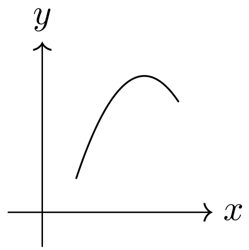
Parameterkurvor

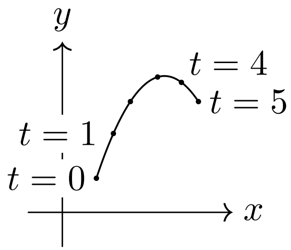
En parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (a \leq t \leq b)$$

beskriver en kurva i planet.



Till varje t-värde svarar en punkt på kurvan

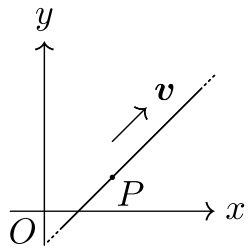


När vi låter t gå från $t = a$ till $t = b$ så genomlöps parameterkurvan från startpunkten $\boldsymbol{r}(a)$ till slutpunkten $\boldsymbol{r}(b)$.

Observera att en parameterkurva är mer än den geometriska kurvan. Till varje punkt på kurvan finns dessutom ett t-värde.

Några vanliga parameterkurvor

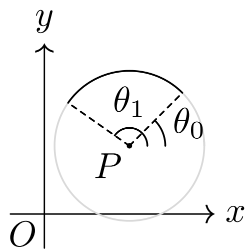
Rät linje



En rät linje genom punkten P och med riktning $\boldsymbol{v}$ har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\boldsymbol{v} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

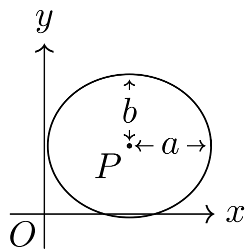
Cirkelbåge



En cirkelbåge med mittpunkt i P och med startvinkel θ_0 och slutvinkel θ_1 samt radie r har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta_0 < \theta < \theta_1).$$

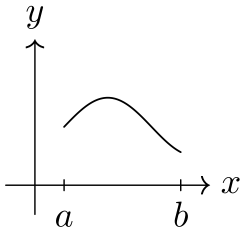
Ellips



En ellips med mittpunkt i P och halvaxlar a och b har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \leq t < 2\pi).$$

Funktionsgraf

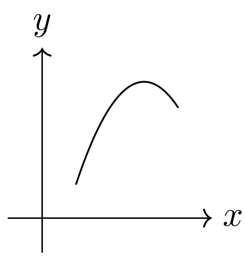


Grafen $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ har parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \qquad (a \leq t \leq b).$$

Plan kurva

En plan kurva är den mängd i planet som uppstår av en parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.



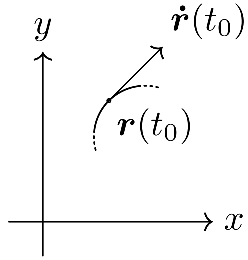
En plan kurva är alltså en parameterkurva utan parametrisering.

Notera att en plan kurva kan ha många olika parametriseringar (beskrivningar) och fortfarande vara samma kurva.

Riktningsvektor

En parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ har i punkten som svarar mot parametervärdet t_0 riktningsvektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$



där $\dot{x}$ och $\dot{y}$ betecknar derivatan av x respektive y med avseende på t.

Regulär parameterkurva

En parameterkurva är regulär om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq \mathbf{0} \quad \text{för alla parametervärden } t.$$

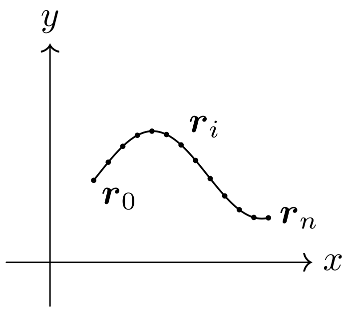
Båglängd

Givet en parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \le t \le b).$$

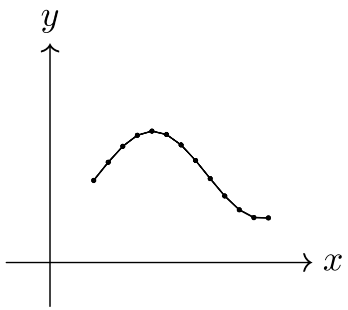
Vi ska bestämma dess längd.

Dela in parameterintervallet $[a, b]$ i delintervall med ändpunkter $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$. Detta ger samtidigt en indelning av parameterkurvan



där $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$.

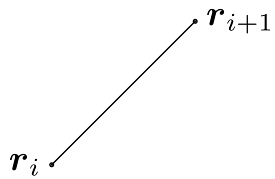
I varje kurvstycke approximerar vi kurvan med ett linjestycke



och kurvans längd L med summan av linjestyckenas längd

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} L_i.$$

Längden av ett linjestycke är



$$L_i = |\boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i| = |\Delta \boldsymbol{r}_i|.$$

Låter vi indelningen av kurvan gå mot 0, d.v.s. $n \to \infty$, får vi den verkliga längden

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta \boldsymbol{r}_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i \cdot \left| \frac{\Delta \boldsymbol{r}_i}{\Delta t_i} \right| \\
&= \left\{ \text{Differentialkalkylens medelvärdessats} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i \, |\dot{\boldsymbol{r}}(\tau_i)| \\
&= \left\{ \text{Riemannsumma} \right\} = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \, dt.
\end{aligned}$$

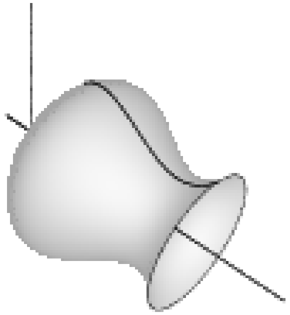
Uttrycket $|\dot{\boldsymbol{r}}(t)| \, dt$ kallas för båglängdselementet.

Area av en rotationsyta

Givet en parameterkurva

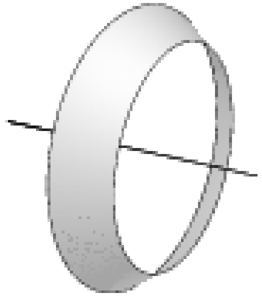
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \qquad (a \le t \le b).$$

Vi ska bestämma arean av den yta som uppstår när kurvan roterar kring en av koordinataxlarna.



Precis som tidigare delas parameterkurvan upp i små kurvstycken. Varje kurvstycke roteras kring koordinat-axeln och rotationsarean blir summan av kurvstyckenas rotationsareor.

Vid rotation kring x-axeln kan vi skriva rotationsareaelementet som

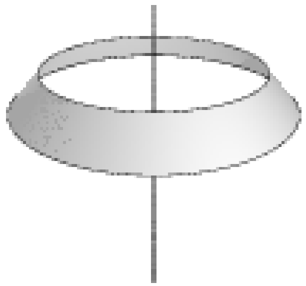


$$\begin{aligned} dA &= \text{omkrets} \cdot \text{båglängdselementet} \\ &= 2\pi y(t) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt \end{aligned}$$

Rotationsarean får vi genom att integrera upp areaelementet

$$A = \int dA = \int_a^b 2\pi y(t)\ \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt.$$

En rotation kring y-axeln ger istället rotationsareaelementet



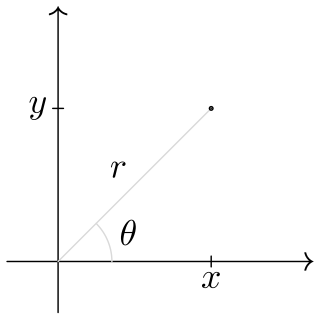
$$\begin{aligned} dA &= \text{omkrets} \cdot \text{båglängdselementet} \\ &= 2\pi x(t) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt \end{aligned}$$

och rotationsarean

$$A = \int dA = \int_a^b 2\pi x(t) \cdot |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\, dt.$$

Polära koordinater

En punkts läge i planet kan bestämmas om vi anger dess avstånd r från origo och den vinkel θ som punkten har relativt x-axeln.



Talparet (r, θ) kallas för punktens polära koordinater.

En punkt med polära koordinater (r, θ) har de kartesiska koordinaterna

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Observera att en punkt kan ha många olika polära koordinater

$$(r, \theta),\ (r, \theta + 2\pi),\ (r, \theta + 4\pi),\ \ldots$$

Ofta låter man därför $0 \leq \theta < 2\pi$. På samma ger negativa r upphov till mångtydighet.