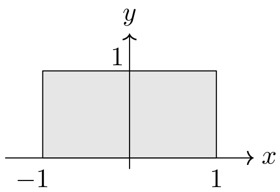
**Lektion 8, Flervariabelanalys den 2 februari 2000**

**13.2.2** Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = xy - 2x$$

i rektangeln $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Vi börjar med att rita upp området




Området är kompakt vilket innebär att det största och minsta värde funktionen kan anta är i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där $\nabla f$ inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. De kritiska punkterna uppfyller

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (y-2, x) = (0,0),$$

   vilket ger punkten $(0,2)$ som måste uteslutas eftersom den inte tillhör området.

2. Gradienten existerar överallt.

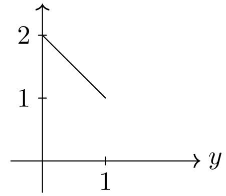
Eftersom punkt 1 och 2 inte gav några punkter måste $f$ anta största och minsta värde i en randpunkt.

3. Områdets rand består av fyra räta kurvstycken som vi undersöker separat.

$x = -1:$ På randkurvan $\{x = -1\}$ har funktionen utseendet

$$f(-1,y) = -y + 2.$$

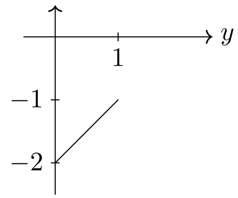
Största värdet av $f$ är 2 i $y = 0$.
Minsta värdet av $f$ är 1 i $y = 1$.




$x = +1:$ På randkurvan $\{x = +1\}$ har funktionen utseendet

$$f(1,y) = y - 2.$$

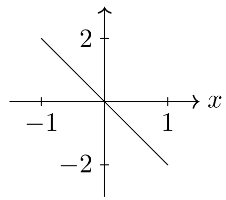
Största värdet av $f$ är $-1$ i $y = 1$.
Minsta värdet av $f$ är $-2$ i $y = 0$.




$y = 0:$ På randkurvan $\{y = 0\}$ har funktionen utseendet

$$f(x,0) = -2x.$$

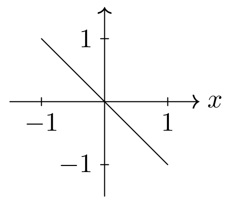
Största värdet av $f$ är 2 i $x = -1$.
Minsta värdet av $f$ är $-2$ i $x = 1$.




$y = 1:$ På randkurvan $\{y = 1\}$ har funktionen utseendet

$$f(x,1) = -x.$$

Största värdet av $f$ är 1 i $x = -1$.
Minsta värdet av $f$ är $-1$ i $x = 1$.




Genom att jämföra största och minsta värdet på de olika randkurvorna får vi $f$:s största och minsta värde i hela området

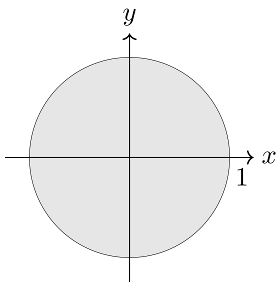
| | | | |
|---|---|---|---|
| Största värde | 2 | i punkten | $(-1,0)$. |
| Minsta värde | $-2$ | i punkten | $(1,0)$. |

**13.2.4** Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = x + 2y$$

i cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$.

Området är insidan av cirkeln med mittpunkt i origo och radie 1




Eftersom $f$ är linjär existerar gradienten överallt och $\nabla f = (1,2)$ är aldrig noll.

Detta utesluter att största eller minsta värdet antas i en inre punkt. Kvar att undersöka är områdets rand, d.v.s. enhetscirkeln.

Punkter på enhetscirkeln beskrivs enklast med polära koordinater

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \end{aligned} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

På cirkeln har $f$ utseendet

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + 2\sin\theta,$$

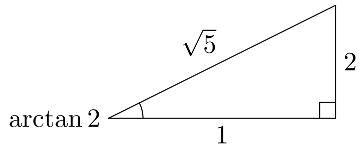
där vi infört $g$ som ett förkortat skrivsätt för $f$. Vi bestämmer största och minsta värdet av $g$ genom att sätta derivatan lika med noll,

$$\begin{aligned} & g'(\theta) = -\sin\theta + 2\cos\theta = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tan\theta = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & \theta = \arctan 2 \quad \text{eller} \quad \theta = \pi + \arctan 2 \quad (\text{Obs! } 0 \leq \theta \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Detta svarar mot punkterna

$$\begin{aligned} & \bigl(\cos\arctan 2, \sin\arctan 2\bigr) \quad \text{och} \\ & \bigl(\cos(\pi + \arctan 2), \sin(\pi + \arctan 2)\bigr) = \bigl(-\cos\arctan 2, -\sin\arctan 2\bigr). \end{aligned}$$

För att förenkla dessa uttryck ritar vi en hjälptriangel.




$$\cos\arctan 2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin\arctan 2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Punkterna är alltså $\bigl(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\bigr)$ och $\bigl(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\bigr)$, och

$$\begin{aligned} f\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\bigr) &= \sqrt{5} \quad \text{Största värdet,} \\ f\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\bigr) &= -\sqrt{5} \quad \text{Minsta värdet.} \end{aligned}$$

**13.2.6** Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = xy(1 - x - y)$$

i triangeln med hörnpunkter $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.

Största och minsta värde antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där $\nabla f$ inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Kritiska punkter har gradient 0, d.v.s.

$$\nabla f = \bigl(y - 2xy - y^2, x - x^2 - 2xy\bigr) = (0,0).$$

Vi har alltså ekvationssystemet

$$y(1 - 2x - y) = 0, \qquad (1)$$
$$x(1 - 2y - x) = 0. \qquad (2)$$

Ekvation (1) är uppfylld om åtminstone en av faktorerna är noll. Detta ger oss två fall

$y = 0:$ (2) ger $x(1-x) = 0$, d.v.s. $x = 0$ eller $x = 1$.

$1 - 2x - y = 0:$ Vi har alltså att $y = 1 - 2x$. Detta insatt i (2) ger

$$\begin{aligned} x\bigl(1 - 2(1-2x) - x\bigr) &= 0,\\ x\bigl(-1 + 3x\bigr) &= 0, \end{aligned}$$

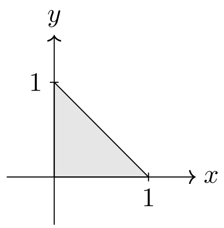
d.v.s. $x = 0$ eller $x = 1/3$.

De kritiska punkterna är

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1) \quad \text{och} \quad (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}).$$

2. Gradienten existerar överallt.

3. Om vi ritar upp området




så ser vi att randen består av tre randkurvor. Vi har därför tre fall att undersöka

$x = 0:$ På $y$-axeln har $f$ utseendet $f(0,y) = 0$.

$y = 0:$ På $x$-axeln har $f$ utseendet $f(x,0) = 0$.

diagonal: Den räta linjen mellan $(0,1)$ och $(1,0)$ kan vi beskriva med parametriseringen

$$(x,y) = (0,1) + t(1,-1) \quad (0 \le t \le 1).$$

På linjen har $f$ utseendet

$$g(t) = f(t, 1-t) = t \cdot (1-t) \cdot 0 = 0.$$

Det största och minsta värdet av $f$ finns bland följande värden

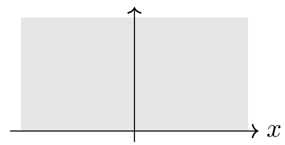
$$\begin{aligned} 0 \ \ (= \text{randvärde}) &= \text{Minsta värde},\\ f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{27} \qquad\quad &= \text{Största värde}. \end{aligned}$$

**13.2.10** Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$$

i det övre halvplanet $y \ge 0$.

Området består av alla punkter med positiv $y$-koordinat och $x$-axeln.




Vi har tre typer av punkter att undersöka

1. kritiska punkter,
2. punkter där $\nabla f$ inte existerar, och
3. randpunkter.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Gradientens komponenter är

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1 \cdot (1+x^2+y^2) - (x-y)\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + 2xy + y^2}{(1+x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(-1)\cdot(1+x^2+y^2) - (x-y)\cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-1 - x^2 - 2xy + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Gradienten lika med noll ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1 - x^2 + 2xy + y^2 &= 0, & (1)\\ -1 - x^2 - 2xy + y^2 &= 0. & (2) \end{aligned}$$

(1) + (2) ger

$$-2x^2 + 2y^2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y \quad \text{eller} \quad x = -y.$$

Vi undersöker dessa två fall.

$x = y:$ (1) ger $1 + 2x^2 = 0$ som saknar reella lösningar.

$x = -y:$ (1) och (2) ger $1 - 2x^2 = 0$ som har lösningarna $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Kritiska punkter är

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{(utanför området)}\\ &\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

2. $\nabla f$ existerar överallt (nämnaren $\geq 1 > 0$).

3. Längs $x$-axeln är funktionen

$$g(x) = f(x,0) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Det största och minsta värdet får vi i punkter där derivatan är noll (vi har nämligen att $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$).

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0\\ \Leftrightarrow \quad & x = \pm 1.\end{aligned}$$

Det största och minsta värdet av $f$ finns alltså bland följande värden

$$\begin{aligned}f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}},\\ f\left(-1,0\right) &= -\tfrac{1}{2},\\ f\left(1,0\right) &= \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Svaret är

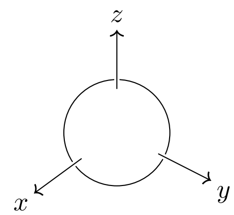
$$\begin{aligned}&\text{Största värde} = \tfrac{1}{2} && \text{i punkten } (1,0).\\ &\text{Minsta värde} = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} && \text{i punkten } \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

**13.2.12** Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x,y,z) = xz + yz$$

i klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Området består av enhetsklotet med mittpunkt i origo.




Det största och minsta värdet antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,

2. punkter där $\nabla f$ inte existerar, och

3. randpunkter.

Vi undersöker dessa fall.

1. Gradienten lika med noll ger

$$\nabla f = (z, z, x+y) = (0,0,0)$$

d.v.s. $x + y = 0$ och $z = 0$. Detta ekvationssystem har lösningarna

$$(x,y,z) = t(1,-1,0) \quad (t \text{ parameter}).$$

Alltså är alla punkter på linjen kritiska punkter. Vi måste inskränka parameterintervallet till

$$-\tfrac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

för att punkterna ska ligga inom mängden.

2. Gradienten existerar överallt.

3. På randytan gäller att

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Vi kan från detta samband lösa ut $z$

$$z = z(x,y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

där $x$ och $y$ uppfyller $x^2 + y^2 \leq 1$. Funktionen $f$:s utseende på randytan kan alltså beskrivas av $x$ och $y$, och är

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= f\big(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\,\big) \\ &= (x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2(x,y) &= f\big(x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}\,\big) \\ &= -(x+y)\sqrt{1-x^2-y^2} \\ &= -g_1(x,y). \end{aligned}$$

Vi ska alltså bestämma största och minsta värdet av $g_1(x,y)$ (och $g_2$) i mängden $x^2 + y^2 \leq 1$.

Detta är precis den typ av problem vi hittills hållit på med. Största och minsta värdet av $g_1$ antas i någon av följande punkter

(a) kritiska punkter till $g_1$,

(b) punkter där $\nabla g_1$ inte existerar, och

(c) randpunkter till $x^2 + y^2 \leq 1$.

Vi undersöker dessa tre fall

(a) Vi har

$$\nabla g_1 = \Big(\frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}\Big) = 0, \qquad (*)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \cdots = \frac{1 - 2x^2 - xy - y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \cdots = \frac{1 - 2y^2 - xy - x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

$(*)$ ger ekvationssystemet

$$1 - 2x^2 - xy - y^2 = 0, \qquad (1)$$

$$1 - x^2 - xy - 2y^2 = 0. \qquad (2)$$

(1) − (2) ger

$$-x^2 + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{eller} \quad x = -y.$$

Dessa två fall ger

$x = y:$ (1) och (2) ger $1 - 4x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$.

$x = -y:$ (1) och (2) ger $1 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

De kritiska punkterna till $g_1$ är alltså

$$\big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big), \quad \big(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\big), \quad \big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big), \quad \big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big).$$

(b) $\nabla g_1$ existerar överallt utom på randen.

(c) På randen är $x^2 + y^2 = 1$ och

$$g_1(x,y) = (x+y)\cdot 0 = 0.$$

$g_1$ har alltså sitt största respektive minsta värde bland

$$\begin{aligned} &0 && \text{(randvärden)} \\ g_1\big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} && \text{(största värde)} \\ g_1\big(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\big) &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}} && \text{(minsta värde)} \\ g_1\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) &= 0 \\ g_1\big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big) &= 0 \end{aligned}$$

Eftersom $g_2 = -g_1$ har $g_2$ samma största och minsta värde som $g_1$.

Eftersom $f(t,-t,0) = 0$ i de kritiska punkterna är

Största värde $\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ och $\big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$

Minsta värde $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ och $\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$

**13.2.17** Maximera

$$Q(x,y) = 2x + 3y$$

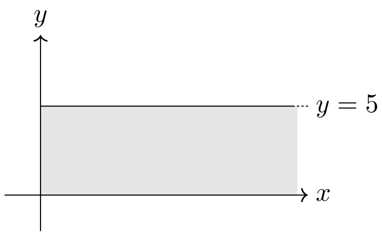
under bivillkoren $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 5$, $x + 2y \leq 12$ och $4x + y \leq 12$.

Området ges av alla punkter $(x, y)$ som uppfyller villkoren

$$\begin{aligned} x \quad &\geq 0, &&(1)\\ y &\geq 0, &&(2)\\ y &\leq 5, &&(3)\\ x + 2y &\leq 12, &&(4)\\ 4x + \ \ y &\leq 12. &&(5) \end{aligned}$$

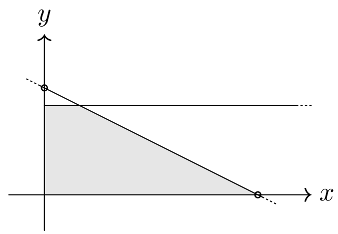
Villkor (1) och (2) säger att området måste ligga i första kvadranten.


Villkor (3) säger att $y$-koordinaten är mindre än eller lika med 5.

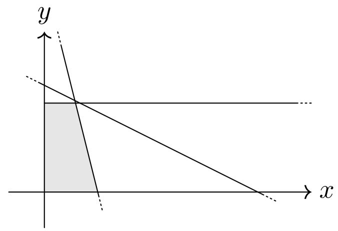



Villkor (4) säger att området ligger till vänster om linjen $x + 2y = 12$. För att rita upp linjen $x + 2y = 12$ tar vi reda på var den skär $x$- respektive $y$-axeln och förbinder dessa två punkter med en rät linje. På $x$-axeln är $y = 0$ och $x + 2\cdot 0 = 12$.

På $y$-axeln är $x = 0$ och $0 + 2y = 12$, d.v.s. $y = 6$.




Villkor (5) säger slutligen att området ligger till vänster om linjen $4x + y = 12$.




Området är alltså den gråfärgade fyrhörningen ovan.

Eftersom målfunktionen $Q$ är linjär existerar gradienten överallt och $\nabla Q = (2, 3)$ är aldrig noll. $Q$ måste alltså anta sitt största värde i en randpunkt.

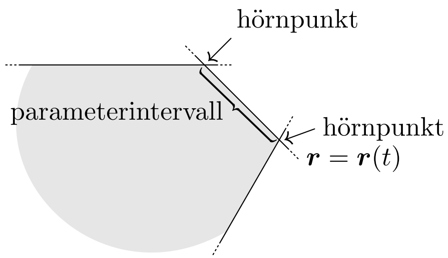
Områdets rand består av räta linjer och vi undersöker $Q$:s värden på randen genom att parametrisera dessa linjer,

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\boldsymbol{v}.$$

$Q$:s värde på en randkurva kan alltså skrivas

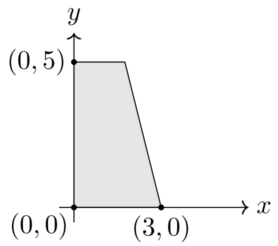
$$q(t) = Q\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = Q\big(\overrightarrow{OP} + t\boldsymbol{v}\big).$$

Eftersom både $Q$ och $\boldsymbol{r}(t)$ är linjära funktioner så är $q(t)$ en linjär funktion av $t$. Linjära funktioner antar alltid sitt max/min-värde i intervallets ändpunkter, som i detta fall svarar mot hörnpunkter.



Målfunktionen $Q$ antar alltså sitt största värde i en hörnpunkt.

Vi vet redan koordinaterna för tre av hörnpunkterna.




Den fjärde hörnpunkten är skärningspunkten mellan linjerna

$$y = 5 \quad \text{och} \quad 4x + y = 12,$$

vilket direkt ger $x = \frac{7}{4}$ och $y = 5$.

$Q$:s maximum är det största av värdena

$$\begin{aligned} Q(0,0) &= 0, \\ Q(3,0) &= 6, \\ Q(0,5) &= 15, \\ Q(\tfrac{7}{4},5) &= \tfrac{37}{2} \quad \text{(Största värdet).} \end{aligned}$$

**13.3.2** Bestäm kortaste avståndet från punkten $(3,0)$ till parabeln $y = x^2$

a) genom att reducera antalet variabler till ett extremvärdesproblem utan bivillkor, och

b) med Lagranges multiplikatormetod.

Om $(x,y)$ är koordinaterna för punkten på parabeln så ska vi minimera

$$\|(x,y) - (3,0)\| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \qquad (*)$$

under förutsättning att $(x,y)$ ligger på parabeln, d.v.s. $y = x^2$.

Med en mer standardformulering blir problemet

$$\begin{aligned} &\text{min} \quad (x-3)^2 + y^2 \\ &\text{då} \quad\;\; y - x^2 = 0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Notera att vi nu minimerar kvadraten på avståndet istället för avståndet, men det är i princip samma problem och minimum antas i samma punkt för båda problemen. Skälet till denna omskrivning är rent praktiskt; vi slipper kvadratroten.

a) Ur bivillkoret kan vi lösa ut $y = x^2$ och problemet blir att minimera

$$f(x) = (x-3)^2 + (x^2)^2 = (x-3)^2 + x^4.$$

Vi bestämmer minsta värdet av $f$ genom att sätta derivatan lika med noll,

$$f'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 0,$$

vilket ger $x = 1$ (inga andra reella rötter).

Eftersom

$$f''(1) = (2 + 12x)\Big|_{x=1} = 14 > 0$$

är $x = 1$ en minimipunkt. Svaret är alltså att punkten $(1,1)$ ligger närmast punkten $(3,0)$ med ett avstånd på $\sqrt{(1-3)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

b) Enligt Lagranges multiplikatormetod antas minimum i en punkt där gradienten av målfunktionen tillhör det linjära hölje som spänns upp av gradienten av bivillkorsfunktionen. Om

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x-3)^2 + y^2 \\ g(x,y) &= y - x^2 \end{aligned}$$

så lyder alltså villkoret: $\nabla f$ är parallell med $\nabla g$, vilket är detsamma som

$$\det \begin{pmatrix} \text{—}\,\nabla f\,\text{—} \\ \text{—}\,\nabla g\,\text{—} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{vmatrix} 2(x-3) & 2y \\ -2x & 1 \end{vmatrix} = 2x - 4xy - 6 = 0.$$

Detta villkor tillsammans med bivillkoret ger oss ekvationssystemet

$$2x - 4xy - 6 = 0, \qquad (1)$$

$$y - x^2 = 0. \qquad (2)$$

Ekvation (2) ger $y = x^2$. Detta insatt i (1) ger

$$2x - 4x^3 - 6 = 0,$$

som har lösningen $x = 1$. Alltså är $(1, 1)$ en kritisk punkt.

Eftersom parabeln $\{g(x, y) = 0\}$ inte är kompakt kan två fall inträffa

1. minimum antas i en kritisk punkt, d.v.s. $(1, 1)$.
2. Gränsvärdet

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ y = x^2}} f(x, y)$$

är mindre än $f$:s värden på parabeln. I detta fall saknar $f$ ett minsta värde.

Vi har att

$$\lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ y = x^2}} f(x, y) = \infty$$

varför fall 1 inträffar.

Alltså ligger punkten $(1, 1)$ närmast punkten $(3, 0)$ med ett avstånd på $\sqrt{(1-3)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

**13.3.4** Bestäm största och minsta värdet av funktionen

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sätt

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Problemet kan nu skrivas

$$\begin{array}{ll} \text{min/max} & f(x, y, z) \\ \text{då} & g(x, y, z) = 0. \end{array}$$

Eftersom sfären är kompakt antas det största resp. minsta värdet av $f$ i någon av följande punkter.

1. punkter där $\nabla f$ tillhör det linjära hölje som spänns upp av $\nabla g$,
2. punkter där $\nabla g = \mathbf{0}$ (singulära punkter),
3. punkter där $\nabla f$ eller $\nabla g$ inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f &= (1, 1, -1), \\ \nabla g &= (2x, 2y, 2z). \end{aligned}$$

I kritiska punkter ska $\nabla f \in \operatorname{span}\{\nabla g\}$, d.v.s. $\nabla f$ ska vara parallell med $\nabla g$. Det ska alltså finnas en skalär $\lambda$ s.a.

$$(1, 1, -1) = \lambda(2x, 2y, 2z).$$

Detta leder tillsammans med bivillkoret $g(x, y, z) = 0$ till ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= 1, & (1) \\ 2\lambda y &= 1, & (2) \\ 2\lambda z &= -1, & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. & (4) \end{aligned}$$

Från (1), (2) och (3) har vi att (ty $\lambda \neq 0$)

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{och} \quad z = -\frac{1}{2\lambda}.$$

Detta insatt i (4) ger

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = \frac{3}{4\lambda^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},$$

vilket ger punkterna

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{och} \quad \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. Gradienten $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ är noll endast i punkten med $x = y = z = 0$, men $(0,0,0)$ uppfyller inte bivillkoret.

3. Gradienterna $\nabla f$ och $\nabla g$ existerar överallt.

Målfunktionen $f$:s största respektive minsta värde är ett av följande värden

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \sqrt{3} \qquad \text{(Största värdet)},\\ f\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\sqrt{3} \qquad \text{(Minsta värdet)}. \end{aligned}$$

**13.3.6** Bestäm det kortaste avståndet från origo till ytan $xyz^2 = 2$.

Om $(x, y, z)$ är koordinaterna för en punkt på ytan så ges avståndet till origo av uttrycket

$$\|(x,y,z) - (0,0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

För att slippa kvadratroten kan vi istället söka minsta värdet av avståndet i kvadrat

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

som antar minimum i samma punkt.

Sätter vi $g(x,y,z) = xyz^2 - 2$ blir problemformuleringen

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x,y,z)\\ &\text{då} \quad g(x,y,z) = 0. \end{aligned}$$

Eftersom ytan inte är kompakt (t.ex. ligger den obegränsade kurvan $x = t$, $y = 2/t$, $z = 1$ i ytan) måste vi först försäkra oss om att $f$ inte går mot ett minvärde då någon av koordinaterna $\to \pm\infty$. Eftersom $f$ är kvadraten på avståndet till origo ser vi direkt att $f \to \infty$ när $|x|$, $|y|$ eller $|z| \to \infty$.

Alltså antar $f$ ett minsta värde i någon av följande punkter

1. punkter där $\nabla f$ tillhör det linjära hölje som spänns upp av $\nabla g$,

2. punkter där $\nabla g = \mathbf{0}$, och

3. punkter där $\nabla f$ eller $\nabla g$ inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2x, 2y, 2z),\\ \nabla g &= (yz^2, xz^2, 2xyz). \end{aligned}$$

Vi söker punkter där $\nabla f$ är parallell med $\nabla g$. Ett sätt att formulera detta på är

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(yz^2, xz^2, 2xyz),$$

för någon skalär $\lambda$. Ett annat sätt är villkoret

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z\\ yz^2 & xz^2 & 2xyz\\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

som måste gälla för alla $(a, b, c)$ eftersom de två översta raderna $\nabla f$ och $\nabla g$ är linjärt beroende. Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a\begin{vmatrix} 2y & 2z\\ xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 2x & 2z\\ yz^2 & 2xyz \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 2x & 2y\\ yz^2 & xz^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom $a$, $b$ och $c$ kan väljas fritt måste de tre minorerna vara noll,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2y & 2z\\ xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} &= 4xy^2z - 2xz^3 = 0,\\ \begin{vmatrix} 2x & 2z\\ yz^2 & 2xyz \end{vmatrix} &= 4x^2yz - 2yz^3 = 0,\\ \begin{vmatrix} 2x & 2y\\ yz^2 & xz^2 \end{vmatrix} &= 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = 0. \end{aligned}$$

Dessa villkor tillsammans med bivillkoret ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} xz(2y^2 - z^2) &= 0, && (1)\\ yz(2x^2 - z^2) &= 0, && (2)\\ z^2(x-y)(x+y) &= 0, && (3)\\ xyz^2 &= 2. && (4) \end{aligned}$$

Ekvation (3) ger oss tre fall

$x = y:$ De resterande ekvationerna reduceras till

$$xz(2x^2 - z^2) = 0, \tag{5}$$
$$x^2z^2 = 2. \tag{6}$$

Eftersom $x, z \neq 0$, p.g.a. (6), ger (5) att $2x^2 = z^2$. Detta insatt i (6) ger

$$2x^4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Vi får därför punkterna (med hjälp av (7))

$$(1, 1, \sqrt{2}\,), \quad (1, 1, -\sqrt{2}\,), \quad (-1, -1, \sqrt{2}\,) \quad \text{och} \quad (-1, -1, -\sqrt{2}\,).$$

$x = -y:$ Eftersom $x \neq 0$, p.g.a. (4), blir VL av (4) ett negativt tal ($z^2$ är positiv) och kan inte vara lika med HL.

$z = 0:$ Detta strider mot ekvation (4).

2. Gradienterna $\nabla g = (yz^2, xz^2, 2xyz)$ är noll bara om åtminstone en av $x$, $y$ och $z$ är noll, men det strider mot bivillkoret.

3. Gradienterna $\nabla f$ och $\nabla g$ existerar överallt.

Kvadraten på minsta avståndet är det minsta av följande värden

$$f(1, 1, \sqrt{2}\,) = 4,$$
$$f(1, 1, -\sqrt{2}\,) = 4,$$
$$f(-1, -1, \sqrt{2}\,) = 4,$$
$$f(-1, -1, -\sqrt{2}\,) = 4.$$

**13.3.12** Bestäm största och minsta värdet av

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

på ellipsen som är skärningskurvan mellan konen $z^2 = x^2 + y^2$ och planet $x - 2z = 3$.

Ellipsen tillhör både konen och planet, och uppfyller därför både konens och planets ekvation.

Sätter vi

$$g_1(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2,$$
$$g_2(x, y, z) = x - 2z - 3,$$

blir problemet

$$\begin{array}{ll} \text{max/min} & f(x,y,z) \\ \text{då} & \begin{cases} g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0. \end{cases} \end{array}$$

Eftersom en ellips är en kompakt kurva så antar $f$ ett största och minsta värde i någon av följande punkter,

1. punkter där $\nabla f$ tillhör det linjära hölje som spänns upp av $\nabla g_1$ och $\nabla g_2$,
2. punkter där $\dim\{\nabla g_1, \nabla g_2\} < 2$, och
3. punkter där $\nabla f$, $\nabla g_1$ och $\nabla g_2$ inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$
$$\nabla g_1 = (-2x, -2y, 2z)$$
$$\nabla g_2 = (1, 0, -2)$$

Gradienten $\nabla f$ tillhör $\operatorname{span}\{\nabla g_1, \nabla g_2\}$ endast om

$$0 = \begin{vmatrix} -\nabla f- \\ -\nabla g_1- \\ -\nabla g_2- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ -2x & -2y & 2z \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 8xy + 4yz + 0 - (-4yz) - 0 - 8xy = 8yz.$$

Tillsammans med bivillkoren ger detta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} yz &= 0, && (1)\\ z^2 - x^2 - y^2 &= 0, && (2)\\ x - 2z &= 3. && (3) \end{aligned}$$

Ekvation (1) ger två möjligheter.

$y = 0:$ Ekvation (2) och (3) ger

$$\begin{aligned} (z-x)(z+x) &= 0, && (4)\\ x - 2z &= 3. && (5) \end{aligned}$$

Om $z = x$ ger (5) att $x = -3$, vilket ger punkten $(-3, 0, -3)$.
Om $z = -x$ ger (5) att $x = 1$, vilket ger punkten $(1, 0, -1)$.

$z = 0:$ Ekvation (2) och (3) ger

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0,\\ x &= 3. \end{aligned}$$

som saknar lösning.

2. Gradienterna $\nabla g_1$ och $\nabla g_2$ är linjärt beroende omm

$$\begin{vmatrix} - & \nabla g_1 & - \\ - & \nabla g_2 & - \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

för alla vektorer $(a, b, c)$. Med $\nabla g_1$ och $\nabla g_2$ insatta blir detta

$$\begin{vmatrix} -2x & -2y & -2z \\ 1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a\begin{vmatrix} -2y & 2z \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -2x & 2z \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} -2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom $a$, $b$ och $c$ kan väljas fritt måste alla minorer vara noll,

$$\begin{vmatrix} -2y & 2x \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4y = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2x & 2z \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4x - 2z = 0,$$

$$\begin{vmatrix} -2x & -2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2y = 0.$$

Tillsammans med bivillkoren får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} y &= 0, && (6)\\ 4x - 2z &= 0, && (7)\\ z^2 - x^2 - y^2 &= 0, && (8)\\ x - 2z &= 3. && (9) \end{aligned}$$

Ekvation (6), (7) och (9) är ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som har lösningen $(x, y, z) = (-1, 0, -2)$, vilken dock inte uppfyller (8).

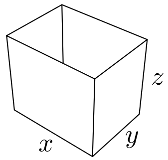
3. Gradienterna $\nabla f$, $\nabla g_1$ och $\nabla g_2$ existerar överallt.

Det största och minsta värdet av $f$ finns bland följande värden

$$\begin{aligned} f(-3, 0, -3) &= 18 \quad \text{(Största värdet)},\\ f(1, 0, -1) &= \ \ 2 \quad \text{(Minsta värdet)}. \end{aligned}$$

**13.3.18** Bestäm de mest ekonomiska dimensionerna av en rektangulär låda utan lock.

Låt $x$, $y$ och $z$ beteckna sidolängderna av lådan enligt figuren nedan.




Vi tolkar uppgiften som att vi ska maximera lådans volym för en given total area av sidoväggar och botten.

Eftersom lådans volym är $V = xyz$ och area är $A = xy + 2xz + 2yz$ blir vårt problem

$$\begin{array}{ll} \max & xyz \\ \text{då} & \begin{cases} xy + 2xz + 2yz & = A \\ x, y, z & \geq 0. \end{cases} \end{array}$$

Utefter ränderna $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$ är volymen noll, så vi har inga maxpunkter där.

Areabivillkoret ger upphov till en icke-kompakt mängd, så vi måste undersöka vad som händer med volymen då en av kantlängderna går mot $\infty$. Om t.ex. $x \to \infty$ så har vi att

$$\begin{aligned} xy \leq xy + 2xz + 2yz \leq A \qquad &\Rightarrow \qquad y \leq \frac{A}{x}, \\ 2xz \leq xy + 2xz + 2yz \leq A \qquad &\Rightarrow \qquad z \leq \frac{A}{2x}, \end{aligned}$$

vilket ger att volymen är

$$V = xyz \leq x \cdot \frac{A}{x} \cdot \frac{A}{2x} = \frac{A^2}{2x} \to 0.$$

Med ett liknande resonemang får vi att $V \to 0$ om $y \to \infty$ eller $z \to \infty$.

Volymen måste alltså anta sitt största värde i någon av följande punkter,

1. punkter där $\nabla V$ tillhör det linjära hölje som spänns upp av $\nabla A$,
2. punkter där $\nabla A = \mathbf{0}$, och
3. punkter där $\nabla V$ eller $\nabla A$ inte existerar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Vi har

$$\begin{aligned} \nabla V &= (yz, xz, xy), \\ \nabla A &= (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y). \end{aligned}$$

Gradienten $\nabla V$ tillhör span$\{\nabla A\}$ om de är linjärt beroende, d.v.s. omm

$$\begin{vmatrix} \text{---}\, \nabla V \,\text{---} \\ \text{---}\, \nabla A \,\text{---} \\ a \quad b \quad c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ y + 2z & x + 2z & 2x + 2y \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

för alla vektorer $(a, b, c)$.

Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a \begin{vmatrix} xz & xy \\ x + 2z & 2x + 2z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} yz & xy \\ y + 2z & 2x + 2y \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} yz & xz \\ y + 2z & x + 2z \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom $a$, $b$ och $c$ kan väljas fritt måste alla minorer vara noll.

$$\begin{vmatrix} xz & xy \\ x + 2z & 2x + 2z \end{vmatrix} = xz(2x + 2z) - xy(x + 2z) = -x^2y + 2x^2z = 0,$$

$$\begin{vmatrix} yz & xy \\ y + 2z & 2x + 2y \end{vmatrix} = yz(2x + 2y) - xy(y + 2z) = -xy^2 + 2y^2z = 0,$$

$$\begin{vmatrix} yz & xz \\ y + 2z & x + 2z \end{vmatrix} = yz(x + 2z) - xz(y + 2z) = -2xz^2 + 2yz^2 = 0.$$

Tillsammans med bivillkoret har vi ekvationssystemet

$$x^2(2z - y) = 0, \tag{1}$$
$$y^2(2z - x) = 0, \tag{2}$$
$$z^2(y - x) = 0, \tag{3}$$
$$xy + 2xz + 2yz = A. \tag{4}$$

Vi vet att i maxpunkten är $x, y, z \neq 0$ så (1), (2) och (3) ger att

$$x = y = 2z.$$

Detta insatt i (4) ger

$$12z^2 = A \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{A/3},$$

vilket ger punkten $\left(\sqrt{A/3}, \sqrt{A/3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{A/3}\right)$ (minustecknet strider mot positivitetsvillkoret).

2. Gradienten $\nabla A = (y+2z, x+2z, 2x+2y)$ är noll omm

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som endast har den triviala lösningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ eftersom determinanten är 8, men $(0, 0, 0)$ uppfyller inte bivillkoret.

3. $\nabla V$ och $\nabla A$ existerar överallt.

Störst volym av lådan är

$$V = V\big(\sqrt{A/3}, \sqrt{A/3}, \tfrac{1}{2}\sqrt{A/3}\big) = \frac{A^{3/2}}{6\sqrt{3}}.$$