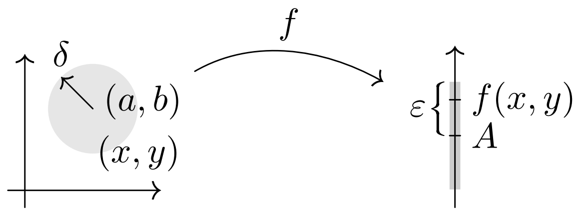
Gränsvärde

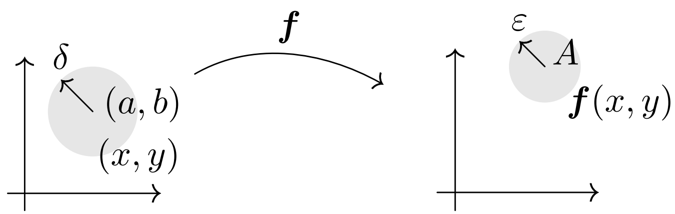
Gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

definieras som

> Oavsett hur litet $\varepsilon > 0$ vi väljer så ska det finnas ett $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att
>
> $$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$
>
> för alla (x,y) s.a. $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$.





Räkneregler

Om $\lim f$ och $\lim g$ existerar, då gäller

1. $\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$
2. $\lim(f \cdot g) = \big(\lim f\big) \cdot \big(\lim g\big)$
3. $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim f}{\lim g}$ om $\lim g \neq 0$
4. $\lim F\big(f(x,y)\big) = F\big(\lim f(x,y)\big)$
   om F är kontinuerlig i $t = \lim f(x,y)$.

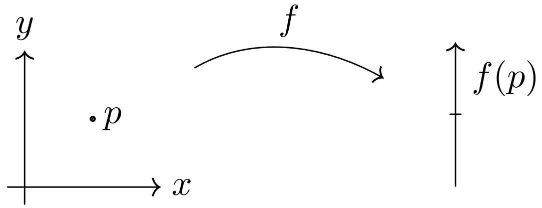
Kontinuitet

Funktionen $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerlig i (a,b) om

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Partialderivata

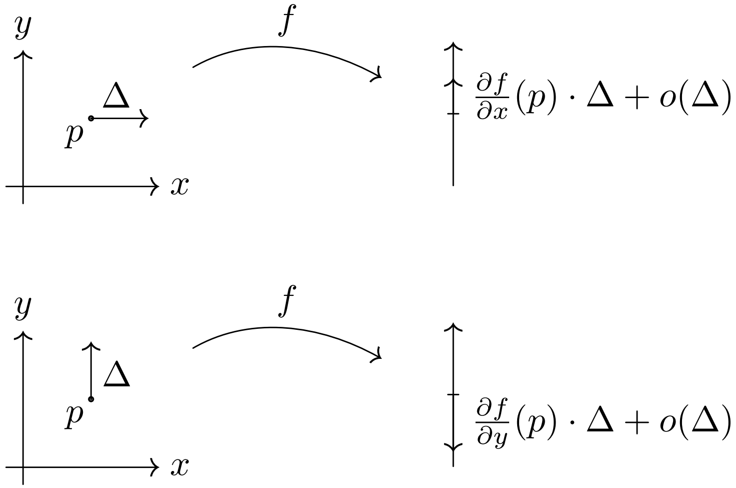
Låt $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$.



Partialderivatorna

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

mäter den relativa ändringen av f:s värde i $p = (x_0, y_0)$ i riktning parallellt med x- respektive y-axeln.



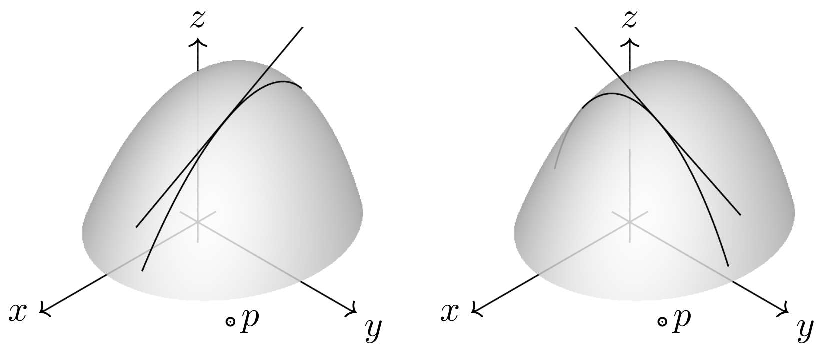
Analytiskt definieras de som

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Andra beteckningar är

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = f_1(p) = D_1 f(p),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = f_2(p) = D_2 f(p).$$

Partialderivatorna kan geometriskt ses som lutningen av funktionsgrafen i p parallellt med koordinataxlarna.



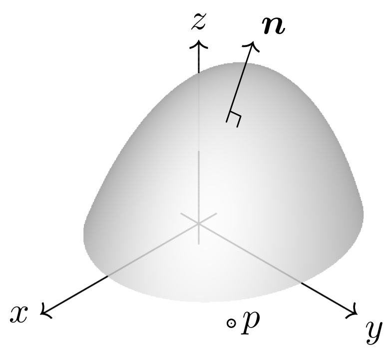
lutning $= \frac{\partial f}{\partial x}(p)$ lutning $= \frac{\partial f}{\partial y}(p)$

För $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ definieras partialderivatorna analogt.

Normalvektor

Funktionsytan $z = f(x,y)$ har i punkten $\big(p, f(p)\big)$ normalvektorn

$$\boldsymbol{n} = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), -1\Big).$$



Högre ordningars partialderivata

De partiella derivatorna kan i sin tur deriveras partiellt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) \\
f_{123} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Sats Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ och f_{ij}, f_{ji} är kontinuerliga i en omgivning av p, då gäller att

$$f_{ij}(p) = f_{ji}(p).$$

Kedjeregeln

Om f är en funktion av n variabler,

$$f = f(x_1, \dots, x_n),$$

där variablerna beror i sin tur på m andra variabler

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(y_1, \dots, y_m) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(y_1, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Då är

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}.$$