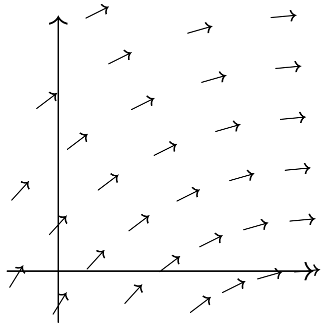
Vektorfält

Om vi till varje punkt $\boldsymbol{r}$ i planet (eller rummet) tillordnar en vektor $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ får vi ett vektorfält.



Vektorfält är alltså funktioner $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ (eller $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ i rummet),

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Om komponenterna F_1 och F_2 är kontinuerligt deriverbara då sägs vektorfältet vara kontinuerligt deriverbart.

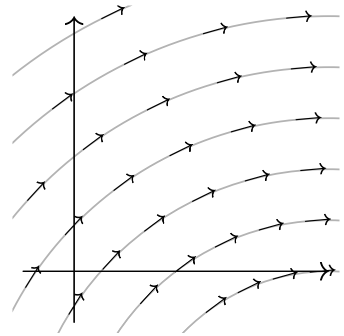
Exempel på fysikaliska vektorfält

- Kraftfält. I varje punkt $\boldsymbol{r}$ påverkas en partikel av kraften $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ (t.ex. tyngdkraften).
- Elektriska fält. En laddad partikel omger sig med det elektriska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.
- Magnetiska fält.
- Hastighetsfält. En strömmande vätska har i punkten $\boldsymbol{r}$ hastigheten $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$. Hastighetsfältet beskriver alltså flödet av vätskan.

Fältlinjer

En fältlinje är en kurva som i varje punkt har en riktningsvektor (tangentvektor) som är parallell med vektorfältet.

$\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ är parallell med $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$



Konservativa fält

Ett konservativt vektorfält är ett vektorfält som egentligen är ändringen av en underliggande skalär storhet.

Exempel Det vektorfält som i varje punkt på kartan pekar i den riktning marknivån stiger snabbast är ett konservativt fält med höjden över havet $h(\boldsymbol{r})$ som skalär storhet.

Exempel Det kraftfält som uppstår av gravitationen är ett konservativt fält med den potentiella energin som skalär storhet.

Matematiskt är $\boldsymbol{F}$ ett konservativt fält om det finns en skalär potential Φ så att

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \nabla\Phi(\boldsymbol{r}),$$

eller uttryckt med differentialer

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = d\Phi(\boldsymbol{v}) \quad \text{för alla vektorer } \boldsymbol{v}.$$

Sats $\boldsymbol{F}$ är ett konservativt vektorfält $\Rightarrow$ Jakobianen $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)}$ är symmetrisk.

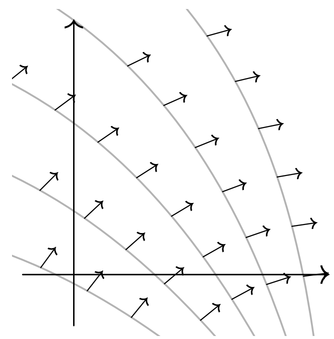
Bevis Om $\boldsymbol{F}$ är konservativ, då är $\boldsymbol{F} = d\Phi$ (där $\boldsymbol{F}$ nu betraktas som en radvektor). Differentiering ger $d\boldsymbol{F} = d^2\Phi$, och eftersom andradifferentialen (Hessianen) är symmetrisk, $d^2\Phi(v,w) = d^2\Phi(w,v)$, måste $d\boldsymbol{F}$ ha en symmetrisk Jakobian.

Nivåkurvor och nivåytor

Nivåkurvor till ett konservativt vektorfält med potential Φ är de kurvor där Φ antar ett konstant värde,

$$\Phi(x,y) = C \quad \text{för ett fixt } C.$$

Nivåkurvan är alltid vinkelrät mot vektorfältet $\boldsymbol{F}$ som ju pekar i den riktning potentialen ändrar sig mest.



Nivåkurvor kallas också för ekvipotentialkurvor.

Ett konservativt vektorfält i rummet ger upphov till nivåytor (ekvipotentialytor) varpå potentialen är konstant.