Lektion 9, Flervariabelanalys den 3 februari 2000

13.5.2 Genom att ersätta t med xt i den välbekanta integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

och derivera med avseende på x, bestäm

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt \quad \text{och} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^4\,e^{-t^2}\,dt.$$

Vi ska börja med att derivera integralen som uppstår utan hänsyn till de krav vi måste kontrollera att integranden uppfyller. Först när vi vet att uträkningarna ger önskat resultat kontrollerar vi att integranden uppfyller villkoren som ställs.

Ersätter vi t med xt blir integranden

$$f(x,t) = e^{-x^2t^2}$$

och vi har

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2t^2}\,dt = \{\, s = xt;\ ds = x\,dt\,\}\\ &= \frac{1}{|x|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{|x|}.\end{aligned} \qquad (*)$$

Deriverar vi båda led fås

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{-x^2t^2}\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2t^2}\bigl(-2xt^2\bigr)\,dt = -2x\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-x^2t^2}\,dt,\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\,\text{HL} = \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{\pi}}{|x|} = -\frac{\sqrt{\pi}}{x^2}\,\operatorname{sgn} x,$$

vilket ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-x^2t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^3}\,\operatorname{sgn} x,$$

och med $x = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,e^{-t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Deriverar vi $(*)$ ytterligare en gång fås

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\Bigl(-2x\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-x^2t^2}\,dt\Bigr)\\ &= -2\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-x^2t^2}\,dt - 2x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\,t^2e^{-x^2t^2}\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{x^3}\,\operatorname{sgn} x - 2x\int_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-x^2t^2}(-2xt^2)\,dt\\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{x^3}\,\operatorname{sgn} x + 4x^2\int_{-\infty}^{\infty} t^4e^{-x^2t^2}\,dt,\end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,\text{HL} = \frac{d}{dx}\Bigl(-\frac{\sqrt{\pi}}{x^2}\,\operatorname{sgn} x\Bigr) = \frac{2\sqrt{\pi}}{x^3}\,\operatorname{sgn} x,$$

vilket ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^4\,e^{-x^2t^2}\,dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{4x^5}\,\operatorname{sgn} x,$$

och med $x = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^4e^{-t^2}\,dt = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

För att deriveringen av integralerna ska vara legitim måste följande villkor vara uppfyllda

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dt,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt$ existerar,
2. $\displaystyle\Bigl|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Bigr| \le g(t),$ där $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt < \infty,$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)\,dt,\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,dt$ existerar, och
4. $\displaystyle\Bigl|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\Bigr| \le k(t),$ där $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\,dt < \infty,$

för alla x i en omgivning av 1, där

$$\begin{aligned} f(x,t) &= e^{-x^2t^2}, \\ h(x,t) &= t^2\, e^{-x^2t^2}. \end{aligned}$$

Alla dessa villkor reduceras i slutändan till att visa att integraler av typen

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n\, e^{-x^2t^2}\, dt \qquad (n \text{ naturligt tal}) \tag{$\dagger$}$$

är konvergenta.

Jämför vi med den konvergenta integralen av $1/t^2$ i $t = \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n\, e^{-x^2t^2}}{1/t^2} = \lim_{t\to\infty} t^{n+2}\, e^{-x^2t^2} = 0 \qquad (x \neq 0)$$

ger jämförelseprincipen att (†) är konvergent.

13.5.7 Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2}$$

och använd resultatet för att beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} \quad \text{och} \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3}.$$

Vi har

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} &= \frac{1}{x^2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+(t/x)^2} = \{\, s = t/x;\ ds = dt/x \,\} \\ &= \frac{1}{|x|}\int_0^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{|x|}\Big[\arctan s\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2|x|}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Vi deriverar båda led

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x^2+t^2}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-1}{(x^2+t^2)^2}\cdot 2x\, dt = -2x\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2}, \\ \frac{d}{dx}\,\text{HL} &= \frac{d}{dx}\frac{\pi}{2|x|} = -\frac{\pi}{2x^2}\,\operatorname{sgn} x, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} = \frac{\pi}{4x^3}\,\operatorname{sgn} x. \tag{$\dagger$}$$

En derivering av (†) ger

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,\text{VL} &= \frac{d}{dx}\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^2} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(x^2+t^2)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{-2}{(x^2+t^2)^3}\cdot 2x\, dt = -4x\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3}, \\ \frac{d}{dx}\,\text{HL} &= \frac{d}{dx}\frac{\pi}{4x^3}\,\operatorname{sgn} x = -\frac{3\pi}{4x^4}\,\operatorname{sgn} x, \end{aligned}$$

vilket ger

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^3} = \frac{3\pi}{16x^5}\,\operatorname{sgn} x.$$

För att kunna motivera deriveringen av integralerna måste villkoren i sats 13.5.5 vara uppfyllda. Dessa villkor består väsentligen av att visa att integraler av typen

$$\int_0^{\infty} \frac{t^m}{(x^2+t^2)^n}\, dt \qquad (m < n \text{ naturliga tal})$$

konvergerar, vilket man gör genom att jämföra med $1/t^2$ i $t = \infty$.

13.5.10 Lös integralekvationen

$$f(x) = Cx + D + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt.$$

Vi ska begränsa oss till att söka efter lösningar som uppfyller villkoren för derivering av integral.

Vi deriverar integralekvationen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,\text{VL} &= f'(x),\\
\frac{d}{dx}\,\text{HL} &= C + \frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt\\
&= C + \frac{d}{d\dot{x}}\int_0^{x} (x-t)f(t)\,dt + \frac{d}{d\dot{x}}\int_0^x (\dot{x}-t)f(t)\,dt\\
&= C + (x-t)f(t)\big|_{t=x} + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}(x-t)f(t)\,dt\\
&= C + \int_0^x f(t)\,dt,
\end{aligned}$$

d.v.s.

$$f'(x) = C + \int_0^x f(t)\,dt. \qquad (*)$$

Ytterligare en derivering ger

$$f''(x) = 0 + f(x).$$

Denna differentialekvation har den allmänna lösningen

$$f(x) = A\,e^x + B\,e^{-x}.$$

Integralekvationen har randvillkoren

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 + D + 0 = D,\\
f'(0) &= C + 0 = C, \qquad \text{(från } (*)\text{)},
\end{aligned}$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
A + B &= D, && (1)\\
A - B &= C. && (2)
\end{aligned}$$

(1) + (2) och (1) − (2) ger

$$\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D,\\
B &= \tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}C.
\end{aligned}$$

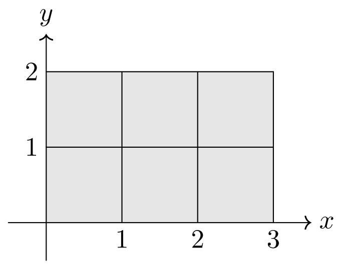
Alltså är lösningen

$$f(x) = \left(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D\right)e^x + \left(\tfrac{1}{2}D - \tfrac{1}{2}C\right)e^{-x}.$$

14.1.4 Bestäm Riemannsumman av integralen

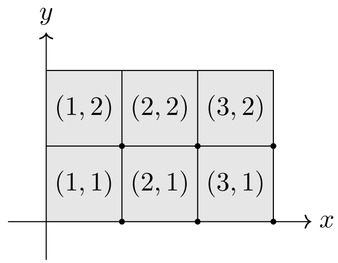
$$I = \iint_D (5 - x - y)\,dA$$

för partitionen av rektangeln $D:\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$ som består av sex kvadrater med sidlängd 1 enligt figuren,



och med valet av partitionspunkt (x^*_{ij}, y^*_{ij}) som nedre höger hörnpunkt.

Vi indexerar först partitionselementen med ett indexpar (i,j) där i ansvarar för uppräkning i horisontell led och j för vertikal led.



I figuren har vi också ritat in partitionspunkterna.

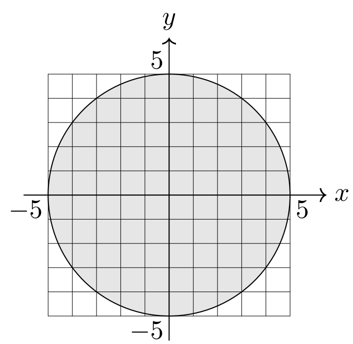
Eftersom partitionspunkterna är separerade med avståndet 1 både horisontellt och vertikalt, och index $(1,1)$ svarar mot punkten $(1,0)$ ges koordinaterna för partitionspunkterna av

$$x^*_{ij} = i,$$
$$y^*_{ij} = j-1.$$

Riemannsumman blir

$$\sum_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 2}} f\bigl(x^*_{ij}, y^*_{ij}\bigr)\,\Delta A_{ij} = \sum_{\substack{1\le i\le 3\\1\le j\le 2}} f(i,j-1)\cdot 1$$
$$= f(1,0)+f(1,1)+f(2,0)+f(2,1)+f(3,0)+f(3,1)$$
$$= 4+3+3+2+2+1 = 15.$$

14.1.8 Låt D vara cirkeldisken $x^2+y^2 \le 25$ och P partitionen av kvadraten $-5\le x\le 5$, $-5\le y\le 5$ i etthundra 1×1-kvadrater enligt figuren.

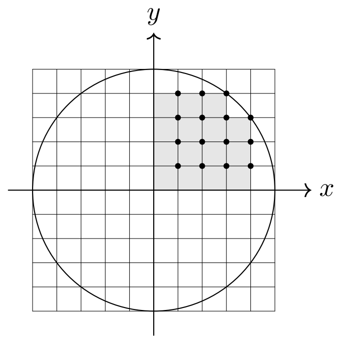


Approximera dubbelintegralen

$$J = \iint_D f(x,y)\,dA,$$

där $f(x,y) = 1$, med Riemannsumman $R(f,P)$ genom att välja partitionspunkterna (x^*_{ij}, y^*_{ij}) som den hörnpunkt i partitionskvadraten mest avlägsen från origo.

Eftersom f är noll utanför disken D och 1 innanför, är Riemannsumman antalet partitionspunkter innanför D gånger partitionselementets area.



P.g.a. symmetrin behöver vi bara räkna bidragande partitionspunkter i första kvadranten och multiplicera resultatet med 4.

$$R(f,P) = 4\cdot 15 = 60.$$

14.1.10 Beräkna integralen J från uppgift 14.1.8.

Integralens värde är arean av cirkeldisken D,

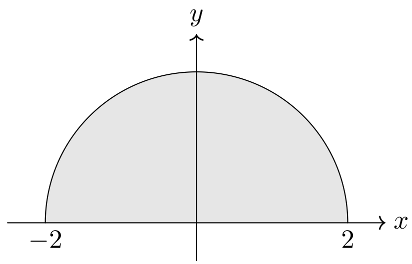
$$J = \pi\cdot 5^2 = 25\pi.$$

14.1.14 Beräkna följande dubbelintegral medelst inspektion,

$$\iint_D (x+3)\,dA,$$

där D är halvdisken $0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$.

Området D är övre halvan av cirkelskivan $x^2+y^2 \le 4$ med mittpunkt i origo och radie 2.



Integralen kan med linjäriteten delas upp i två,

$$\iint_D (x+3)\,dA = \iint_D x\,dA + 3\iint_D dA.$$

Integranden i den första integralen i högerledet är en udda funktion av x, och eftersom integrationsområdet är origosymmetriskt i x-led är integralen noll.

Den andra integralens värde är arean av D, d.v.s. $\frac{1}{2}\pi\,2^2 = 2\pi$. Alltså är

$$\iint_D (x+3)\,dA = 6\pi.$$

14.1.20 Beräkna följande dubbelintegral medelst inspektion,

$$\iint_S (x+y)\,dA,$$

där S är kvadraten $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$.

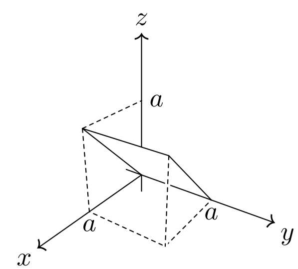
Vi delar upp integralen med linjäriteten

$$\iint_S (x+y)\,dA = \iint_S x\,dA + \iint_S y\,dA.$$

Eftersom kvadraten är spegelsymmetrisk i x och y ($(x,y) \leftrightarrow (y,x)$) är integralerna i högerledet lika,

$$\iint_S (x+y)\,dA = 2\iint_S x\,dA.$$

Värdet av integralen i högerledet är volymen under funktionsytan $z = f(x,y) = x$ inom kvadraten S.



Denna volym är $\frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{2}a^3$. Alltså är

$$\iint_S (x+y)\,dA = a^3.$$