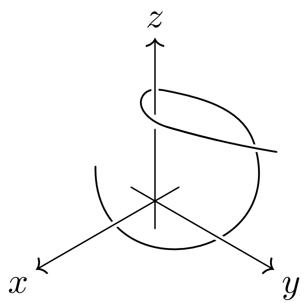
Parameterkurvor i rummet

En parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad (a \le t \le b)$$

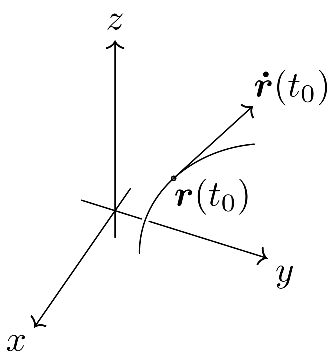
beskriver en kurva i rummet.



Riktningsvektor

En parameterkurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ i rummet har i punkten som svarar mot parametervärdet t riktningsvektorn

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$



Enhetsvektorn är $\dot{\boldsymbol{r}}(t)/|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|$.

Räkneregler

Antag att $\boldsymbol{u}(t)$ och $\boldsymbol{v}(t)$ är vektorer och $\lambda(t)$ är en skalär.

1. $\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{v}(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}(t) + \dot{\boldsymbol{v}}(t)$
2. $\frac{d}{dt}\big(\lambda(t)\boldsymbol{u}(t)\big) = \dot{\lambda}(t)\boldsymbol{u}(t) + \lambda(t)\dot{\boldsymbol{u}}(t)$
3. $\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{v}}(t)$
4. $\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \dot{\boldsymbol{v}}(t)$
5. $\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}\big(\lambda(t)\big) = \dot{\boldsymbol{u}}\big(\lambda(t)\big)\,\dot{\lambda}(t)$

Båglängd

Längden av parameterkurvan $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ är

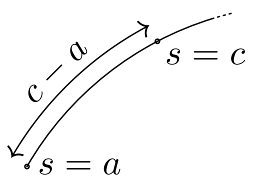
$$L = \int_a^b |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt.$$

Båglängdsparametrisering

Om en parameterkurva

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) \qquad (a \le s \le b)$$

har egenskapen att alla punkter på kurvan har ett parametervärde som är lika med deras avstånd längs kurvan till startpunkten, då sägs kurvan vara båglängdsparametriserad.



Mera formellt lyder villkoret

$$\int_a^s |\dot{\boldsymbol{r}}(\sigma)|\, d\sigma = s - a \qquad \text{för alla } s. \tag{$*$}$$

Sats $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ är båglängdsparametriserad $\Leftrightarrow$ $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ är en enhetsvektor för alla s.

Bevis $(\Rightarrow)$ Derivera $(*)$ m.a.p. s

$$\text{VL} = \frac{d}{ds}\int_a^s |\dot{\boldsymbol{r}}(\sigma)|\, d\sigma = |\dot{\boldsymbol{r}}(s)| = \text{HL} = 1.$$

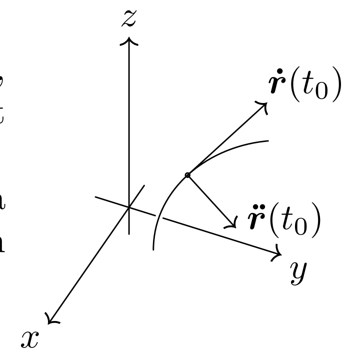
$(\Leftarrow)$ Eftersom $|\boldsymbol{r}(s)| = 1$ är $(*)$ uppfylld.

En mekanisk tolkning

Om en partikels läge ges av $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, där t är tiden, då är partikelns

$$\begin{aligned} \text{hastighet} &= \dot{\boldsymbol{r}}(t), \\ \text{fart} &= |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|, \\ \text{acceleration} &= \ddot{\boldsymbol{r}}(t). \end{aligned}$$

Om partikelns fart är konstant, då är accelerationen riktad mot rörelsens centrum. Accelerationens belopp är då ett mått på hur mycket kurvan kröker sig.



Definition Krökningen för en båglängdsparametriserad (konstant fart 1) kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ definieras som

$$\kappa(s) = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|.$$

Om $\kappa(s) \equiv 0$ då är kurvan en rät linje.
Om $\kappa(s) \equiv 1/R$ då är kurvan en cirkel med radie R.

Sats För en allmänt parametriserad kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ gäller att krökningen i punkten $\boldsymbol{r}(t)$ är

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{r}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{r}}(t)|^3}.$$