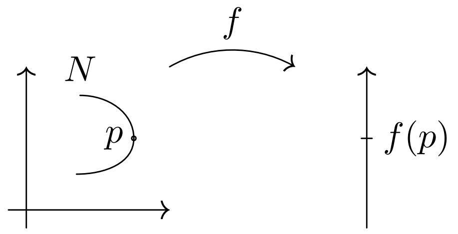
Lagranges multiplikatormetod

Betrakta optimeringsproblemet

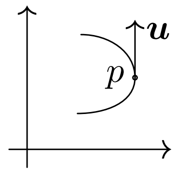
$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x_1,\dots,x_n) \\
\text{då} \quad & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Punkterna som uppfyller $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ bildar en mängd N i $\boldsymbol{R}^n$.



Betrakta en punkt p på N. Punkten p är en kritisk punkt till f på N om

$$df(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla f = 0 \qquad (\dagger)$$



för alla $\boldsymbol{u}$ parallella med N, d.v.s. f:s värde ändras inte när vi rör oss parallellt med N.

Geometriskt betyder $(\dagger)$ att ∇f är vinkelrät mot N i p.

Hur bestämmer vi vilka riktningar $\boldsymbol{u}$ som är parallella med N?

Eftersom N är nollställeytan till $\boldsymbol{G}$ så är $\boldsymbol{u}$ parallell med N om

$$d\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \qquad (*)$$

d.v.s. vi ändrar inte $\boldsymbol{G}$:s värde i riktning $\boldsymbol{u}$ utan stannar kvar på nollställeytan.

$(*)$ kan också skrivas i matrisform

$$\begin{pmatrix} - \nabla g_1 - \\ \dots\dots\dots \\ - \nabla g_m - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \boldsymbol{u} \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

vilket betyder att

$$\boldsymbol{u} \quad \perp \quad \nabla g_1, \dots, \nabla g_m.$$

I den kritiska punkten är alltså $\nabla f \perp \boldsymbol{u}$ för alla $\boldsymbol{u}$ s.a.

$$\boldsymbol{u} \quad \perp \quad \nabla g_1, \dots, \nabla g_m.$$

Detta betyder att

$$\nabla f \in \operatorname{span}\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\}.$$

Sats Antag att f och $\boldsymbol{G}$ är kontinuerligt deriverbara. Då har optimeringsproblemet sin lösning i en av följande punkter

1. kritiska punkter, d.v.s. där
$$\nabla f \in \operatorname{span}\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\},$$
2. punkter där $\dim\{\nabla g_1, \dots, \nabla g_m\} < n$ (singulära punkter),
3. punkter där någon av $\nabla f, \nabla g_1, \dots, \nabla g_m$ inte existerar,
4. randpunkter.

Satsen om extremvärden

Sats Om K är en kompakt mängd (sluten och begränsad) och $f\colon K \to \boldsymbol{R}$ är kontinuerlig, då antar f såväl ett största som ett minsta värde på K.