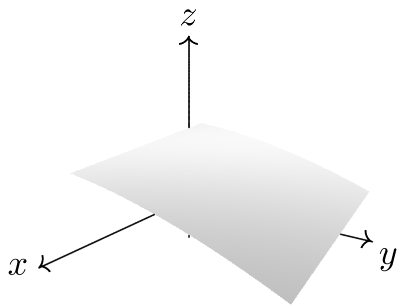
Parameterytor

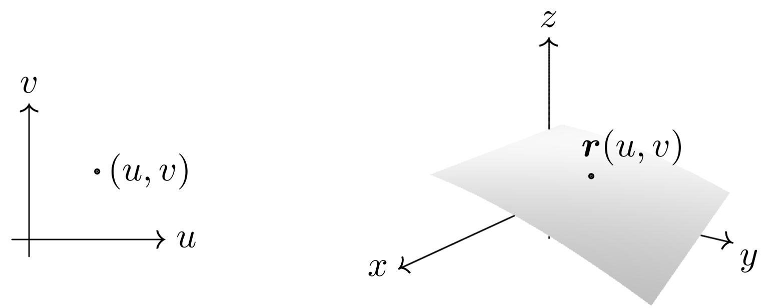
En parameteryta

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \qquad (a \le u \le b, c \le v \le d)$$

beskriver en yta i rummet.



Till varje (u,v)-värde svarar en punkt på ytan.



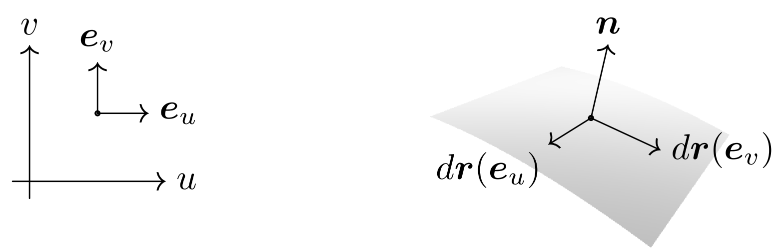
Parameterframställningen av ytan är en avbildning från parameterplanet $\boldsymbol{R}^2$ till rummet $\boldsymbol{R}^3$.

Normalvektor till parameterytor

Låt $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ vara en parameteryta, och $\boldsymbol{e}_u$, $\boldsymbol{e}_v$ vara basvektorer i parameterplanet. Dessa två basriktningar, utgående från en parameterpunkt (u,v), avbildas med parametriseringens differential till två riktningar

$$d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_u) \quad \text{och} \quad d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_v)$$

som är parallella med ytan.



En normalvektor till planet är

$$\boldsymbol{n} = d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_u) \times d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_v).$$

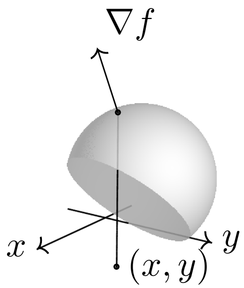
I vektorform är

$$d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_u) = \left(\tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \quad \tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$$

$$d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{e}_v) = \left(\tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \quad \tfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

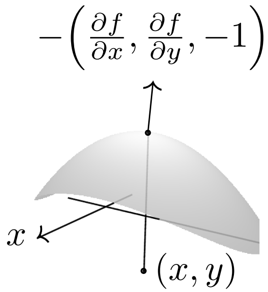
$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}.$$

Ytelement



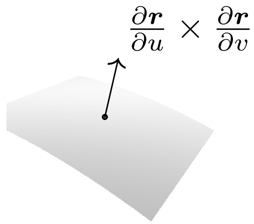
Nivåyta
Om $f(x, y, z) = C$ då ges areaelementet av

$$dS = \left| \frac{\nabla f}{\partial f / \partial z} \right| dx\, dy.$$



Funktionsyta
Om $z = f(x, y)C$ då ges areaelementet av

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$



Parameteryta
Om $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ då ges areaelementet av

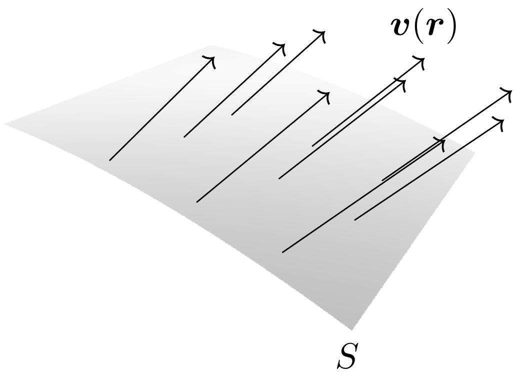
$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

Flödesintegraler

Givet en parameteryta

$$S : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \qquad \text{där } (u, v) \in D,$$

och ett hastighetsfält $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ hos en strömmande vätska. Hur mycket vätska flödar genom ytan per tidsenhet?

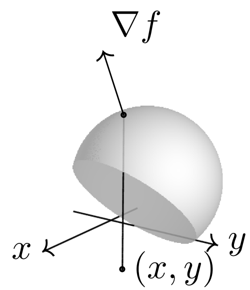


Svaret är

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_D \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(u, v)\big) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Big)\, du\, dv.$$

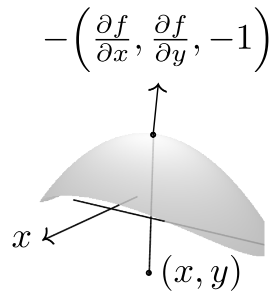
$d\boldsymbol{S}$ kallas för det vektoriella ytelementet.

Vektoriella ytelement



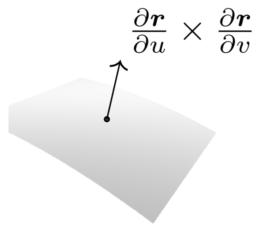
Nivåyta
Om $f(x, y, z) = C$ då ges det vektoriella ytelementet av

$$dS = \pm \frac{\nabla f}{\partial f / \partial z}\, dx\, dy.$$



Funktionsyta
Om $z = f(x, y)$ då ges det vektoriella ytelementet av

$$dS = \pm \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\Big)\, dx\, dy.$$



Parameteryta
Om $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ då ges det vektoriella ytelementet av

$$dS = \pm \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, du\, dv$$