Taylors formel av ordning 2

Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerligt deriverbar av ordning 3 i en konvex omgivning D av $\boldsymbol{r}$, då gäller att

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{r}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{h} \\
&+ \boldsymbol{h}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{h} \\
&+ O(\boldsymbol{h})^3,
\end{aligned}
$$

för $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h} \in D$.

Beteckningar

$$
\text{Jakobianen till } f = J_f = df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}
$$

$$
\text{Hessianen till } f = H_f = d^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix}
$$

Taylors formel av godtycklig ordning

Om $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerligt deriverbar av ordning m i en konvex omgivning D av $\boldsymbol{r}$, då gäller att

$$
f(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{r}) + R_m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{h})
$$

för $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h} \in D$, där

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{h}\cdot\nabla &= h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \\
R_m(\boldsymbol{r},\boldsymbol{h}) &= \frac{1}{m!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^m f(\boldsymbol{r}+\theta\boldsymbol{h}) \quad (0<\theta<1).
\end{aligned}
$$

Taylorpolynomens entydighetssats

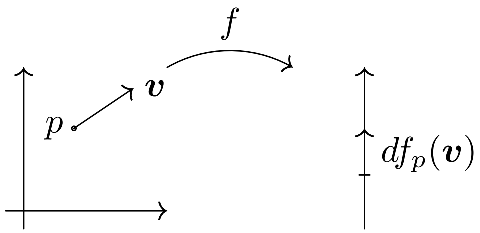
Om

$$
f(\boldsymbol{r}) = Q_n(\boldsymbol{r}) + O(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})^{n+1} \quad \text{då } \boldsymbol{r}\to\boldsymbol{a},
$$

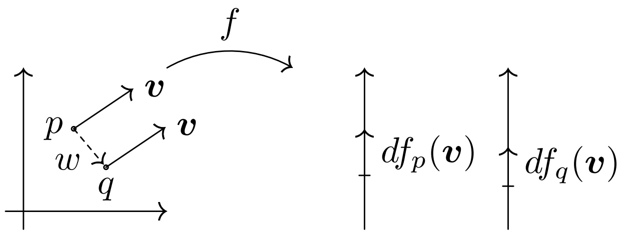
där Q_n är ett polynom av grad högst n. Då är Q_n Taylorpolynomet av grad n till f i punkten $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$.

Andradifferentialen

Antag att $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$.
Differentialen $df_p(\boldsymbol{v})$ mäter hur mycket f ändrar sig om vi rör oss i riktning $\boldsymbol{v}$.



Andradifferentialen $d^2f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ talar om hur mycket $df(\boldsymbol{v})$ ändrar sig när baspunkten p rör sig i riktning $\boldsymbol{w}$.



d^2f mäter alltså ändringen av ändringen av f:s funktionsvärde.

Om $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ är lika brukar man förkortat skriva

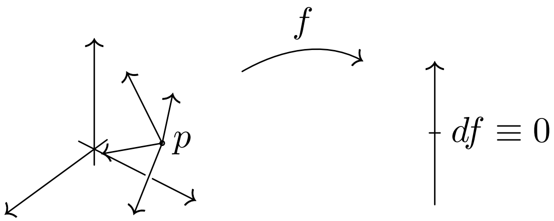
$$d^2f(\boldsymbol{v}) = d^2f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}).$$

$d^2f(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ är en kvadratisk form som kan skrivas i matrisformen

$$\boldsymbol{w}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix} \boldsymbol{v}.$$

Kritiska punkter

Låt $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$. En punkt p är en kritisk punkt om $df(\boldsymbol{v}) = 0$ för alla riktningar $\boldsymbol{v}$ utgående från p.



Lokala extremvärden

En funktion $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ har en lokal maximipunkt i p om det finns en omgivning U av p där

$$f(p) \geq f(q) \qquad \text{för alla } q \in U.$$

Om det finns en omgivning V kring p där

$$f(p) \leq f(q) \qquad \text{för alla } q \in U,$$

då har f en lokal minimipunkt i p.

Sats De lokala extrempunkterna till $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ återfinns bland följande punkter:

1. kritiska punkter, d.v.s. där $\nabla f = \mathbf{0}$,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter till området.

Klassificering av kritiska punkter

Om p är en kritisk punkt till $f\colon \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, då har f följande Taylorutveckling kring p,

$$f(p+\boldsymbol{h}) = f(p) + \underbrace{J_f(p)}_{=0}\,\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} + O(\boldsymbol{h})^3.$$

De kvadratiska termerna $\boldsymbol{h}^T H_f(p)\boldsymbol{h}$ avgör om p är en lokal min-, max- eller sadelpunkt.

$$\begin{array}{lccl} \text{Om} & \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} > 0 & \Rightarrow & \text{lokalt min,} \\ & \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} < 0 & \Rightarrow & \text{lokalt max,} \\ & \boldsymbol{h}^T H_f(p)\,\boldsymbol{h} \gtrless 0 & \Rightarrow & \text{sadelpunkt,} \end{array}$$

i övriga fall krävs studium av högre ordningars termer för att avgöra karaktären.