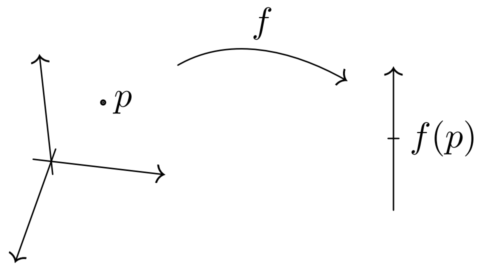
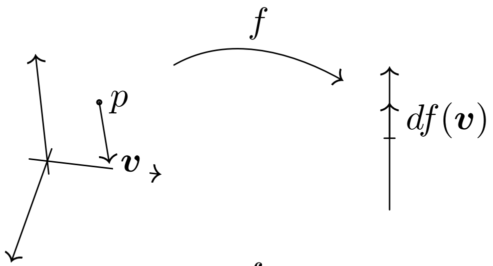
Differentialer I

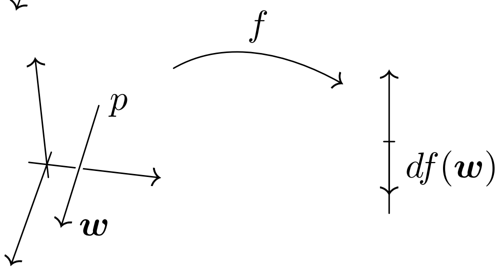
Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ och fixera $p \in \boldsymbol{R}^n$.



När vi rör oss i riktning $\boldsymbol{v}$ utifrån punkten p så anger $df(\boldsymbol{v})$ ändringstakten av f.



liten positiv ändring av f:s värde i riktning $\boldsymbol{v}$.

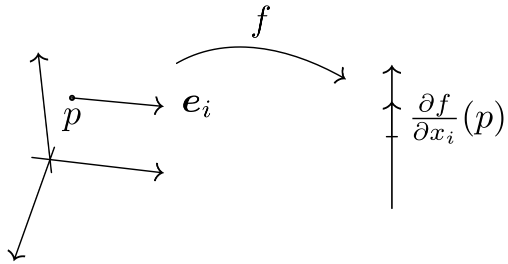


stor negativ ändring av f:s värde i riktning $\boldsymbol{w}$.

df kallas för differentialen till f och är en linjär avbildning av riktningar utifrån p till värdeändringar i $\boldsymbol{R}$.

Om vi rör oss i riktning parallellt med en av basvektorerna $\boldsymbol{e}_i$ så vet vi att f har ändringstakten $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, alltså är

$$df(\boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$



Eftersom df är en linjär avbildning så måste f ha $1 \times n$-matrisen

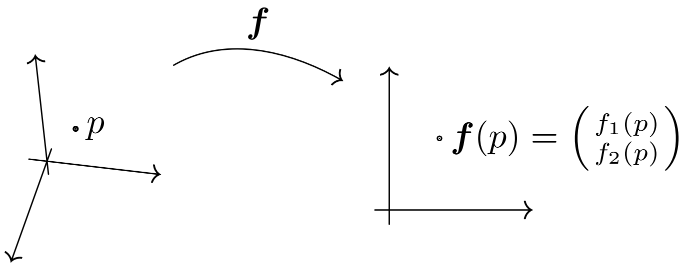
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} df(\boldsymbol{e}_1) & df(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & df(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denna matris kallas för Jacobimatrisen till f i punkten p.

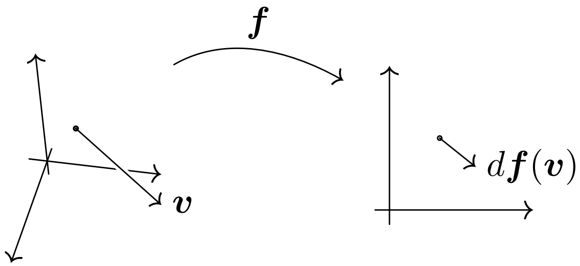
Notera att df också beror av baspunkten p. Ibland brukar man därför skriva df_p.

Differentialer II

Antag att $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ och fixera $p \in \boldsymbol{R}^3$.



Om vi utifrån punkten p rör oss i riktning $\boldsymbol{v}$ så anger $d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ ändringstakten av $\boldsymbol{f}$, d.v.s. både hur mycket och i vilken riktning $\boldsymbol{f}$ ändras.



Om vi rör oss parallellt med x-axeln ($\boldsymbol{e}_x$-riktningen) så vet vi att $\boldsymbol{f}$ har ändringstakten

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) \end{pmatrix}.$$

På samma sätt har vi att

$$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(p) \end{pmatrix}.$$

Eftersom $d\boldsymbol{f}$ är en linjär avbildning av riktningar utifrån p till ändringsriktningar i $\boldsymbol{f}(p)$ har $d\boldsymbol{f}$ 2×3-matrisen

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_x) & d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_y) & d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_z) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(p) \end{pmatrix}.$$

Detta är Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$ i punkten p.

Nabla

En behändig beteckning är nabla ∇ som är radvektorn

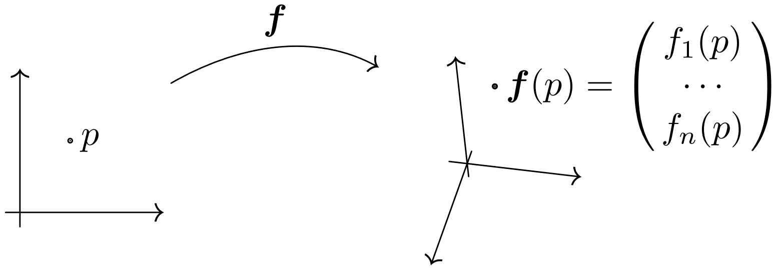
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Med denna symbol kan Jacobimatrisen ovan sammanfattas som

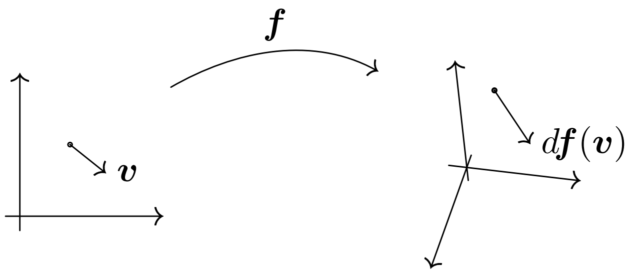
$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \nabla f_2(p) \end{pmatrix}.$$

Differentialer III

Antag att $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ och fixera $p \in \boldsymbol{R}^m$.



Differentialen $d\boldsymbol{f}$ avbildar riktningsvektorer utgående från p till ändringsvektorer utgående från $\boldsymbol{f}(p)$.

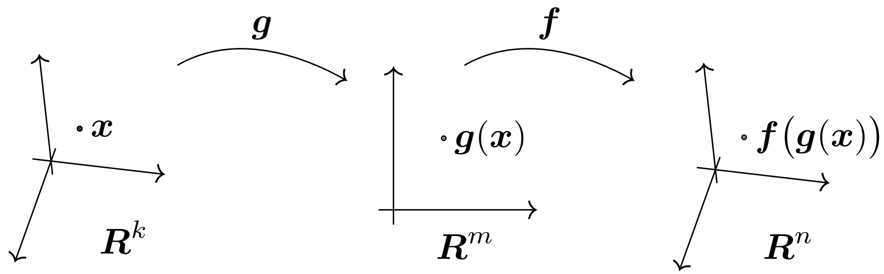


$d\boldsymbol{f}$ har $n \times m$-matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Sammansättningar

Antag att $\boldsymbol{g}\colon \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^m$ och $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$.



Då kan vi bilda den sammansatta avbildningen $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ som

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big).$$

I koordinatform blir detta

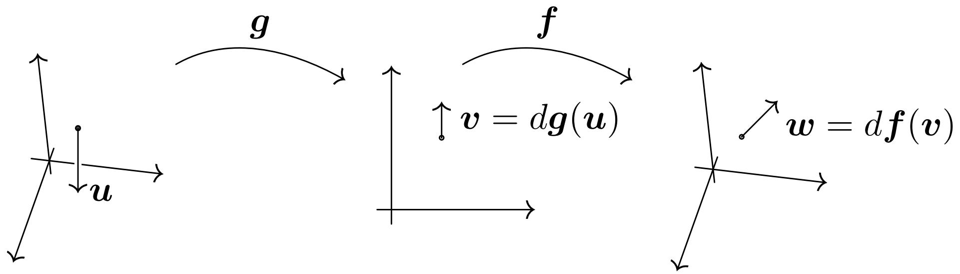
$$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \\ f_2\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_n\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\big) \end{pmatrix},$$

där

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ g_2(\boldsymbol{x}) \\ \cdots\cdots \\ g_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \ldots, x_k) \\ g_2(x_1, \ldots, x_k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_m(x_1, \ldots .x_k) \end{pmatrix}.$$

Kedjeregeln

Differentialen $d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$ till den sammansatta funktionen avbildar riktningar enligt mönstret



Eftersom differentialer är linjära avbildningar svarar sammansättningar mot matrismultiplikationer. $d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$ avbildar riktningen $\boldsymbol{u}$ på

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{w} = d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \\ &= d\boldsymbol{f}\big(d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})\big) = d\boldsymbol{f} \circ d\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}}_{d(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})\text{:s matris}} \big(\boldsymbol{u}\big)\,. \end{aligned}$$

Linjär algebra repetition

Om $T\colon \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ är en linjär transformation då har T matrisen

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\boldsymbol{e}_1) & T(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & T(\boldsymbol{e}_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

där $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m\}$ är standardbasen för $\boldsymbol{R}^m$.