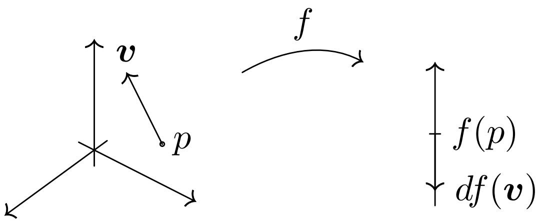
Riktningsderivata och gradient

Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.



Ändringstakten av f i en riktning $\boldsymbol{v}$ utgående från p ges som bekant av

$$df(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Ett annat namn på denna storhet är riktningsderivatan till f och betecknas

$$D_{\boldsymbol{v}} f(p) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}. \qquad (*)$$

Genom att införa gradienten

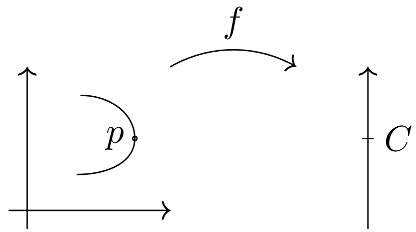
$$\nabla f \equiv \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big)$$

kan $(*)$ skrivas

$$D_{\boldsymbol{v}} f(p) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f(p). \qquad (\dagger)$$

Gradientens geometriska innebörd

Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ och betrakta p på en nivåyta till f



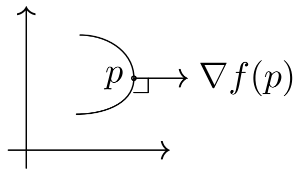
Om vi utifrån p väljer en riktning $\boldsymbol{v}$ som är parallell med nivåytan så är riktningsderivatan till f i $\boldsymbol{v}$-riktningen noll eftersom f inte ändrar värde längs nivåytan.

Detta betyder att

$$D_{\boldsymbol{v}} f = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f = 0$$

för alla $\boldsymbol{v}$ parallella med nivåytan.

Med andra ord är ∇f vinkelrät mot nivåytan.

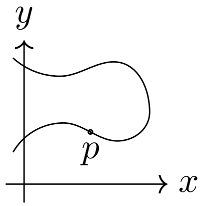


Implicita funktionssatsen I

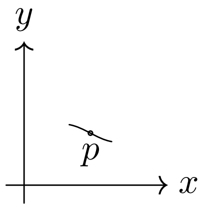
Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ och betrakta sambandet

$$f(x, y) = 0.$$

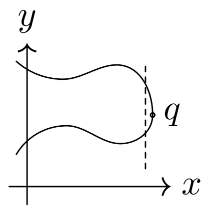
Ett sådant samband är uppfyllt för punkter längs 0-nivåkurvan i x, y-planet.



Lokalt kring en punkt p går det oftast att från sambandet lösa ut $y = y(x)$.



De undantagspunkter omkring vilka vi inte kan definiera $y = y(x)$ är alla punkter där nivåkurvan har lodrät tangent.



Kring q kan vi inte definiera $y = y(x)$ eftersom x-värden till vänster om q har lokalt två y-värden.

Om nivåkurvan har en icke-lodrät tangent i p så kan vi alltså lokalt definiera $y = y(x)$.

Eftersom gradienten

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

är vinkelrät mot tangenten blir villkoret om icke-lodrät tangent

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$$

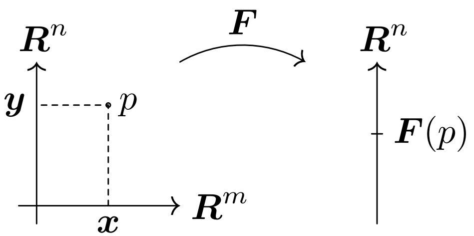
Sats Om $f\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $p = (x_0, y_0)$ och

$$f(x_0, y_0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Då finns en omgivning av (x_0, y_0) där lösningarna till $f(x, y) = 0$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $y = y(x)$.

Implicita funktionssatsen II

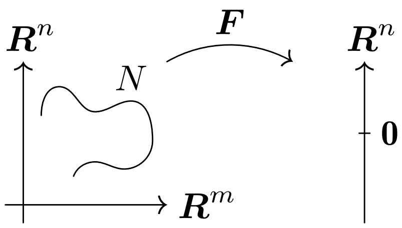
Antag att $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^{m+n} \to \boldsymbol{R}^n$.



Sambandet

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

definierar en $\boldsymbol{0}$-nivåyta N i definitionsmängden



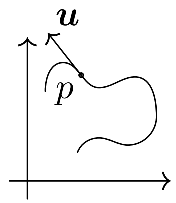
Alla punkter på N avbildas med $\boldsymbol{F}$ på $\boldsymbol{0}$. Lokalt går det ofta utifrån $(*)$ definiera

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}).$$

Vi ska ta fram ett tillräckligt villkor när detta går.

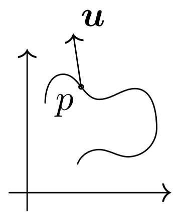
Betrakta en punkt p på N och en riktning $\boldsymbol{u}$ utifrån p. Om riktningen $\boldsymbol{u}$ är parallell med N så ändras inte $\boldsymbol{F}$:s värde i den riktningen, d.v.s. vi har att

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}.$$



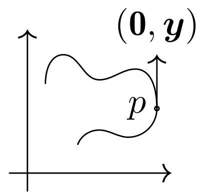
Är däremot $\boldsymbol{u}$ inte parallell med N så ändras $\boldsymbol{F}$:s värde, d.v.s.

$$d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}.$$



Vi kan garantera sambandet $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ om följande fall inte inträffar

$$d\boldsymbol{F}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \text{för något } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0},$$



d.v.s. att en $\boldsymbol{y}$-riktning $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{y})$ inte är parallell med N.

Villkoret för $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ är alltså att

$$d\boldsymbol{F}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0} \quad \text{för alla } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}. \qquad (*)$$

Differentialen $d\boldsymbol{F}$ har matrisen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

eller i blockmatrisform

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \end{pmatrix}.$$

Villkoret $(*)$ blir därför

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}} \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \qquad \forall \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0},$$

vilket betyder att nollrummet till matrisen $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}$ endast består av nollvektorn $\boldsymbol{0}$, d.v.s. att matrisen har full rang, eller ekvivalent att

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}\right) \neq 0.$$

Sats Om $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{R}^{m+n} \to \boldsymbol{R}^n$ är kontinuerligt deriverbar i en omgivning av $p = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ och

$$\boldsymbol{F}(p) = \boldsymbol{0}$$
$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(p)\right) \neq 0.$$

Då finns en omgivning av $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ där lösningarna till $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.