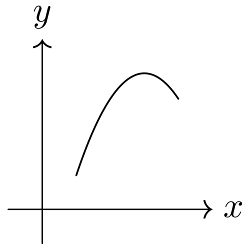
Parameterkurvor

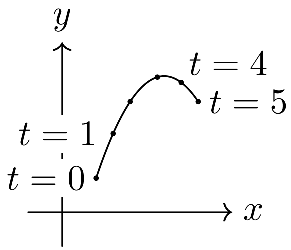
En parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (a \le t \le b)$$

beskriver en kurva i planet.



Till varje t-värde svarar en punkt på kurvan

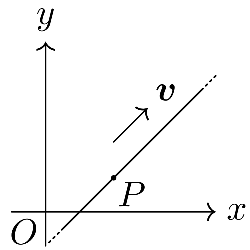


När vi låter t gå från $t = a$ till $t = b$ så genomlöps parameterkurvan från startpunkten $\boldsymbol{r}(a)$ till slutpunkten $\boldsymbol{r}(b)$.

Observera att en parameterkurva är mer än den geometriska kurvan. Till varje punkt på kurvan finns dessutom ett t-värde.

Några vanliga parameterkurvor

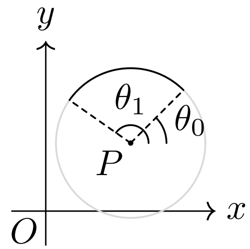
Rät linje



En rät linje genom punkten P och med riktning $\boldsymbol{v}$ har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\boldsymbol{v} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

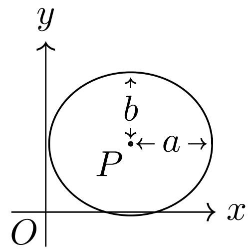
Cirkelbåge



En cirkelbåge med mittpunkt i P och med startvinkel θ_0 och slutvinkel θ_1 samt radie r har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta_0 < \theta < \theta_1).$$

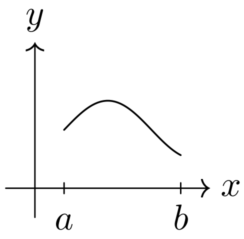
Ellips



En ellips med mittpunkt i P och halvaxlar a och b har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t < 2\pi).$$

Funktionsgraf

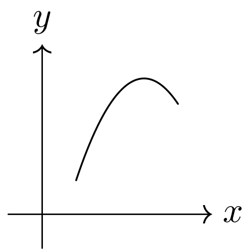


Grafen $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad (a \leq t \leq b).$$

Plan kurva

En plan kurva är den mängd i planet som uppstår av en parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.



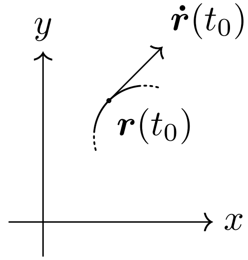
En plan kurva är alltså en parameterkurva utan parametrisering.

Notera att en plan kurva kan ha många olika parametriseringar (beskrivningar) och fortfarande vara samma kurva.

Riktningsvektor

En parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ har i punkten som svarar mot parametervärdet t_0 riktningsvektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$



där $\dot{x}$ och $\dot{y}$ betecknar derivatan av x respektive y med avseende på t.

Regulär parameterkurva

En parameterkurva är regulär om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq \mathbf{0} \quad \text{för alla parametervärden } t.$$

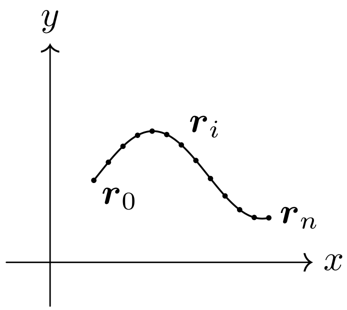
Båglängd

Givet en parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

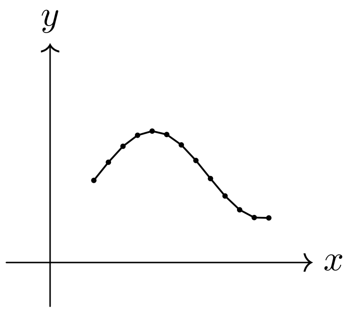
Vi ska bestämma dess längd.

Dela in parameterintervallet $[a, b]$ i delintervall med ändpunkter $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Detta ger samtidigt en indelning av parameterkurvan



där $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$.

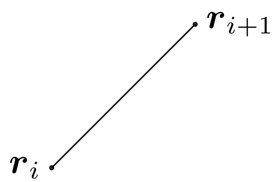
I varje kurvstycke approximerar vi kurvan med ett linjestycke



och kurvans längd L med summan av linjestyckenas längd

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} L_i.$$

Längden av ett linjestycke är



$$L_i = |\boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i| = |\Delta \boldsymbol{r}_i|.$$

Låter vi indelningen av kurvan gå mot 0, d.v.s. $n \to \infty$, får vi den verkliga längden

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta \boldsymbol{r}_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i \cdot \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta t_i} \right| \\ &= \left\{ \text{Differentialkalkylens medelvärdessats} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i \, |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)| \\ &= \left\{ \text{Riemannsumma} \right\} = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \, dt. \end{aligned}$$

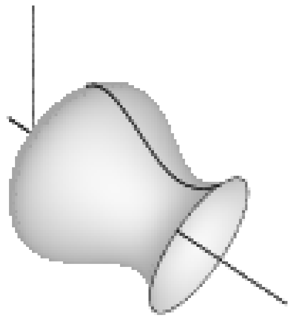
Uttrycket $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \, dt$ kallas för båglängdselementet.

Area av en rotationsyta

Givet en parameterkurva

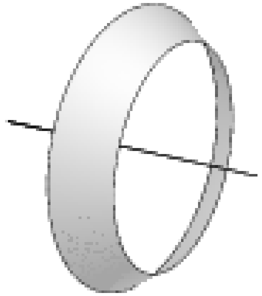
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

Vi ska bestämma arean av den yta som uppstår när kurvan roterar kring en av koordinataxlarna.



Precis som tidigare delas parameterkurvan upp i små kurvstycken. Varje kurvstycke roteras kring koordinat-axeln och rotationsarean blir summan av kurvstyckenas rotationsareor.

Vid rotation kring x-axeln kan vi skriva rotationsareaelementet som

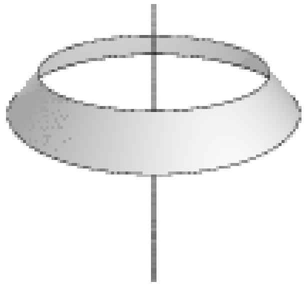


$$\begin{aligned} dA &= \text{omkrets} \cdot \text{båglängdselementet} \\ &= 2\pi y(t) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt \end{aligned}$$

Rotationsarean får vi genom att integrera upp areaelementet

$$A = \int dA = \int_a^b 2\pi y(t) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt.$$

En rotation kring y-axeln ger istället rotationsareaelementet



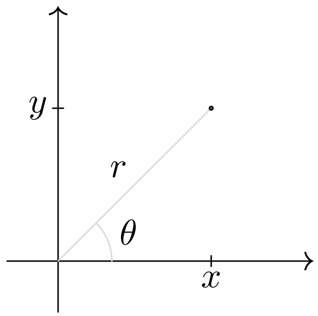
$$\begin{aligned} dA &= \text{omkrets} \cdot \text{båglängdselementet} \\ &= 2\pi x(t) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt \end{aligned}$$

och rotationsarean

$$A = \int dA = \int_a^b 2\pi x(t) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt.$$

Polära koordinater

En punkts läge i planet kan bestämmas om vi anger dess avstånd r från origo och den vinkel θ som punkten har relativt x-axeln.



Talparet (r, θ) kallas för punktens polära koordinater.

En punkt med polära koordinater (r, θ) har de kartesiska koordinaterna

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

Observera att en punkt kan ha många olika polära koordinater

$$(r, \theta),\ (r, \theta + 2\pi),\ (r, \theta + 4\pi),\ \ldots$$

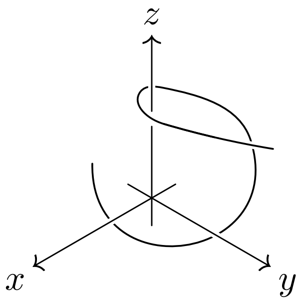
Ofta låter man därför $0 \leq \theta < 2\pi$. På samma ger negativa r upphov till mångtydighet.

Parameterkurvor i rummet

En parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad (a \le t \le b)$$

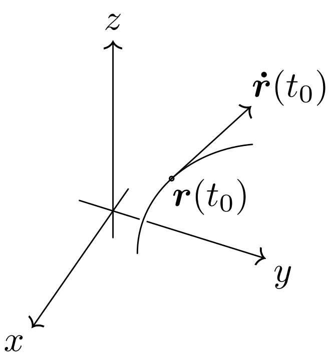
beskriver en kurva i rummet.



Riktningsvektor

En parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ i rummet har i punkten som svarar mot parametervärdet t riktningsvektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$



Enhetsvektorn är $\dot{\boldsymbol{r}}(t)/|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|$.

Räkneregler

Antag att $\boldsymbol{u}(t)$ och $\boldsymbol{v}(t)$ är vektorer och $\lambda(t)$ är en skalär.

1. $\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}(t) + \dot{\boldsymbol{v}}(t)$
2. $\frac{d}{dt}\big(\lambda(t)\boldsymbol{u}(t)\big) = \dot{\lambda}(t)\boldsymbol{u}(t) + \lambda(t)\dot{\boldsymbol{u}}(t)$
3. $\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{v}}(t)$
4. $\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \dot{\boldsymbol{v}}(t)$
5. $\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\big(\lambda(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}\big(\lambda(t)\big)\,\dot{\lambda}(t)$

Båglängd

Längden av parameterkurvan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ är

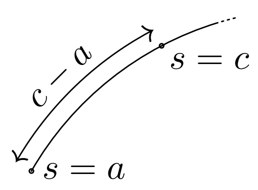
$$L = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt.$$

Bågländgsparametrisering

Om en parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \qquad (a \leq s \leq b)$$

har egenskapen att alla punkter på kurvan har ett parametervärde som är lika med deras avstånd längs kurvan till startpunkten, då sägs kurvan vara bågländgsparametriserad.



Mera formellt lyder villkoret

$$\int_a^s |\dot{\boldsymbol{r}}(\sigma)|\, d\sigma = s - a \qquad \text{för alla } s. \qquad (*)$$

Sats $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ är bågländgsparametriserad $\Leftrightarrow$ $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ är en enhetsvektor för alla s.

Bevis ($\Rightarrow$) Derivera ($*$) m.a.p. s

$$\text{VL} = \frac{d}{ds}\int_a^s |\dot{\boldsymbol{r}}(\sigma)|\, d\sigma = |\dot{\boldsymbol{r}}(s)| = \text{HL} = 1.$$

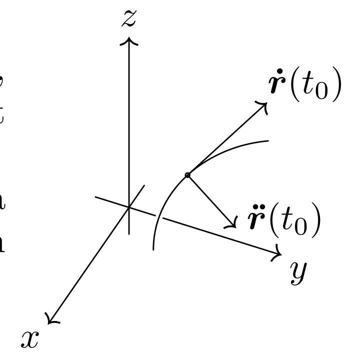
($\Leftarrow$) Eftersom $|\boldsymbol{r}(s)| = 1$ är ($*$) uppfylld.

En mekanisk tolkning

Om en partikels läge ges av $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, där t är tiden, då är partikelns

$$\begin{aligned} \text{hastighet} &= \dot{\boldsymbol{r}}(t), \\ \text{fart} &= |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|, \\ \text{acceleration} &= \ddot{\boldsymbol{r}}(t). \end{aligned}$$

Om partikelns fart är konstant, då är accelerationen riktad mot rörelsens centrum.
Accelerationens belopp är då ett mått på hur mycket kurvan kröker sig.



Definition Krökningen för en bågländgsparametriserad (konstant fart 1) kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ definieras som

$$\kappa(s) = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|.$$

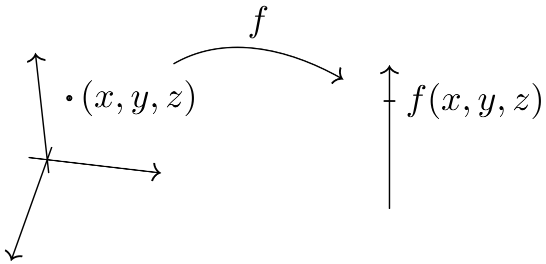
Om $\kappa(s) \equiv 0$ då är kurvan en rät linje.
Om $\kappa(s) \equiv 1/R$ då är kurvan en cirkel med radie R.

Sats För en allmänt parametriserad kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ gäller att krökningen i punkten $\boldsymbol{r}(t)$ är

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3}.$$

Funktioner av flera variabler

En funktion f som avbildar punkter $(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ till värden i $\boldsymbol{R}$ kallas för en reellvärd funktion av n variabler.

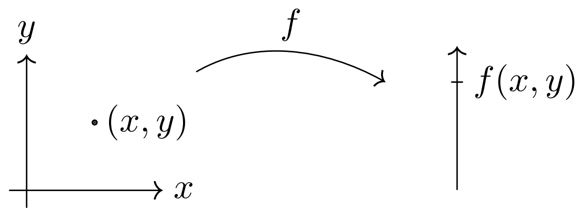


Definitionsmängden till f är den mängd i $\boldsymbol{R}^n$ där f är definierad.

Värdemängden till f är alla de reella värden som f antar då $(x_1, \ldots, x_n)$ varierar över definitionsmängden.

Nivåkurva

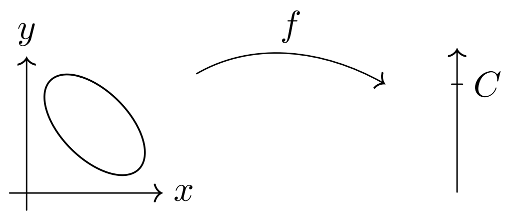
Om vi antar att $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$



För varje värde C i f:s värdemängd finns en mängd i definitionsmängden på vilken f antar värdet C,

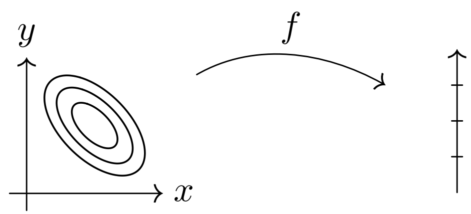
$$f(x, y) = C.$$

Typiskt är denna mängd en kurva i $\boldsymbol{R}^2$.



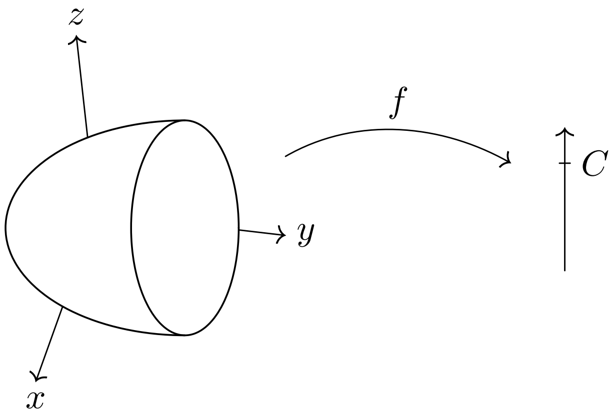
Alla punkter på denna s.k. nivåkurva har alltså samma funktionsvärde C.

För olika värden på C uppstår olika nivåkurvor.

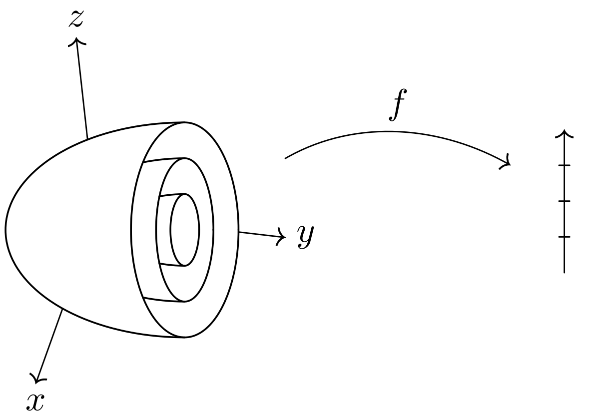


Nivåyta

För funktioner $f\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ blir den mängd där f antar ett fixt värde, $f(x,y,z) = C$, en yta.



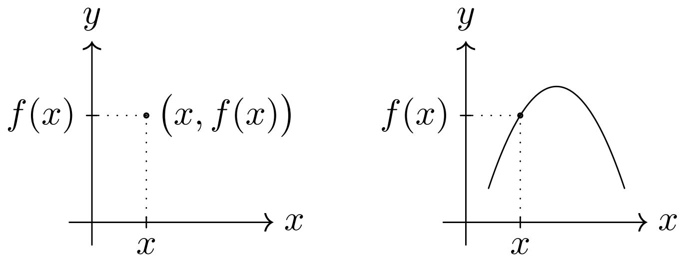
Olika C-värden ger olika nivåytor.



Funktionsgraf

$\boldsymbol{y = f(x)}$

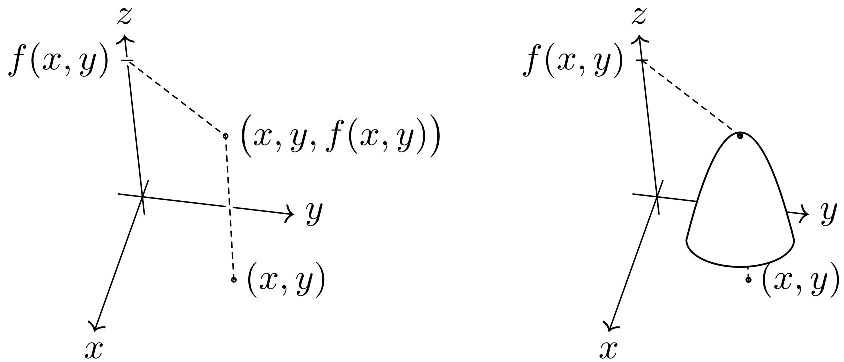
Till varje punkt x på x-axeln markerar vi punkten $\bigl(x, f(x)\bigr)$.



När detta görs för alla x i definitionsmängden uppstår en funktionsgraf.

$\boldsymbol{z = f(x, y)}$

Till varje punkt (x, y) i x, y-planet markerar vi punkten $\bigl(x, y, f(x, y)\bigr)$.



När detta görs för alla (x, y) i definitionsmängden uppstår en funktionsgraf.

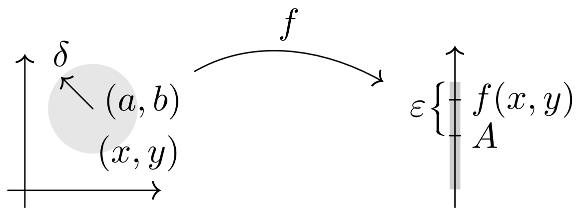
Gränsvärde

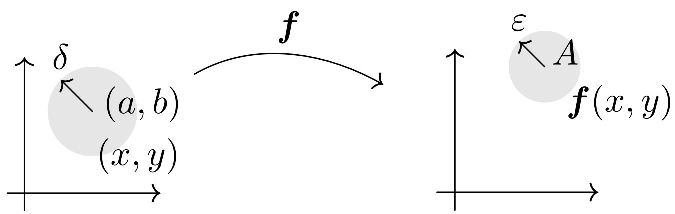
Gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

definieras som

> Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer så ska det finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$
>
> för alla (x,y) s.a. $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$.





Räkneregler

Om $\lim f$ och $\lim g$ existerar, då gäller

1. $\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$
2. $\lim(f \cdot g) = \big(\lim f\big) \cdot \big(\lim g\big)$
3. $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim f}{\lim g} \quad$ om $\lim g \neq 0$
4. $\lim F\big(f(x,y)\big) = F\big(\lim f(x,y)\big)$
   om F är kontinuerlig i $t = \lim f(x,y)$.

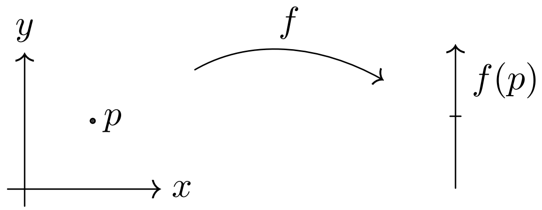
Kontinuitet

Funktionen $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Partialderivata

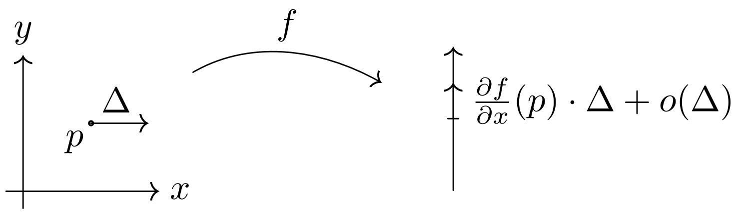
Låt $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.

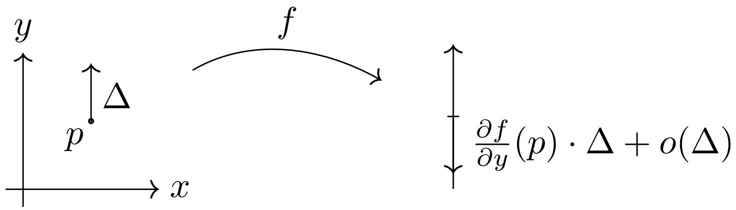


Partialderivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

mäter den relativa ändringen av f:s värde i $p = (x_0, y_0)$ i riktning parallellt med x- respektive y-axeln.





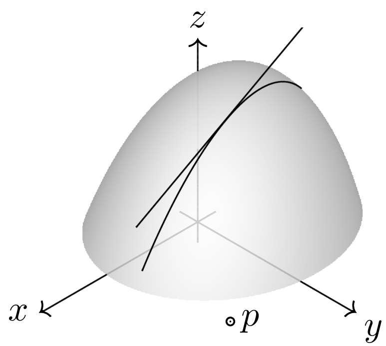
Analytiskt definieras de som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

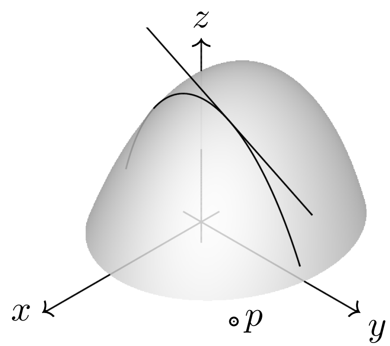
Andra beteckningar är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = f_1(p) = D_1 f(p),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = f_2(p) = D_2 f(p).$$

Partialderivatorna kan geometriskt ses som lutningen av funktionsgrafen i p parallellt med koordinataxlarna.



lutning $= \frac{\partial f}{\partial x}(p)$



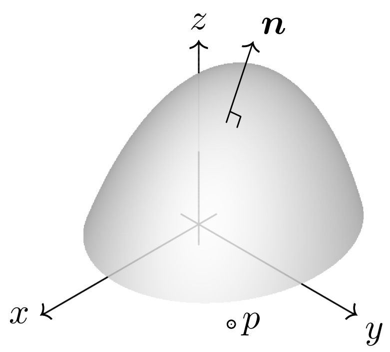
lutning $= \frac{\partial f}{\partial y}(p)$

För $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ definieras partialderivatorna analogt.

Normalvektor

Funktionsytan $z = f(x,y)$ har i punkten $\big(p, f(p)\big)$ normalvektorn

$$\boldsymbol{n} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), -1\Big).$$



Högre ordningars partialderivata

De partiella derivatorna kan i sin tur deriveras partiellt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\\
f_{123} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Sats Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ och f_{ij}, f_{ji} är kontinuerliga i en omgivning av p, då gäller att

$$f_{ij}(p) = f_{ji}(p).$$

Kedjeregeln

Om f är en funktion av n variabler,

$$f = f(x_1, \ldots, x_n),$$

där variablerna beror i sin tur på m andra variabler

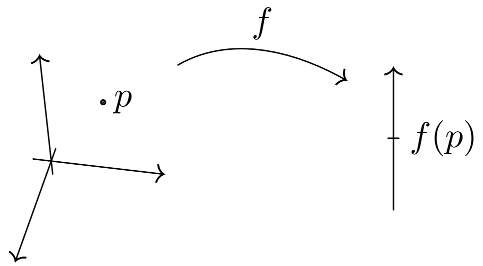
$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, \ldots, y_m) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(y_1, \ldots, y_m). \end{aligned}$$

Då är

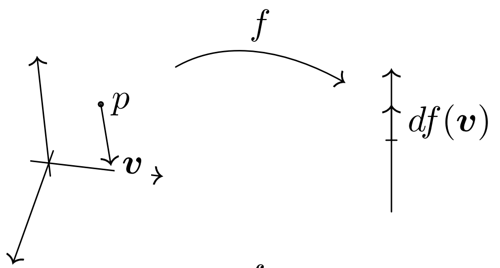
$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}.$$

Differentialer I

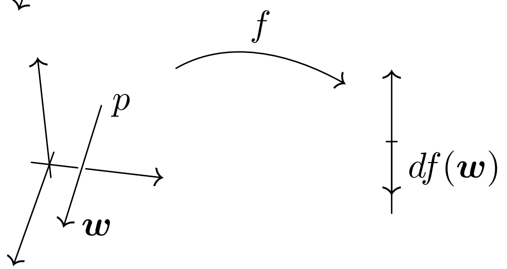
Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ och fixera $p \in \boldsymbol{R}^n$.



När vi rör oss i riktning $\boldsymbol{v}$ utifrån punkten p så anger $df(\boldsymbol{v})$ ändringstakten av f.



liten positiv
ändring av f:s
värde i riktning $\boldsymbol{v}$.

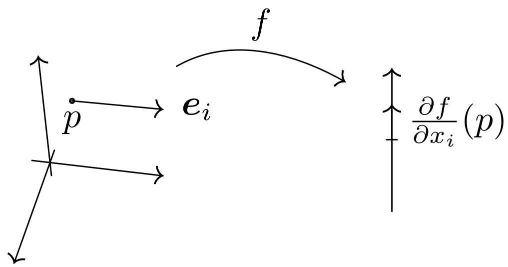


stor negativ
ändring av f:s
värde i riktning $\boldsymbol{w}$.

df kallas för differentialen till f och är en linjär avbildning av riktningar utifrån p till värdeändringar i $\boldsymbol{R}$.

Om vi rör oss i riktning parallellt med en av basvektorerna $\boldsymbol{e}_i$ så vet vi att f har ändringstakten $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, alltså är

$$df(\boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$



Eftersom df är en linjär avbildning så måste f ha $1 \times n$-matrisen

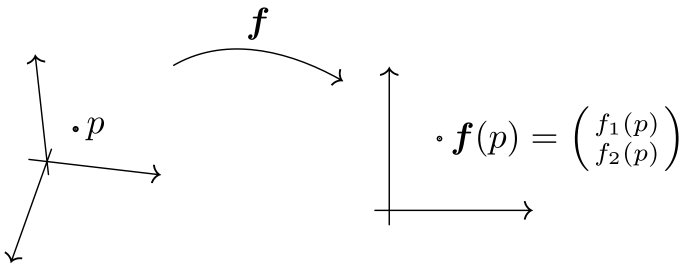
$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} df(\boldsymbol{e}_1) & df(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & df(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Denna matris kallas för Jacobimatrisen till f i punkten p.

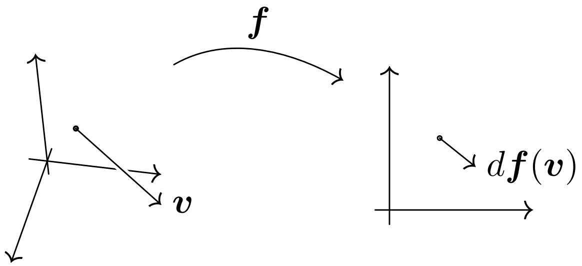
Notera att df också beror av baspunkten p. Ibland brukar man därför skriva df_p.

Differentialer II

Antag att $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ och fixera $p \in \boldsymbol{R}^3$.



Om vi utifrån punkten p rör oss i riktning $\boldsymbol{v}$ så anger $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ ändringstakten av $\boldsymbol{f}$, d.v.s. både hur mycket och i vilken riktning $\boldsymbol{f}$ ändras.



Om vi rör oss parallellt med x-axeln ($\boldsymbol{e}_x$-riktningen) så vet vi att $\boldsymbol{f}$ har ändringstakten

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) \end{pmatrix}.$$

På samma sätt har vi att

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(p) \end{pmatrix}.$$

Eftersom $d\boldsymbol{f}$ är en linjär avbildning av riktningar utifrån p till ändringsriktningar i $\boldsymbol{f}(p)$ har $d\boldsymbol{f}$ 2×3-matrisen

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_x) & d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_y) & d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_z) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(p) \end{pmatrix}.$$

Detta är Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$ i punkten p.

Nabla

En behändig beteckning är nabla ∇ som är radvektorn

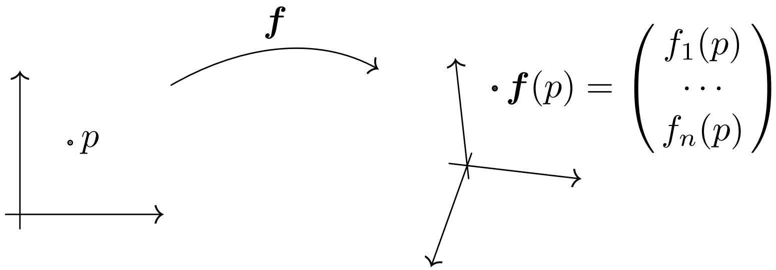
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Med denna symbol kan Jacobimatrisen ovan sammanfattas som

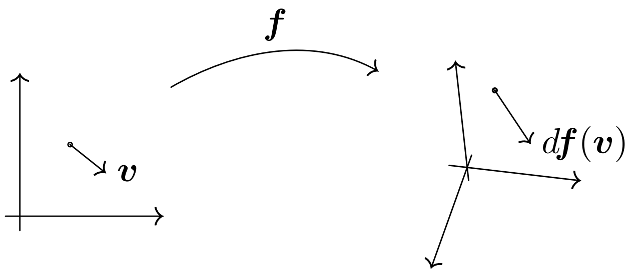
$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \nabla f_2(p) \end{pmatrix}.$$

Differentialer III

Antag att $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ och fixera $p \in \boldsymbol{R}^m$.



Differentialen $d\boldsymbol{f}$ avbildar riktningsvektorer utgående från p till ändringsvektorer utgående från $\boldsymbol{f}(p)$.

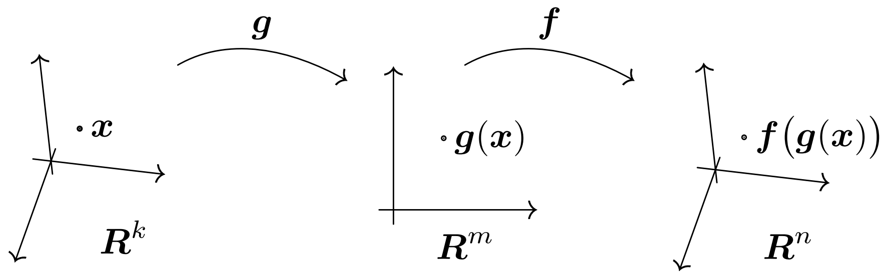


$d\boldsymbol{f}$ har $n \times m$-matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Sammansättningar

Antag att $\boldsymbol{g}\colon \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^m$ och $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$.



Då kan vi bilda den sammansatta avbildningen $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ som

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big).$$

I koordinatform blir detta

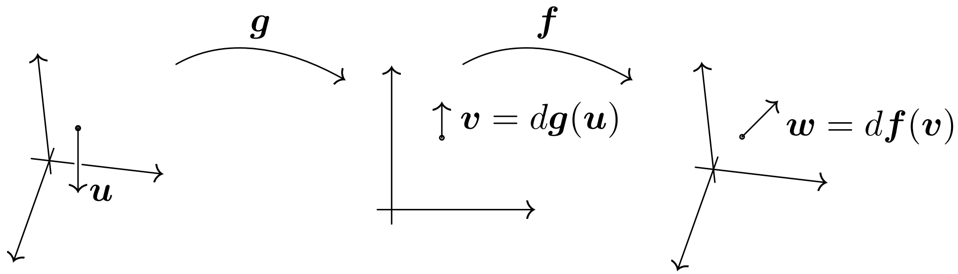
$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \\ f_2\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \end{pmatrix},$$

där

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \\ \cdots\cdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_k) \\ g_2(x_1, \ldots, x_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m(x_1, \ldots .x_k) \end{pmatrix}.$$

Kedjeregeln

Differentialen $d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$ till den sammansatta funktionen avbildar riktningar enligt mönstret



Eftersom differentialer är linjära avbildningar svarar sammansättningar mot matrismultiplikationer. $d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$ avbildar riktningen $\boldsymbol{u}$ på

$$
\begin{aligned}
d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{w} = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \\
&= d\boldsymbol{f}\big(d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})\big) = d\boldsymbol{f} \circ d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}}_{d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})\text{:s matris}} \big(\boldsymbol{u}\big)\,.
\end{aligned}
$$

Linjär algebra repetition

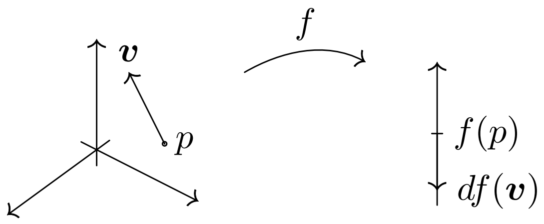
Om $T\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ är en linjär transformation då har T matrisen

$$
\begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\boldsymbol{e}_1) & T(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & T(\boldsymbol{e}_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}
$$

där $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ är standardbasen för $\boldsymbol{R}^m$.

Riktningsderivata och gradient

Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.



Ändringstakten av f i en riktning $\boldsymbol{v}$ utgående från p ges som bekant av

$$df(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Ett annat namn på denna storhet är riktningsderivatan till f och betecknas

$$D_{\boldsymbol{v}} f(p) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \qquad (*)$$

Genom att införa gradienten

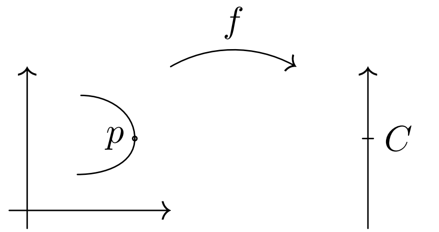
$$\nabla f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

kan $(*)$ skrivas

$$D_{\boldsymbol{v}} f(p) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f(p). \qquad (\dagger)$$

Gradientens geometriska innebörd

Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ och betrakta p på en nivåyta till f



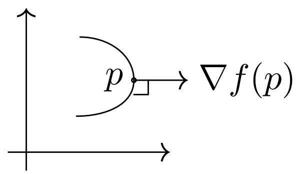
Om vi utifrån p väljer en riktning $\boldsymbol{v}$ som är parallell med nivåytan så är riktningsderivatan till f i $\boldsymbol{v}$-riktningen noll eftersom f inte ändrar värde längs nivåytan.

Detta betyder att

$$D_{\boldsymbol{v}} f = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f = 0$$

för alla $\boldsymbol{v}$ parallella med nivåytan.

Med andra ord är ∇f vinkelrät mot nivåytan.

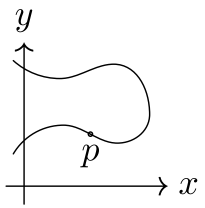


Implicita funktionssatsen I

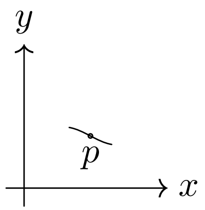
Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ och betrakta sambandet

$$f(x,y) = 0.$$

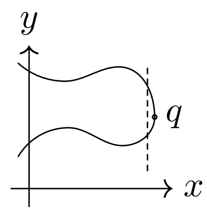
Ett sådant samband är uppfyllt för punkter längs 0-nivåkurvan i x, y-planet.



Lokalt kring en punkt p går det oftast att från sambandet lösa ut $y = y(x)$.



De undantagspunkter omkring vilka vi inte kan definiera $y = y(x)$ är alla punkter där nivåkurvan har lodrät tangent.



Kring q kan vi inte definiera $y = y(x)$ eftersom x-värden till vänster om q har lokalt två y-värden.

Om nivåkurvan har en icke-lodrät tangent i p så kan vi alltså lokalt definiera $y = y(x)$.

Eftersom gradienten

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

är vinkelrät mot tangenten blir villkoret om icke-lodrät tangent

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

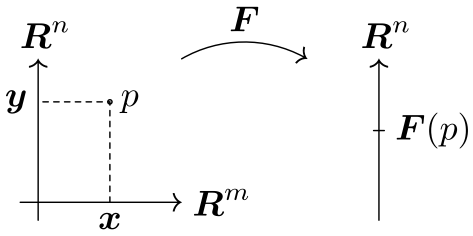
Sats Om $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $p = (x_0, y_0)$ och

$$f(x_0,y_0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0.$$

Då finns en omgivning av (x_0, y_0) där lösningarna till $f(x,y) = 0$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $y = y(x)$.

Implicita funktionssatsen II

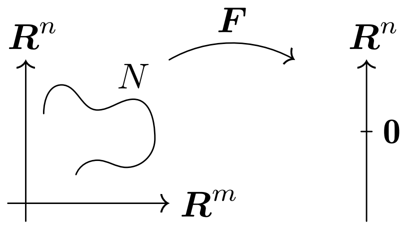
Antag att $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^{m+n} \to \boldsymbol{R}^n$.



Sambandet

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

definierar en $\boldsymbol{0}$-nivåyta N i definitionsmängden



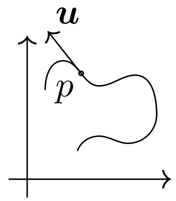
Alla punkter på N avbildas med $\boldsymbol{F}$ på $\boldsymbol{0}$. Lokalt går det ofta utifrån $(*)$ definiera

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}).$$

Vi ska ta fram ett tillräckligt villkor när detta går.

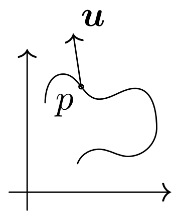
Betrakta en punkt p på N och en riktning $\boldsymbol{u}$ utifrån p. Om riktningen $\boldsymbol{u}$ är parallell med N så ändras inte $\boldsymbol{F}$:s värde i den riktningen, d.v.s. vi har att

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}.$$



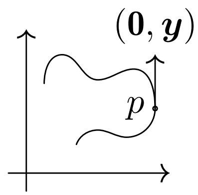
Är däremot $\boldsymbol{u}$ inte parallell med N så ändras $\boldsymbol{F}$:s värde, d.v.s.

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}.$$



Vi kan garantera sambandet $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ om följande fall inte inträffar

$$d\boldsymbol{F}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \text{för något } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0},$$



d.v.s. att en $\boldsymbol{y}$-riktning $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{y})$ inte är parallell med N.

Villkoret för $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ är alltså att

$$d\boldsymbol{F}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{för alla } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}. \tag{$*$}$$

Differentialen $d\boldsymbol{F}$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \hdotsfor{6} \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

eller i blockmatrisform

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \end{pmatrix}.$$

Villkoret $(*)$ blir därför

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \qquad \forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0},$$

vilket betyder att nollrummet till matrisen $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}$ endast består av nollvektorn $\boldsymbol{0}$, d.v.s. att matrisen har full rang, eller ekvivalent att

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\Big) \neq 0.$$

Sats Om $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^{m+n} \to \boldsymbol{R}^n$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $p = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ och

$$\boldsymbol{F}(p) = \boldsymbol{0}$$
$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(p)\Big) \neq 0.$$

Då finns en omgivning av $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ där lösningarna till $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.

Taylors formel av ordning 2

Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerligt deriverbar av ordning 3 i en konvex omgivning D av $\boldsymbol{r}$, då gäller att

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{r}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{h} \\
&+ \boldsymbol{h}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{h} \\
&+ O(\boldsymbol{h})^3,
\end{aligned}
$$

för $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h} \in D$.

Beteckningar

$$
\begin{aligned}
&\text{Jakobianen till } f = J_f = df \\
&\quad = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{Hessianen till } f = H_f = d^2 f \\
&\quad = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Taylors formel av godtycklig ordning

Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerligt deriverbar av ordning m i en konvex omgivning D av $\boldsymbol{r}$, då gäller att

$$
f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{r}) + R_m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{h})
$$

för $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h} \in D$, där

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{h}\cdot\nabla &= h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \\
R_m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{h}) &= \frac{1}{m!} (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^m f(\boldsymbol{r}+\theta\boldsymbol{h}) \quad (0<\theta<1).
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomens entydighetssats

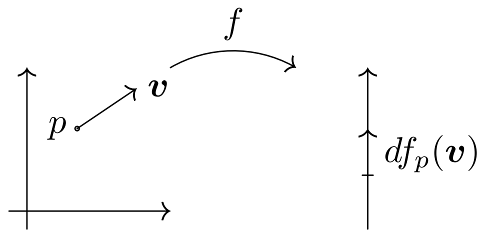
Om

$$
f(\boldsymbol{r}) = Q_n(\boldsymbol{r}) + O(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})^{n+1} \quad \text{då } \boldsymbol{r}\to\boldsymbol{a},
$$

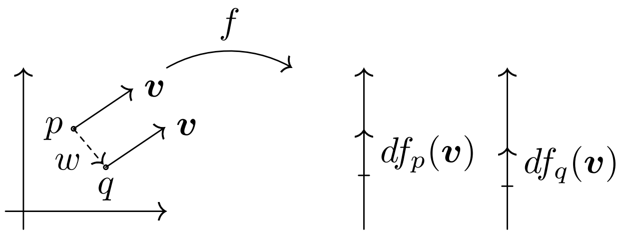
där Q_n är ett polynom av grad högst n. Då är Q_n Taylorpolynomet av grad n till f i punkten $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$.

Andradifferentialen

Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.
Differentialen $df_p(\boldsymbol{v})$ mäter hur mycket f ändrar sig om vi rör oss i riktning $\boldsymbol{v}$.



Andradifferentialen $d^2f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ talar om hur mycket $df(\boldsymbol{v})$ ändrar sig när baspunkten p rör sig i riktning $\boldsymbol{w}$.



d^2f mäter alltså ändringen av ändringen av f:s funktionsvärde.

Om $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är lika brukar man förkortat skriva

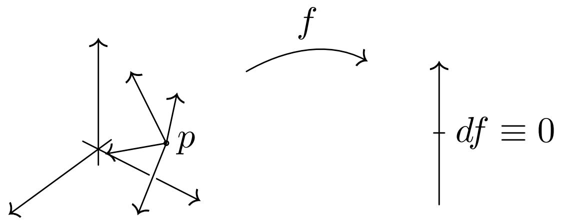
$$d^2f(\boldsymbol{v}) = d^2f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}).$$

$d^2f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ är en kvadratisk form som kan skrivas i matrisformen

$$\boldsymbol{w}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{v}.$$

Kritiska punkter

Låt $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. En punkt p är en kritisk punkt om $df(\boldsymbol{v}) = 0$ för alla riktningar $\boldsymbol{v}$ utgående från p.



Lokala extremvärden

En funktion $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ har en lokal maximipunkt i p om det finns en omgivning U av p där

$$f(p) \geq f(q) \qquad \text{för alla } q \in U.$$

Om det finns en omgivning V kring p där

$$f(p) \leq f(q) \qquad \text{för alla } q \in U,$$

då har f en lokal minimipunkt i p.

Sats De lokala extrempunkterna till $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ återfinns bland följande punkter:

1. kritiska punkter, d.v.s. där $\nabla f = \mathbf{0}$,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter till området.

Klassificering av kritiska punkter

Om p är en kritisk punkt till $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, då har f följande Taylorutveckling kring p,

$$f(p+\boldsymbol{h}) = f(p) + \underbrace{J_f(p)}_{=0}\,\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} + O(\boldsymbol{h})^3.$$

De kvadratiska termerna $\boldsymbol{h}^T H_f(p)\boldsymbol{h}$ avgör om p är en lokal min-, max- eller sadelpunkt.

$$\begin{array}{lccl} \text{Om} & \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} > 0 & \Rightarrow & \text{lokalt min,} \\ & \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} < 0 & \Rightarrow & \text{lokalt max,} \\ & \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} \gtrless 0 & \Rightarrow & \text{sadelpunkt,} \end{array}$$

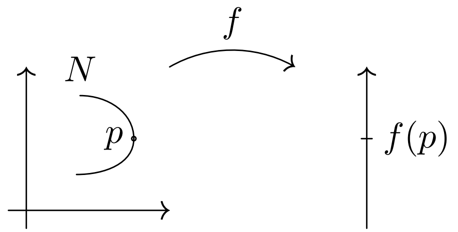
i övriga fall krävs studium av högre ordningars termer för att avgöra karaktären.

Lagranges multiplikatormetod

Betrakta optimeringsproblemet

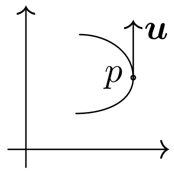
$$\begin{aligned} &\min \quad f(x_1,\dots,x_n) \\ &\text{då} \quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Punkterna som uppfyller $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ bildar en mängd N i $\boldsymbol{R}^n$.



Betrakta en punkt p på N. Punkten p är en kritisk punkt till f på N om

$$df(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\cdot\nabla f = 0 \qquad (\dagger)$$



för alla $\boldsymbol{u}$ parallella med N, d.v.s. f:s värde ändras inte när vi rör oss parallellt med N.

Geometriskt betyder $(\dagger)$ att ∇f är vinkelrät mot N i p.

Hur bestämmer vi vilka riktningar $\boldsymbol{u}$ som är parallella med N?

Eftersom N är nollställeytan till $\boldsymbol{G}$ så är $\boldsymbol{u}$ parallell med N om

$$d\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

d.v.s. vi ändrar inte $\boldsymbol{G}$:s värde i riktning $\boldsymbol{u}$ utan stannar kvar på nollställeytan.

$(*)$ kan också skrivas i matrisform

$$\begin{pmatrix} -\nabla g_1 - \\ \dots\dots\dots \\ -\nabla g_m - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{u} \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket betyder att

$$\boldsymbol{u} \quad \perp \quad \nabla g_1,\dots,\nabla g_m.$$

I den kritiska punkten är alltså $\nabla f \perp \boldsymbol{u}$ för alla $\boldsymbol{u}$ s.a.

$$\boldsymbol{u} \quad \perp \quad \nabla g_1,\dots,\nabla g_m.$$

Detta betyder att

$$\nabla f \in \operatorname{span}\{\nabla g_1,\dots,\nabla g_m\}.$$

Sats Antag att f och $\boldsymbol{G}$ är kontinuerligt deriverbara. Då har optimeringsproblemet sin lösning i en av följande punkter

1. kritiska punkter, d.v.s. där
$$\nabla f \in \operatorname{span}\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\},$$
2. punkter där $\dim\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\} < n$ (singulära punkter),
3. punkter där någon av $\nabla f, \nabla g_1, \dots, \nabla g_m$ inte existerar,
4. randpunkter.

Satsen om extremvärden

Sats Om K är en kompakt mängd (sluten och begränsad) och $f\colon K \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerlig, då antar f såväl ett största som ett minsta värde på K.

Derivering av integraler

Sats Om f är kontinuerlig på intervallet $[a, x]$, då är
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Sats Antag att för alla x i intervallet (c, d) gäller att

1. $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,dt,\ \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ existerar, och
2. $\displaystyle\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right| \le g(t),\ \text{ där } \int_a^b g(t)\,dt = K < \infty.$

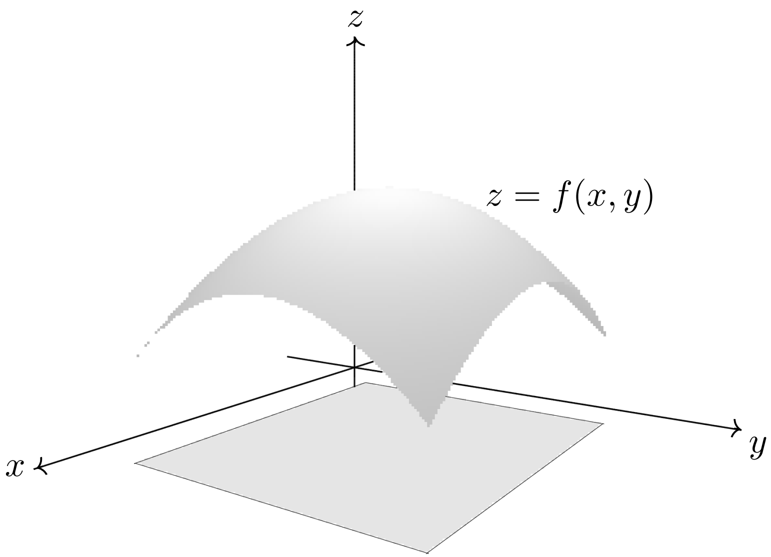
Då gäller att
$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$
för alla x i intervallet (c, d).

Om x förekommer både i integrationsgränserna och integranden ger kedjeregeln att
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt &= \frac{d}{d\underset{\cdot}{x}}\int_{a(\underset{\cdot}{x})}^{b(x)} f(x,t)\,dt \\ &\quad + \frac{d}{d\underset{\cdot}{x}}\int_{a(x)}^{b(\underset{\cdot}{x})} f(x,t)\,dt + \frac{d}{d\underset{\cdot}{x}}\int_{a(x)}^{b(x)} f(\underset{\cdot}{x},t)\,dt.\end{aligned}$$

Volymberäkning

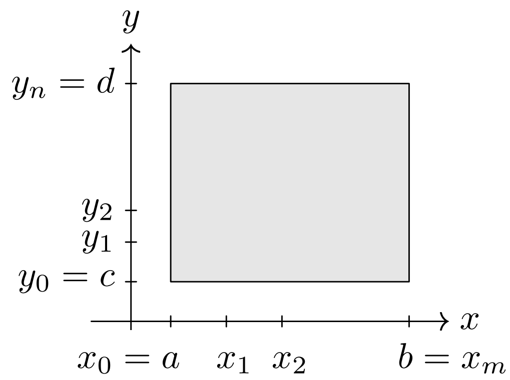
Problem

Bestäm volymen under ytan $z = f(x, y)$ och innanför det rektangulära området $D : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ i x, y-planet.

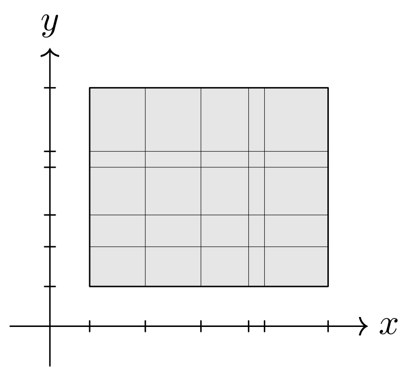


Lösning

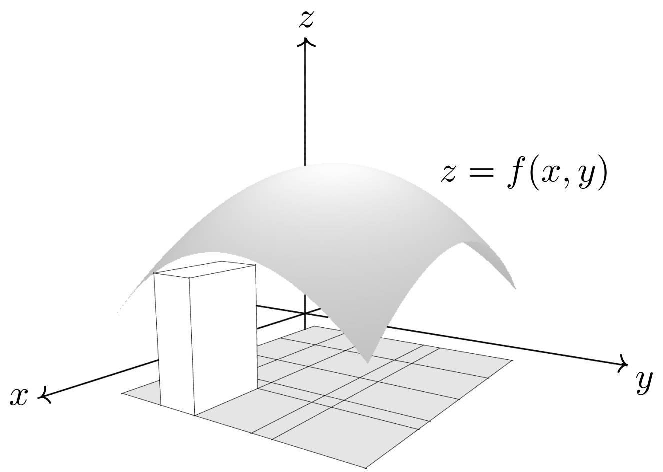
Dela upp intervallet $[a, b]$ längs x-axeln i m delintervall $[x_i, x_{i+1}]$, och dela upp intervallet $[c, d]$ längs y-axeln i n delintervall $[y_j, y_{j+1}]$.



Dessa två indelningar genererar en partition av D i delrektanglar.



I varje delrektangel väljer vi en punkt p_{ij} och approximerar volymen inom delrektangeln med ett rätblock med höjden $f(p_{ij})$.



Varje rätblock har volymen

$$V_{ij} = \text{basarea} \cdot \text{höjd} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \cdot f(p_{ij}).$$

Den totala volymen approximeras av den sammanlagda volymen av alla rätblock

$$V \approx \sum_{\substack{0 \le i < m \\ 0 \le j < n}} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) f(p_{ij}).$$

Om vi låter indelningen av D bli finare, d.v.s. ökar m och n, så borde vi få en allt bättre approximation av den totala volymen. I gränsfallet $m, n \to \infty$ borde vi ha likhet,

$$V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{\substack{0 \le i < m \\ 0 \le j < n}} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) f(p_{ij}).$$

Över- och undersumma

I varje delrektangel har f ett största värde M_{ij} och ett minsta värde m_{ij}.

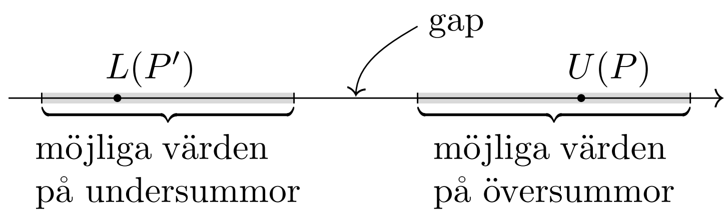
Som en övre och undre skattning av volymen V bildar vi över- respektive undersumman

$$U(f, P) = \sum M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j),$$
$$L(f, P) = \sum m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Vi har då

$$L(f, P) \le V \le U(f, P).$$

Om vi ritar upp de möjliga värden som över- och undersummorna kan anta för alla möjliga partitioner P får vi figuren.



Om gapet mellan över- och undersummor består av exakt ett värde I, säger vi att f är integrabel på D och talet I kallas för den bestämda integralen av f över D och betecknas

$$I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Egenskaper hos dubbelintegraler

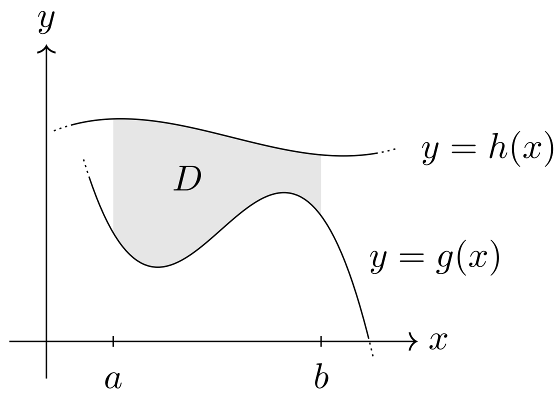
Antag att f och g är integrabla och att A, B är konstanter. Då gäller att

- $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad$ om D har area 0,
- $\iint_D 1\,dx\,dy = \text{area}(D)$,
- $\iint_D (Af + Bg) = A\iint f + B\iint g \qquad$ (linjäritet)
- $\iint_{D_1\cup D_2} = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \quad$ om D_1, D_2 är disjunkta. (additivitet)
- $f \le g \quad \Rightarrow \quad \iint f \le \iint g \qquad$ (monotonicitet)
- $\left|\iint f\right| \le \iint |f| \qquad$ (triangelolikheten)

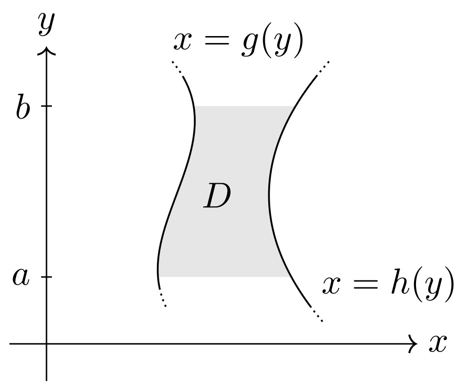
Sats Om f är udda i x-led och D är spegelsymmetrisk kring y-axeln, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Iteration av dubbelintegraler



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx$$

Generaliserade integraler

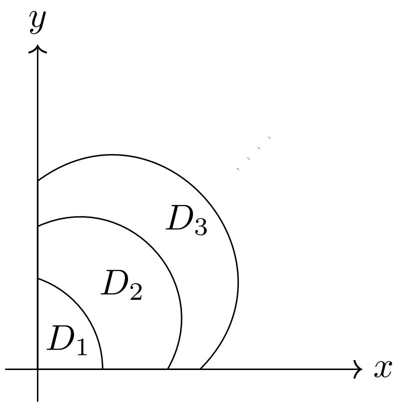
Antag att D är ett område i x, y-planet.

Uttömmande följd

Betrakta en följd $D_1, D_2, \ldots$ av delmängder av D sådana att

1. varje D_n är begränsad och mätbar (d.v.s. $\iint_{D_n} dx\,dy$ existerar),
2. för varje begränsad delmängd G av D finns ett n s.a. $G \subset D_n$, och
3. $\{D_n\}$ är en växande följd, $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$.

En sådan följd sägs tömma ut D.



Definition

Om gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy$$

existerar (ändligt) och är lika för alla uttömmande följder $\{D_n\}$, så säger vi att den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

är konvergent.

Sats Om $f \geq 0$ och

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy$$

existerar för någon uttömmande följd $\{D_n\}$, då är

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

konvergent.

Sats Om $f \geq 0$ och någon av integralerna

$$\iint f\,dx\,dy, \quad \int dx \int f\,dy \quad \text{eller} \quad \int dy \int f\,dx$$

är konvergent, då är alla tre integraler konvergenta med samma värde.

Medelvärdessatsen

Om f är kontinuerlig på den slutna, begränsade och sammanhängande mängden D i x, y-planet, då finns en punkt (ξ, η) i D s.a.

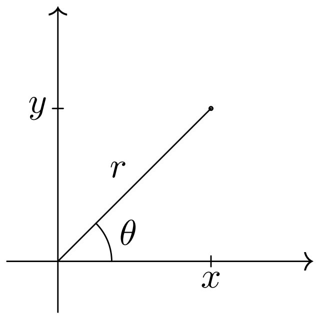
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta) \iint_D dx\,dy.$$

Medelvärdet av f över D definieras som

$$\bar{f} = \frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy}.$$

Polära koordinater

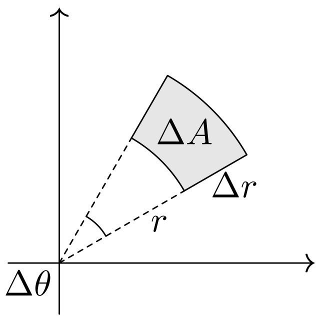
Enpunkts läge i planet beskrivs av dess avstånd r från origo och den vinkel θ som punkten har relativt x-axeln.



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Areaelementet har i polär form utseendet

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

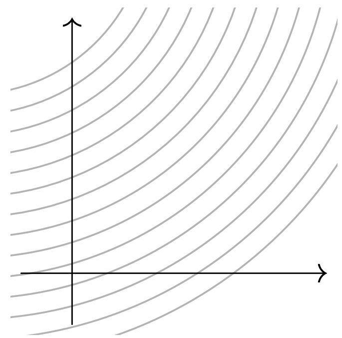


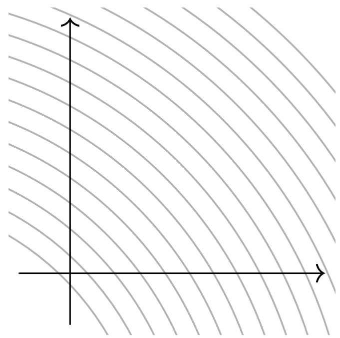
eftersom

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}\Delta\theta\left[(r+\Delta r)^2 - r^2\right] = r\,\Delta r\,\Delta\theta + O(\Delta\theta)^2.$$

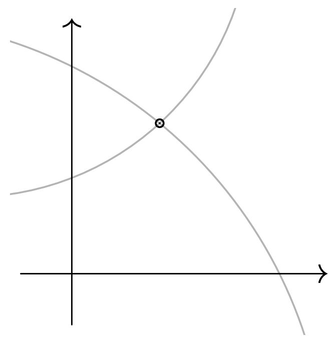
Allmänna koordinatsystem

Antag att vi har två kurvskaror u-kurvor och v-kurvor som genomkorsar planet.

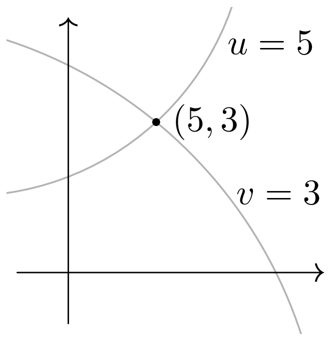




Vi kan då ange en punkts läge i planet om vi talar om på vilken u- och v-kurva punkten ligger.



Ofta har man ett tal förknippat med varje u-kurvan, ett index. Med talet kan vi då identifiera vilken u-kurva punkten befinner sig på. Med motsvarande tal för v-kurvorna kan vi ange punktens läge med ett talpar (u, v). Detta talpar säger vi är punktens u, v-koordinater.

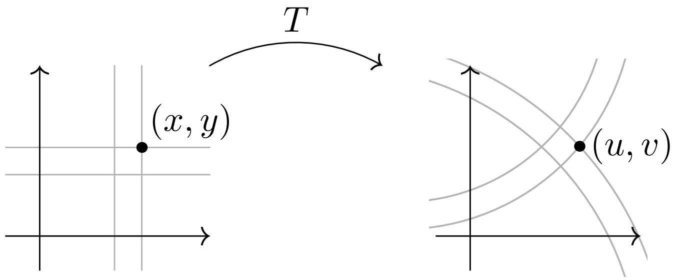


För att inte flera punkter ska ha samma koordinat kräver vi att varje u-kurva skär varje annan v-kurva i exakt en punkt.

Analytiskt kan vi uttrycka dessa två kurvskaror med en 1:1 avbildning

$$T\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

som avbildar koordinatlinjerna i det kartesiska koordinatsystemet till u- och v-kurvorna.

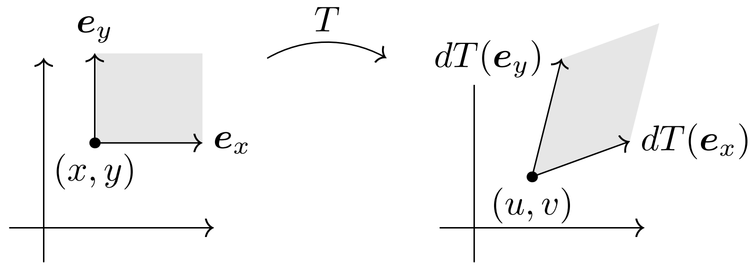


En punkt med kartesiska koordinater (x, y) får $\big(u(x,y), v(x,y)\big)$ som u, v-koordinater.

Areaelementet

Areaelementet i ett allmänt koordinatsystem (u, v) ges av uttrycket

$$dA = \left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right| du\, dv.$$



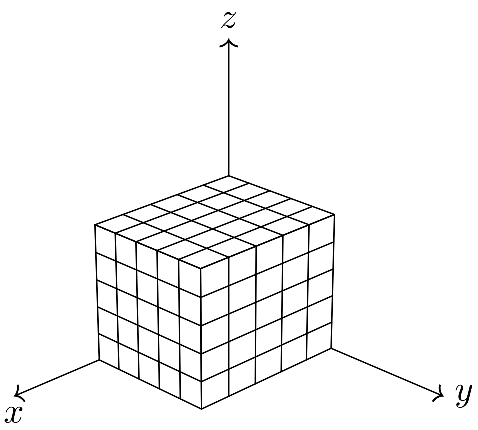
Area = 1

$$\text{Area} = \left|\det\big(dT(\boldsymbol{e}_x)\ dT(\boldsymbol{e}_y)\big)\right| = \left|\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)\right|$$

Trippelintegraler

Trippelintegralen definieras analogt med dubbelintegralen.

Ett ändligt rätblock R delas upp i delrätblock med volymer ΔV_{ijk} och i varje delrätblock väljer vi en punkt p_{ijk}.



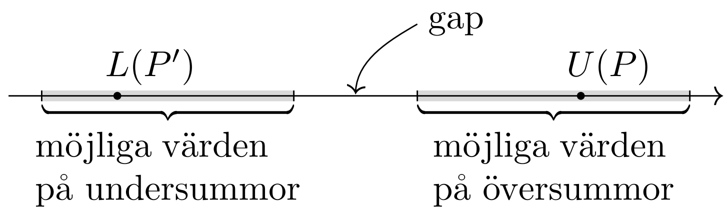
Vi definierar sedan Riemannsumman

$$\sum_{i,j,k} f(p_{ijk})\,\Delta V_{ijk}.$$

I varje delrätblock har f ett största värde M_{ijk} och ett minsta värde m_{ijk}. Vi bildar över- och undersumman av f,

$$U(f,P) = \sum M_{ijk}\Delta V_{ijk},$$
$$L(f,P) = \sum m_{ijk}\Delta V_{ijk}.$$

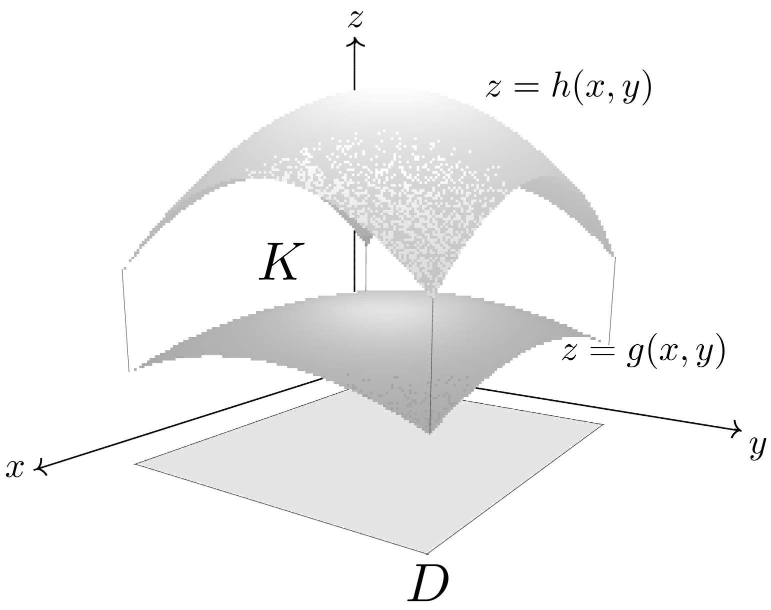
Om vi ritar upp de möjliga värden som över- och undersummorna kan anta för alla möjliga partitioner P få vi figuren



Om gapet mellan över- och undersummor består av exakt ett tal I säger vi att f är integrabel på R och talet I kallas för den bestämda integralen av f över R och betecknas

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Iteration av trippelintegraler

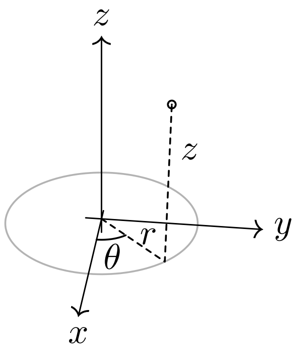


Om K är området mellan funktionsytorna $z = g(x,y)$ och $z = h(x,y)$, och innanför området D i x,y-planet, då är

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Analoga formler gäller när K projiceras på x,z- respektive y,z-planet.

Variabelsubstitution i trippelintegraler

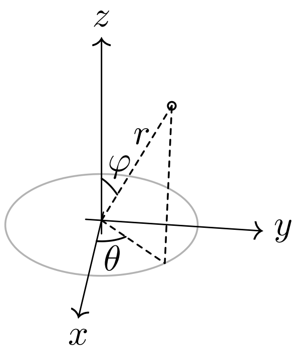


Cylindriska koordinater

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta\\
y &= r\sin\theta\\
z &= z
\end{aligned}
$$

Volymelement

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$



Sfäriska koordinater

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\varphi\cos\theta\\
y &= r\sin\varphi\sin\theta\\
z &= r\cos\varphi
\end{aligned}
$$

Volymelement

$$dx\,dy\,dz = r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

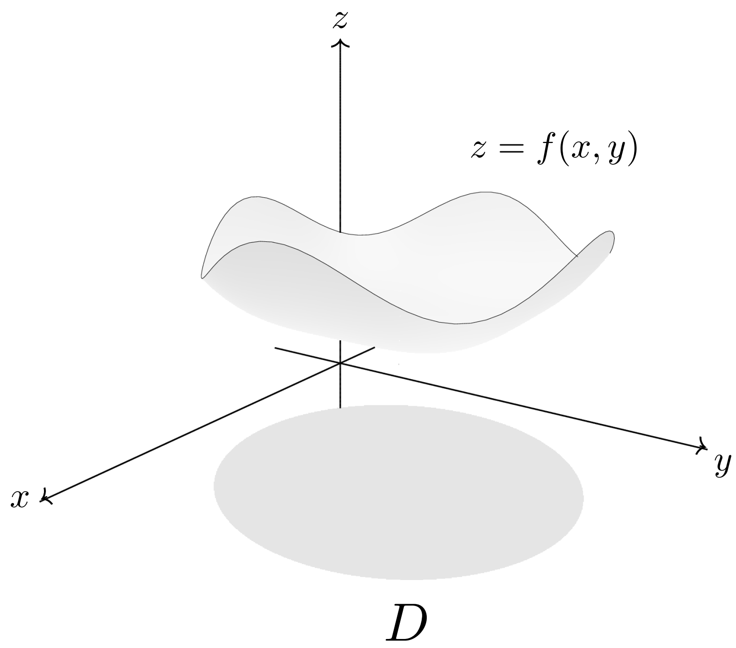
Allmänna koordinater

$$
\begin{aligned}
x &= x(u,v,w)\\
y &= y(u,v,w)\\
z &= z(u,v,w)
\end{aligned}
$$

Volymelement

$$dx\,dy\,dz = \left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

Area av en funktionsyta

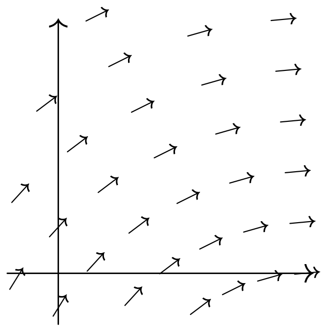


Arean av en funktionsyta $z = f(x,y)$ innanför området D i x,y-planet är

$$\text{Area} = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Vektorfält

Om vi till varje punkt $\boldsymbol{r}$ i planet (eller rummet) tillordnar en vektor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ får vi ett vektorfält.



Vektorfält är alltså funktioner $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ (eller $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ i rummet),

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Om komponenterna F_1 och F_2 är kontinuerligt deriverbara då sägs vektorfältet vara kontinuerligt deriverbart.

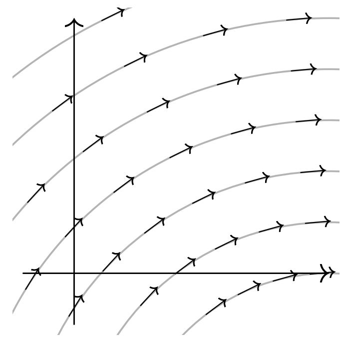
Exempel på fysikaliska vektorfält

- Kraftfält. I varje punkt $\boldsymbol{r}$ påverkas en partikel av kraften $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ (t.ex. tyngdkraften).
- Elektriska fält. En laddad partikel omger sig med det elektriska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.
- Magnetiska fält.
- Hastighetsfält. En strömmande vätska har i punkten $\boldsymbol{r}$ hastigheten $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$. Hastighetsfältet beskriver alltså flödet av vätskan.

Fältlinjer

En fältlinje är en kurva som i varje punkt har en riktningsvektor (tangentvektor) som är parallell med vektorfältet.

$\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ är parallell med $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$



Konservativa fält

Ett konservativt vektorfält är ett vektorfält som egentligen är ändringen av en underliggande skalär storhet.

Exempel Det vektorfält som i varje punkt på kartan pekar i den riktning marknivån stiger snabbast är ett konservativt fält med höjden över havet $h(\boldsymbol{r})$ som skalär storhet.

Exempel Det kraftfält som uppstår av gravitationen är ett konservativt fält med den potentiella energin som skalär storhet.

Matematiskt är $\boldsymbol{F}$ ett konservativt fält om det finns en skalär potential Φ så att

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\Phi(\boldsymbol{r}),$$

eller uttryckt med differentialer

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = d\Phi(\boldsymbol{v}) \quad \text{för alla vektorer } \boldsymbol{v}.$$

Sats $\boldsymbol{F}$ är ett konservativt vektorfält $\Rightarrow$ Jakobianen $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x, y, z)}$ är symmetrisk.

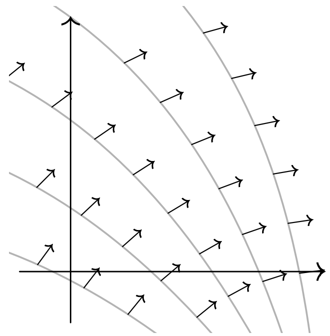
Bevis Om $\boldsymbol{F}$ är konservativ, då är $\boldsymbol{F} = d\Phi$ (där $\boldsymbol{F}$ nu betraktas som en radvektor). Differentiering ger $d\boldsymbol{F} = d^2\Phi$, och eftersom andradifferentialen (Hessianen) är symmetrisk, $d^2\Phi(v, w) = d^2\Phi(w, v)$, måste $d\boldsymbol{F}$ ha en symmetrisk Jakobian.

Nivåkurvor och nivåytor

Nivåkurvor till ett konservativt vektorfält med potential Φ är de kurvor där Φ antar ett konstant värde,

$$\Phi(x, y) = C \quad \text{för ett fixt } C.$$

Nivåkurvan är alltid vinkelrät mot vektorfältet $\boldsymbol{F}$ som ju pekar i den riktning potentialen ändrar sig mest.



Nivåkurvor kallas också för ekvipotentialkurvor.

Ett konservativt vektorfält i rummet ger upphov till nivåytor (ekvipotentialytor) varpå potentialen är konstant.

Beräkning av massa

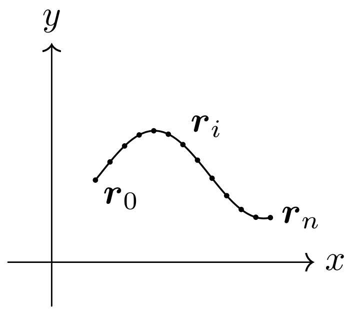
Givet en parameterkurva

$$C: \; \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \le t \le b),$$

och en masstäthet (densitet = massa per längdenhet) $\varrho = \varrho\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$ som varierar över kurvan.

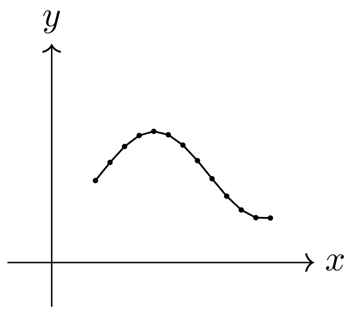
Vi ska bestämma kurvans totala massa.

Dela in parameterintervallet $[a, b]$ i delintervall med ändpunkter $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Detta ger samtidigt en indelning av parameterkurvan,



där $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$.

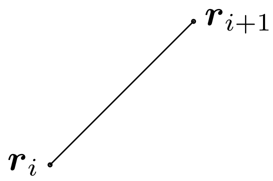
I varje kurvstycke approximerar vi kurvan med ett linjestycke



Om varje linjestycke är tillräckligt kort kommer densiteten inte att variera nämnvärt över linjestycket och vi kan approximera kurvans massa med

$$M \approx \sum_{i=0}^{n-1} \varrho(\boldsymbol{r}_i)\, L_i,$$

där L_i är längden av det i:te linjestycket och $\varrho(\boldsymbol{r}_i)$ är densiteten i linjestyckets ena ändpunkt.



$$L_i = |\boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i| = |\Delta \boldsymbol{r}_i|$$

Låter vi indelningen av kurvan gå mot 0, d.v.s. $n \to \infty$, får vi kurvans verkliga massa.

$$\begin{aligned}
M &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \varrho(\boldsymbol{r}_i) |\Delta \boldsymbol{r}_i| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \varrho(\boldsymbol{r}_i) \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i \\
&= \{\, \text{Differentialkalkylens medelvärdessats,} \\
&\qquad \text{Taylorutveckling} \,\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \big(\varrho(\boldsymbol{r}(\tau_i)) + O(\Delta t_i)\big)\, |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)|\, \Delta t_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\varrho\big(\boldsymbol{r}(\tau_i)\big) |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)| \Delta t_i + O(\Delta t_i)^2 \Big]
\end{aligned}$$

$$= \{\,\text{Riemannsumma}\,\}$$

$$= \int_a^b \varrho\big(\boldsymbol{r}(t)\big)|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt.$$

Uttrycket $ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt$ är båglängdselementet.

Linjeintegralen med avseende på båglängd

Vi definerar

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds = \int_a^b f\big(\boldsymbol{r}(t)\big)|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt$$

för någon parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ av kurvan C.

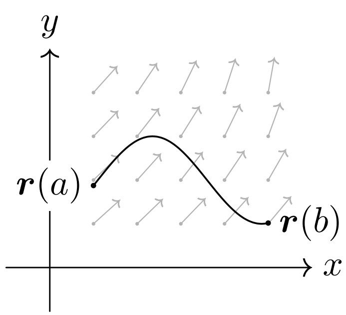
Sats Värdet av $\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds$ är oberoende av val av parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Beräkning av arbete

Givet en partikel som rör sig längs parameterkurvan

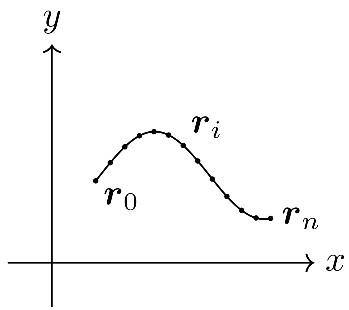
$$C:\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \le t \le b).$$

I planet finns samtidigt ett kraftvektorfält $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.



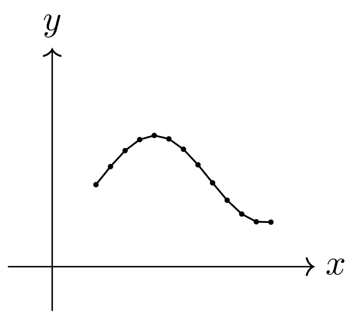
Vi ska bestämma det arbete som kraftfältet uträttat på partikeln.

Dela in parameterintervallet $[a,b]$ i delintervall med ändpunkter $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Detta ger samtidigt en indelning av parameterkurvan,

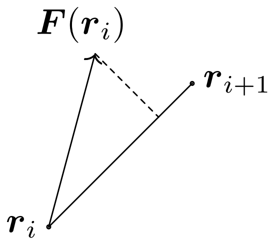


där $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$.

I varje kurvstycke approximerar vi kurvan med ett linjestycke.



Om varje linjestycke är tillräckligt litet kommer kraftfältet mer eller mindre vara konstant över linjestycket och det arbete som kraftfältet uträttat är approximativt



$$\Delta W_i = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i.$$

Det totala arbetet blir approximativt

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i.$$

Låter vi indelningen av kurvan gå mot 0, d.v.s. $n \to \infty$, får vi det verkliga arbetet

$$\begin{aligned}
W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta t_i}\, \Delta t_i \\
&= \{\,\text{Differentialkalkylens medelvärdessats,} \\
&\qquad \text{Taylorutveckling}\,\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Big(\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(\tau_i)\big) + O(\Delta\tau_i)\Big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)\, \Delta t_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(\tau_i)\big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)\, \Delta t_i + O(\Delta t_i)^2\Big] \\
&= \{\,\text{Riemannsumma}\,\} \\
&= \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Linjeintegral av vektorfält

Vi definierar

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, dt$$

för någon parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ av kurvan C.

Sats Värdet av $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av val av parametrisering $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Om kurvan C är sluten brukar man skriva

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Linjeintegral av konservativt vektorfält

Om $\boldsymbol{F}$ är ett konservativt vektorfält med potentialen Φ, då är

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(p) - \Phi(q)$$

där p och q är kurvan C:s ändpunkter.

Bevis Låt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ vara en parametrisering av C. Vi har

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_a^b \nabla\Phi \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\Big)\,dt \\
&= \{\,\text{Kedjeregeln}\,\} = \int_a^b \frac{d}{dt}\Phi\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\,dt \\
&= \Phi\big(\boldsymbol{r}(b)\big) - \Phi\big(\boldsymbol{r}(a)\big) = \Phi(p) - \Phi(q).
\end{aligned}$$

Sats Om D är ett öppet enkelt sammanhängande område, då är följande utsagor ekvivalenta

- $\boldsymbol{F}$ är konservativ i D,
- $\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ för alla slutna kurvor C i D,
- $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ beror bara på C:s ändpunkter om C ligger helt inom D.

Sats Om D är ett öppet enkelt sammanhängande område, då är

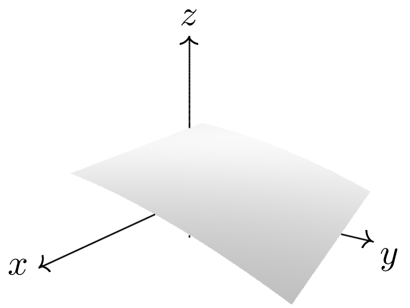
$$\boldsymbol{F} \text{ konservativ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} \text{ symmetrisk.}$$

Parameterytor

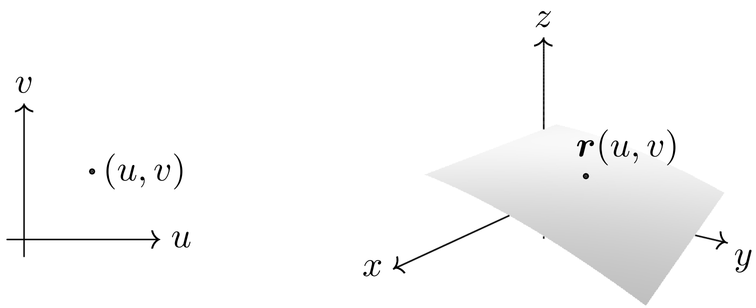
En parameteryta

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \qquad (a \le u \le b, c \le v \le d)$$

beskriver en yta i rummet.



Till varje (u,v)-värde svarar en punkt på ytan.



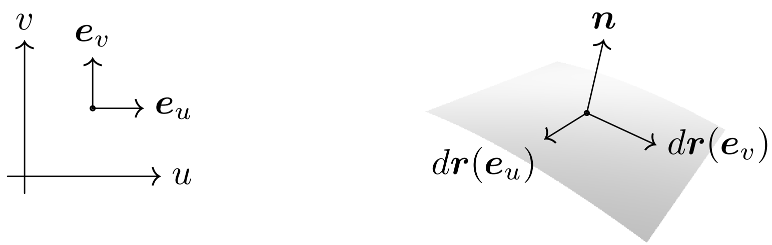
Parameterframställningen av ytan är en avbildning från parameterplanet $\boldsymbol{R}^2$ till rummet $\boldsymbol{R}^3$.

Normalvektor till parameterytor

Låt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ vara en parameteryta, och $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$ vara basvektorer i parameterplanet. Dessa två basriktningar, utgående från en parameterpunkt (u,v), avbildas med parametriseringens differential till två riktningar

$$d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_u) \quad \text{och} \quad d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_v)$$

som är parallella med ytan.



En normalvektor till planet är

$$\boldsymbol{n} = d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_u) \times d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_v).$$

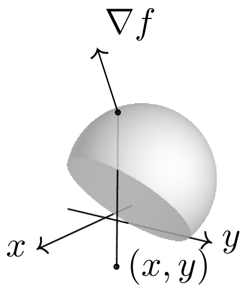
I vektorform är

$$d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$$

$$d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

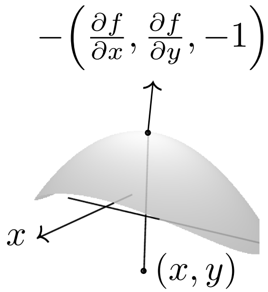
$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}.$$

Ytelement



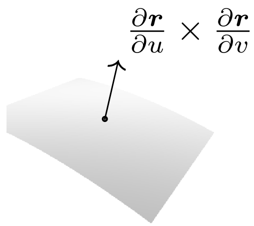
Nivåyta
Om $f(x, y, z) = C$ då ges areaelementet av

$$dS = \left| \frac{\nabla f}{\partial f / \partial z} \right| dx\, dy.$$



Funktionsyta
Om $z = f(x, y)C$ då ges areaelementet av

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}\, dx\, dy.$$



Parameteryta
Om $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ då ges areaelementet av

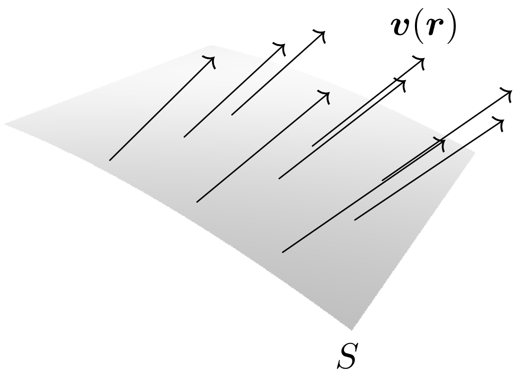
$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

Flödesintegraler

Givet en parameteryta

$$S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) \qquad \text{där } (u,v) \in D,$$

och ett hastighetsfält $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ hos en strömmande vätska. Hur mycket vätska flödar genom ytan per tidsenhet?

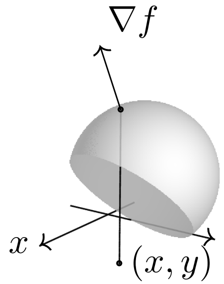


Svaret är

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(u,v)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Big)\, du\, dv.$$

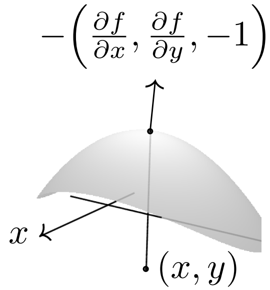
$d\boldsymbol{S}$ kallas för det vektoriella ytelementet.

Vektoriella ytelement



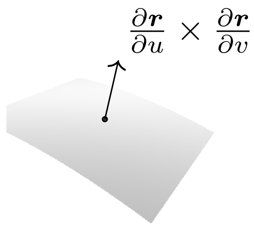
Nivåyta
Om $f(x,y,z) = C$ då ges det vektoriella ytelementet av

$$dS = \pm \frac{\nabla f}{\partial f/\partial z}\, dx\, dy.$$



Funktionsyta
Om $z = f(x,y)$ då ges det vektoriella ytelementet av

$$dS = \pm \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\Big)\, dx\, dy.$$



Parameteryta
Om $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ då ges det vektoriella ytelementet av

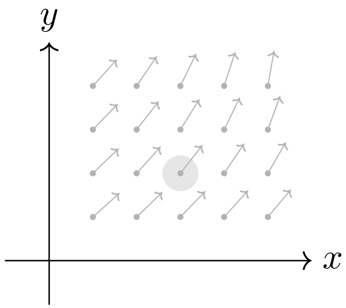
$$dS = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, du\, dv$$

Divergens

Antag att $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett vektorfält, då definieras divergensen av $\boldsymbol{F}$ som

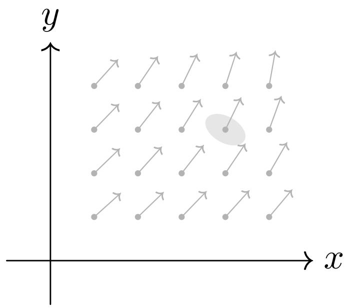
$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \text{spår}\, \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Om vi tänker oss att $\boldsymbol{F}$ beskriver hastighetsfältet till en strömmande vätska och kring en punkt P har vi en liten kontrollvolym ΔV, då anger $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ första ordningens volymförändring av kontrollvolymen om den flyter med vätskan.



$\text{tid} = t$

$\text{volym} = \Delta V$



$\text{tid} = t + \Delta t$

$$\text{volym} = \Delta V + (\operatorname{div} \boldsymbol{F})\Delta V \Delta t + o(\Delta t)$$

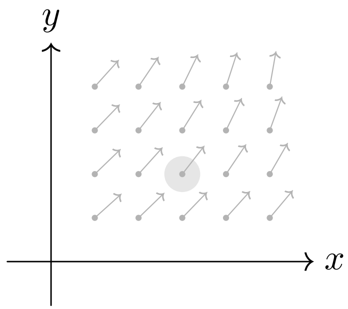
Divergensen $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ är alltså den relativa volymändringen per tidsenhet, d.v.s. $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ mäter hur mycket vätska som produceras i punkten P och kallas också för källtätheten i punkten P.

Rotation

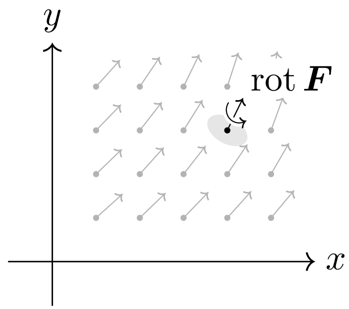
Antag att $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är ett vektorfält, då definieras rotationen av $\boldsymbol{F}$ som

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \Big).$$

Om vi tänker oss att $\boldsymbol{F}$ beskriver hastighetsfältet till en strömmande vätska och kring en punkt P har vi en liten kontrollvolym, då anger $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ den första ordningens stela rotation som kontrollvolymen genomgår då den flyter med vätskan.



$\text{tid} = t$



$\text{tid} = t + \Delta t$

$\text{rot. axel} \parallel \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + o(\Delta t)$

$\text{vinkel} = \frac{1}{2}\|\operatorname{rot} \boldsymbol{F}\|\Delta t + o(\Delta t)$

Rotationen $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ mäter alltså hur mycket vektorfältet virvlar i punkten P.

Sats Om området är enkelt sammanhängande, då är

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{F} \text{ konservativt.}$$

Bevis

$\boldsymbol{F}$ konservativt

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{symmetrisk}$$

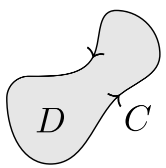
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\Big) = \boldsymbol{0}.$$

Greens formel i planet

Låt D vara ett slutet området med en styckvis regulär enkel randkurva C som är positivt orienterad (moturs), och antag att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är kontinuerligt deriverbar på D. Då gäller att

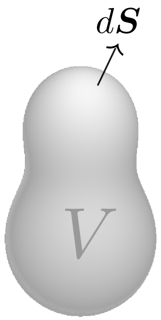
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\, dx\, dy.$$



Gauss sats

Antag att V är ett regulärt område med utåtriktat vektoriellt ytelement $d\boldsymbol{S}$, och antag att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är kontinuerligt deriverbart. Då gäller att

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV = \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}.$$



Om divergensen ses som källtäthet kan Gauss sats formuleras

nettomängd som produceras inom volymen V	=	nettomängd som flödar ut genom ytan S.

Gauss universalsats

Under samma förutsättningar som i Gauss sats gäller att

$$\iiint_V \nabla\,(\cdots)\, dV = \oint\!\!\!\oint_S d\boldsymbol{S}\,(\cdots)$$

Exempel

$$\iiint_V \nabla\Phi\, dV = \oint\!\!\!\oint_S d\boldsymbol{S}\,\Phi$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dV = \oint\!\!\!\oint_S d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{F}$$

$$\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{F}\, dV = \oint\!\!\!\oint_S d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{F}$$

Stokes sats

Antag att S är en regulär orienterbar yta med ett vektoriellt ytelement $d\boldsymbol{S}$, och med en randkurva C som är styckvis regulär, sluten och positivt orienterad relativt S. Antag också att $\boldsymbol{F}$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält. Då gäller att

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S}.$$