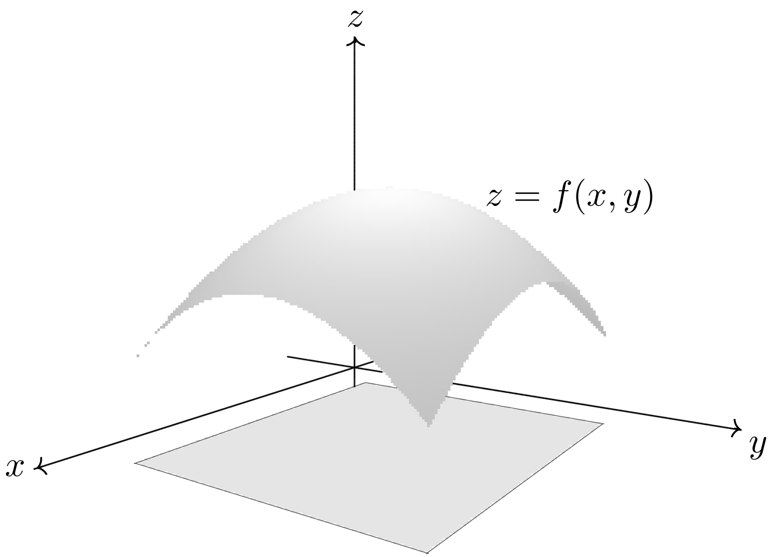
Volymberäkning

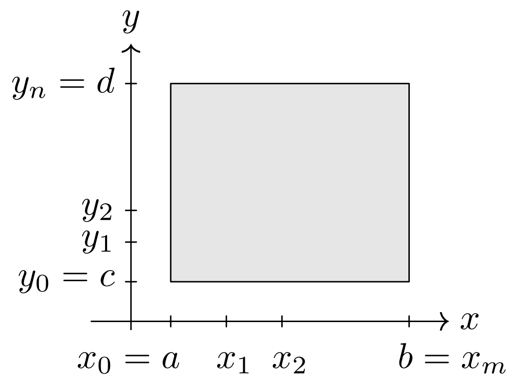
Problem

Bestäm volymen under ytan $z = f(x, y)$ och innanför det rektangulära området $D : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ i x, y-planet.

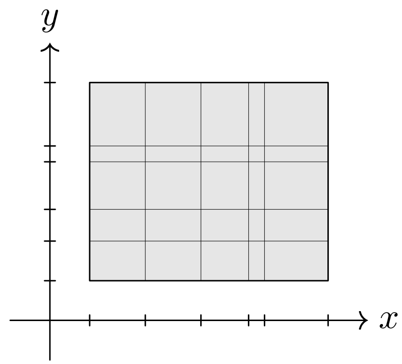


Lösning

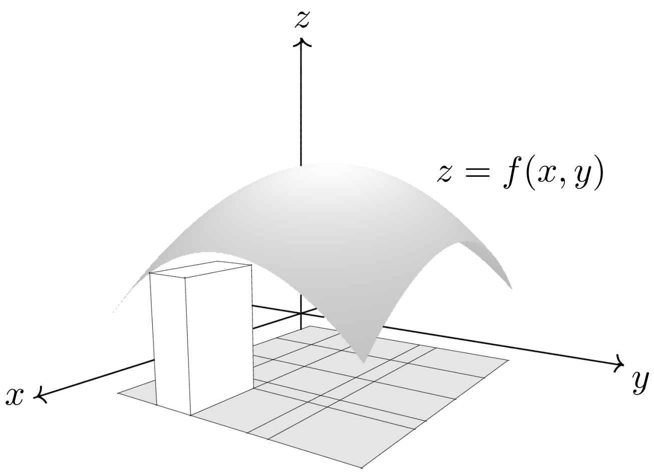
Dela upp intervallet $[a, b]$ längs x-axeln i m delintervall $[x_i, x_{i+1}]$, och dela upp intervallet $[c, d]$ längs y-axeln i n delintervall $[y_j, y_{j+1}]$.



Dessa två indelningar genererar en partition av D i delrektanglar.



I varje delrektangel väljer vi en punkt p_{ij} och approximerar volymen inom delrektangeln med ett rätblock med höjden $f(p_{ij})$.



Varje rätblock har volymen

$$V_{ij} = \text{basarea} \cdot \text{höjd} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \cdot f(p_{ij}).$$

Den totala volymen approximeras av den sammanlagda volymen av alla rätblock

$$V \approx \sum_{\substack{0 \le i < m \\ 0 \le j < n}} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) f(p_{ij}).$$

Om vi låter indelningen av D bli finare, d.v.s. ökar m och n, så borde vi få en allt bättre approximation av den totala volymen. I gränsfallet $m, n \to \infty$ borde vi ha likhet,

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{\substack{0 \le i < m \\ 0 \le j < n}} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) f(p_{ij}).$$

Över- och undersumma

I varje delrektangel har f ett största värde M_{ij} och ett minsta värde m_{ij}.

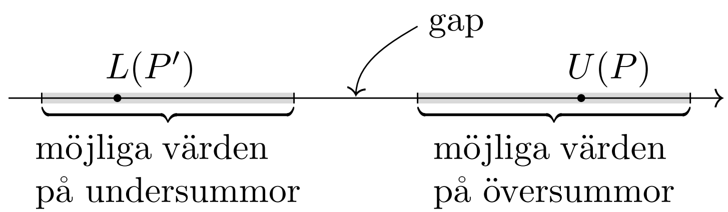
Som en övre och undre skattning av volymen V bildar vi över- respektive undersumman

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j), \\ L(f, P) &= \sum m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j). \end{aligned}$$

Vi har då

$$L(f, P) \le V \le U(f, P).$$

Om vi ritar upp de möjliga värden som över- och undersummorna kan anta för alla möjliga partitioner P får vi figuren.



Om gapet mellan över- och undersummor består av exakt ett värde I, säger vi att f är integrabel på D och talet I kallas för den bestämda integralen av f över D och betecknas

$$I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Egenskaper hos dubbelintegraler

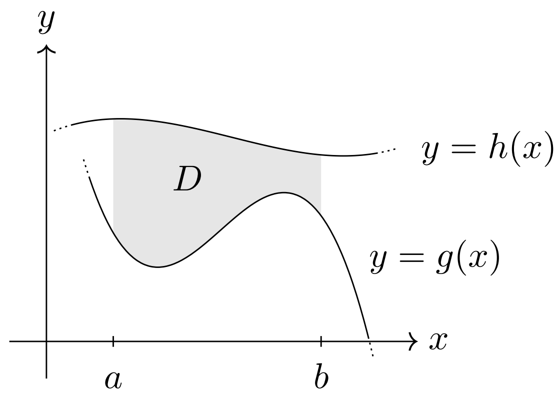
Antag att f och g är integrabla och att A, B är konstanter. Då gäller att

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0 \quad$ om D har area 0,
- $\displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy = \text{area}(D)$,
- $\displaystyle\iint_D (Af + Bg) = A\iint f + B\iint g \qquad$ (linjäritet)
- $\displaystyle\iint_{D_1 \cup D_2} = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \quad$ om D_1, D_2 är disjunkta. (additivitet)
- $\displaystyle f \le g \quad \Rightarrow \quad \iint f \le \iint g \qquad$ (monotonicitet)
- $\displaystyle\left|\iint f\right| \le \iint |f| \qquad$ (triangelolikheten)

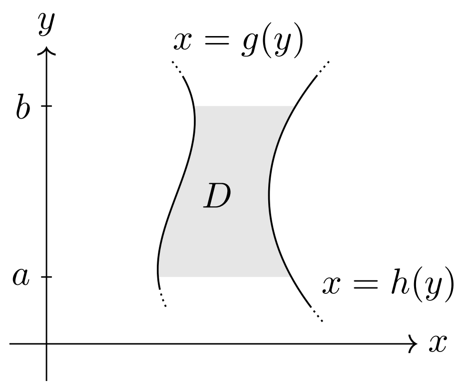
Sats Om f är udda i x-led och D är spegelsymmetrisk kring y-axeln, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Iteration av dubbelintegraler



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx$$

Generaliserade integraler

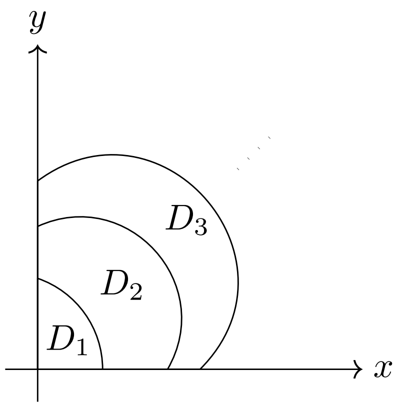
Antag att D är ett område i x, y-planet.

Uttömmande följd

Betrakta en följd $D_1, D_2, \ldots$ av delmängder av D sådana att

1. varje D_n är begränsad och mätbar (d.v.s. $\iint_{D_n} dx\,dy$ existerar),
2. för varje begränsad delmängd G av D finns ett n s.a. $G \subset D_n$, och
3. $\{D_n\}$ är en växande följd, $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$.

En sådan följd sägs tömma ut D.



Definition

Om gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

existerar (ändligt) och är lika för alla uttömmande följder $\{D_n\}$, så säger vi att den generaliserade dubbelintegralen

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

är konvergent.

Sats Om $f \geq 0$ och

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy$$

existerar för någon uttömmande följd $\{D_n\}$, då är

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

konvergent.

Sats Om $f \geq 0$ och någon av integralerna

$$\iint f\,dx\,dy, \quad \int dx \int f\,dy \quad \text{eller} \quad \int dy \int f\,dx$$

är konvergent, då är alla tre integraler konvergenta med samma värde.

Medelvärdessatsen

Om f är kontinuerlig på den slutna, begränsade och sammanhängande mängden D i x, y-planet, då finns en punkt (ξ, η) i D s.a.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta) \iint_D dx\,dy.$$

Medelvärdet av f över D definieras som

$$\bar{f} = \frac{\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy}.$$