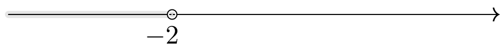
Inledande kurs i matematik, avsnitt P.1

P.1.13 Lös olikheten $-2x > 4$ och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Multiplicera båda led med $-\frac{1}{2}$. Då byter också olikhetstecknet riktning,

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)(-2x) < \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -2.$$

D.v.s. lösningen är det öppna intervallet $(-\infty, -2)$.



P.1.15 Lös olikheten

$$5x - 3 \le 7 - 3x,$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Precis som när vi löser en ekvation samlar vi först alla x i ena ledet. Addera båda led med $3x$,

$$5x - 3 + 3x \le 7 - 3x + 3x \qquad \Leftrightarrow \qquad 8x - 3 \le 7.$$

För att få x ensamt i ena ledet adderar vi 3,

$$8x - 3 + 3 \le 7 + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 8x \le 10.$$

Slutligen får vi ut x genom att dividera båda led med 8 (som är positiv och därför inte vänder på olikhetstecknet),

$$x \le \tfrac{10}{8} = \tfrac{5}{4}.$$

Lösningsintervallet är alltså $(-\infty, \frac{5}{4}\,]$.

P.1.17 Lös olikheten

$$3(2-x) < 2(3+x),$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vi utvecklar båda led,

$$6 - 3x < 6 + 2x.$$

Samla x i ena ledet genom att addera med $3x$,

$$6 - 3x + 3x < 6 + 2x + 3x \qquad \Leftrightarrow \qquad 6 < 6 + 5x.$$

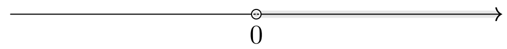
Vi får x ensamt i ena ledet genom att addera med -6,

$$6 - 6 < 6 + 5x - 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < 5x.$$

Division med 5 ger svaret

$$0 < x,$$

vilket är intervallet $(0, \infty)$.



P.1.19 Lös olikheten

$$\frac{1}{2-x} < 3,$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

För att kunna ”lösa ut” x vill vi multiplicera båda led med nämnaren $2 - x$, men vi vet inte om detta uttryck är positivt eller negativt, och därför inte hur olikhetstecknet påverkas av multiplikationen.

Om vi delar upp i två fall har vi

1. $2 - x > 0$:

   I detta fall påverkas inte olikhetstecknet vid multiplikationen och vi får att

$$1 < 3 \cdot (2 - x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 < 6 - 3x.$$

   Addera med -6,

$$-5 < -3x.$$

   Dividera med -3 (som är negativ och vänder på olikhetstecknet)

$$\tfrac{5}{3} > x.$$

   Alltså, om $2 - x > 0$, d.v.s. $x < 2$, då är olikheten i uppgiftstexten uppfylld om $x < \frac{5}{3}$. Med andra ord är

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} < 3 \quad \text{och} \quad 2 - x > 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x < 2 \quad \text{och} \quad x < \tfrac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow \qquad x < \tfrac{5}{3}. \end{aligned}$$

   Detta ger intervallet $(-\infty, \frac{5}{3})$.

2. $2 - x < 0$:

   I detta fall multiplicerar vi olikheten med ett negativt tal och då vänds olikhetstecknet. Vi får

$$1 > 3 \cdot (2 - x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 > 6 - 3x.$$

   Addera med -6,

$$-5 > -3x.$$

   Dividera med -3 (negativ),

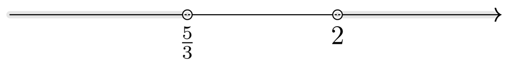
$$\tfrac{5}{3} < x.$$

   Vi har alltså visat att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-x} < 3 \quad \text{och} \quad 2 - x < 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x > 2 \quad \text{och} \quad x > \tfrac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow \qquad x > 2. \end{aligned}$$

   Detta ger intervallet $(2, \infty)$.

Sammantaget har vi alltså att olikheten är uppfylld om $x < \frac{5}{3}$ eller $x > 2$, vilket svarar mot intervallen $(-\infty, \frac{5}{3})$ och $(2, \infty)$.



P.1.21 Lös olikheten

$$x^2 - 2x \leq 0$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vänsterledet kan vi faktorisera, och skriva olikheten som

$$x(x - 2) \leq 0.$$

Med hjälp av teckenreglerna

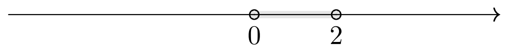
$$+ \cdot + = +, \quad + \cdot - = -, \quad - \cdot + = - \quad \text{och} \quad - \cdot - = +$$

ser vi att vänsterledet är negativt om en faktor är negativ och den andra är positiv. Detta ger oss två fall.

1. $x \leq 0$, $x - 2 \geq 0$. Detta ger att $x \leq 0$ och $x \geq 2$, som saknar lösning.

2. $x \geq 0$, $x - 2 \leq 0$. Detta ger att $x \geq 0$ och $x \leq 2$, d.v.s. $0 \leq x \leq 2$.

Sammantaget är alltså olikheten uppfylld om $0 \leq x \leq 2$, vilket är intervallet $[0, 2]$.



P.1.23 Lös olikheten $x^3 > 4x$ och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vi samlar x i ena ledet,

$$x^3 - 4x > 0.$$

Vi ser direkt att vi kan bryta loss en faktor x,

$$x(x^2 - 4) > 0.$$

Den andra faktorn kan vi faktorisera med konjugatregeln så att vi får en fullständig faktorisering av vänsterledet i förstagradsfaktorer,

$$x(x-2)(x+2) > 0.$$

Med teckenreglerna ser vi att vänsterledet är positivt om vi har en av följande konfigurationer:

$$1)\ + \cdot + \cdot +,\quad 2)\ + \cdot - \cdot -,\quad 3)\ - \cdot + \cdot -,\quad \text{eller}\quad 4)\ - \cdot - \cdot +.$$

Vi undersöker dessa fall.

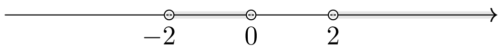
1. Då ska vi ha att $x > 0,\ x-2 > 0,\ x+2 > 0$, d.v.s. $x > 0,\ x > 2,\ x > -2$ vilket är detsamma som $x > 2$.

2. Vi ska ha att $x > 0,\ x-2 < 0,\ x+2 < 0$, d.v.s. $x > 0,\ x < 2,\ x < -2$ som saknar lösning.

3. Vi ska ha att $x < 0,\ x-2 > 0,\ x+2 < 0$, d.v.s. $x < 0,\ x > 2,\ x < -2$ som saknar lösning.

4. Vi ska ha att $x < 0,\ x-2 < 0,\ x+2 > 0$, d.v.s. $x < 0,\ x < 2,\ x > -2$. Detta kan vi skriva som $-2 < x < 0$.

Olikheten är alltså uppfylld om $-2 < x < 0$ eller $2 < x$, vilket svarar mot intervallen $(-2,0)$ och $(2,\infty)$.



P.1.25 Lös olikheten

$$\frac{x}{2} \ge 1 + \frac{4}{x},$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Flytta över alla termer i ena ledet

$$\frac{x}{2} - \frac{4}{x} - 1 \ge 0.$$

Skriv vänsterledet med minsta gemensamma nämnare,

$$\frac{x^2 - 8 - 2x}{2x} \ge 0.$$

Täljarpolynomet har nollställena

$$x_{\pm} = 1 \pm \sqrt{8+1} = 1 \pm 3 = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

och kan faktoriseras som $(x+2)(x-4)$. Olikheten blir därför

$$\frac{(x+2)(x-4)}{2x} \ge 0.$$

Vänsterledet är positivt när ett av följande fall inträffar

$$1)\ \frac{+\cdot+}{+},\quad 2)\ \frac{+\cdot-}{-},\quad 3)\ \frac{-\cdot+}{-},\quad \text{eller}\quad 4)\ \frac{-\cdot-}{+}.$$

Vi undersöker dessa fall

1. Vi har $x+2 \ge 0,\ x-4 \ge 0,\ x > 0$, d.v.s. $x \ge -2,\ x \ge 4,\ x > 0$ som är ekvivalent med $x \ge 4$.

2. Vi har $x+2 \ge 0,\ x-4 \le 0,\ x < 0$, d.v.s. $x \ge -2,\ x \le 4,\ x > 0$ som är ekvivalent med $-2 \le x < 0$.

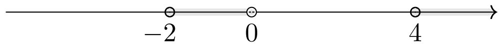
3. Vi har $x+2 \le 0,\ x-4 \ge 0,\ x < 0$, d.v.s. $x \le -2,\ x \ge 4,\ x < 0$ som saknar lösning.

4. Vi har $x+2 \le 0,\ x-4 \le 0,\ x > 0$, d.v.s. $x \le -2,\ x \le 4,\ x > 0$ som saknar lösning.

Sammantaget är olikheten uppfylld om

$$x \geq 4 \quad \text{eller} \quad -2 \leq x < 0,$$

vilket ger intervallen $[-2, 0)$ och $[4, \infty)$.



Anm. Nämnaren får inte vara noll, vilket ger villkoret $x > 0$ istället för $x \geq 0$.

P.1.26 Lös olikheten

$$\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1},$$

och uttryck lösningen som ett intervall eller en union av intervall.

Vi flyttar över alla termer i ena ledet

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0,$$

och skriver vänsterledet med minsta gemensamma nämnare,

$$\frac{3(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{x+5}{(x-1)(x+1)} < 0.$$

Vänsterledet är negativt om vi har ett av följande fall

$$1)\ \frac{-}{+\cdot+}, \quad 2)\ \frac{+}{-\cdot+}, \quad 3)\ \frac{+}{+\cdot-}, \quad \text{eller} \quad 4)\ \frac{-}{-\cdot-}.$$

Vi undersöker dessa fall.

1. Vi har $x+5 < 0$, $x-1 > 0$, $x+1 > 0$, d.v.s. $x < -5$, $x > 1$, $x > -1$ som saknar lösning.
2. Vi har $x+5 > 0$, $x-1 < 0$, $x+1 > 0$, d.v.s. $x > -5$, $x < 1$, $x > -1$ vilket ger $-1 < x < 1$.
3. Vi har $x+5 > 0$, $x-1 > 0$, $x+1 < 0$, d.v.s. $x > -5$, $x > 1$, $x < -1$ som saknar lösning.
4. Vi har $x+5 < 0$, $x-1 < 0$, $x+1 < 0$, d.v.s. $x < -5$, $x < 1$, $x < -1$ vilket ger $x < -5$.

Alltså är olikheten uppfylld om

$$-1 < x < 1 \quad \text{eller} \quad x < -5,$$

d.v.s. om x tillhör intervallen $(-1, 1)$ eller $(-\infty, -5)$.

P.1.27 Lös ekvationen $|x| = 3$.

Ekvationen är ekvivalent med $x = -3$ eller $x = 3$, vilka också är lösningarna.

P.1.29 Lös ekvationen $|2t + 5| = 4$.

Ekvationen är ekvivalent med

$$2t + 5 = 4 \quad \text{eller} \quad 2t + 5 = -4.$$

Eftersom dessa är förstagradsuttryck är ekvationerna enkla att lösa,

$$t = -\tfrac{1}{2} \quad \text{eller} \quad t = -\tfrac{9}{2}.$$

P.1.31 Lös ekvationen $|8-3s|=9$.

Vi skriver om ekvationen som två alternativa ekvationer utan beloppstecken,

$$8-3s=9 \quad \text{eller} \quad 8-3s=-9.$$

Dessa två förstagradare har lösningarna

$$s=-\tfrac{1}{3} \quad \text{eller} \quad s=\tfrac{17}{3}.$$

P.1.33 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|x|<2$.

Beloppsolikheten är ekvivalent med

$$-2<x<2,$$

d.v.s. intervallet $(-2,2)$.

P.1.35 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|s-1|\le 2$.

Vi kan skriva upp en ekvivalent olikhet utan beloppstecken

$$-2\le s-1\le 2.$$

Addera 1 till båda led,

$$-1\le s\le 3.$$

Intervallet är alltså $[-1,3]$.

P.1.37 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|3x-7|<2$.

Vi kan skriva olikheten som

$$-2<3x-7<2.$$

Addera 7 till alla led,

$$5<3x<9.$$

Dela med 3,

$$\tfrac{5}{3}<x<3.$$

Intervallet är alltså $(\frac{5}{3},3)$.

P.1.39 Bestäm intervallet som definieras av olikheten $|\frac{1}{2}x-1|\le 1$.

Vi skriver upp olikheten utan beloppstecken,

$$-1\le \tfrac{1}{2}x-1\le 1.$$

Addera 1 till alla led,

$$0\le \tfrac{1}{2}x\le 2.$$

Multiplicera med 2,

$$0\le x\le 4.$$

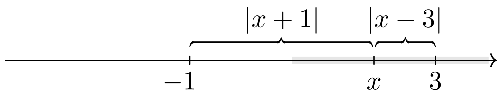
Intervallet är $[0,4]$.

P.1.41 Lös olikheten

$$|x+1| > |x-3|$$

genom att tolka olikheten som en utsaga om avstånd på reella tallinjen.

Vänsterledet $|x-(-1)|$ är avståndet mellan x och -1, och högerledet $|x-3|$ är avståndet mellan x och 3. Vi söker alltså alla punkter x med ett större avstånd till -1 än dess avstånd till 3.



Geometriskt ser vi att x måste ligga till höger om mittpunkten mellan -1 och 3, d.v.s. $x > 1$.

P.1.44 Lös ekvationen $|x-1| = 1-x$.

Om $x-1 \geq 0$ då kan ekvationen skrivas som

$$x-1 = 1-x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.$$

Om $x-1 \leq 0$ då kan ekvationen skrivas som

$$-(x-1) = 1-x \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = 0.$$

som är uppfylld för alla x vi betraktar (d.v.s. för alla x som uppfyller $x-1 \leq 0$). Ekvationen i uppgiftstexten är alltså uppfylld för alla $x-1 \leq 0$, d.v.s. $x \leq 1$.

P.2.15 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (-1, 1)$ och har riktningskoefficient $k = 1$.

Varje icke-lodrät linje i planet kan skrivas i formen

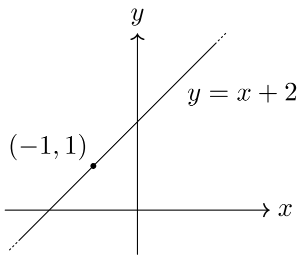
$$y = kx + m,$$

där k är linjens riktningskoefficient (eller lutning), och som är lika med 1 enligt uppgiftstexten.

För att bestämma konstanten m använder vi att linjen går genom punkten $P = (-1, 1)$, vilket betyder att linjens ekvation ska vara uppfylld i punkten P,

$$1 = 1 \cdot (-1) + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 2.$$

Linjens ekvation är alltså $y = x + 2$.



P.2.16 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (-2, 2)$ och har riktningskoefficient $k = \frac{1}{2}$.

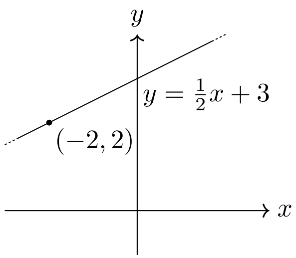
En linje med riktningskoefficient $\frac{1}{2}$ har ekvationen

$$y = \tfrac{1}{2}x + m.$$

Konstanten m bestämmer vi med villkoret att linjen går genom punkten $P = (-2, 2)$,

$$2 = \tfrac{1}{2} \cdot (-2) + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 3.$$

Linjens ekvation är $y = \frac{1}{2}x + 3$.



P.2.17 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (0, b)$ och har riktningskoefficient $k = 2$.

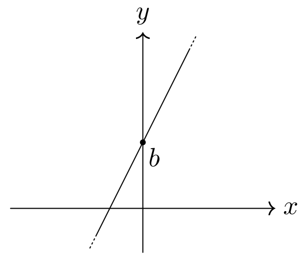
Linjens ekvation kan vi skriva som

$$y = 2x + m,$$

och m bestäms med villkoret att punkten $(0, b)$ uppfyller linjens ekvation, d.v.s.

$$b = 2 \cdot 0 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = b.$$

Linjens ekvation är $y = 2x + b$.



P.2.18 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (a, 0)$ och har riktningskoefficient $k = -2$.

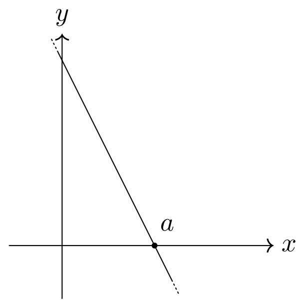
Linjens ekvation är

$$y = -2x + m.$$

Eftersom punkten $(a, 0)$ ligger på linjen ska den uppfylla linjens ekvation, d.v.s.

$$0 = -2 \cdot a + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 2a.$$

Alltså är linjens ekvation $y = -2x + 2a$.



P.2.19 Ligger punkten $P = (2, 1)$ på, ovanför eller under linjen $2x + 3y = 6$.

Punkten $P = (2, 1)$ ligger på linjen om den uppfyller linjens ekvation,

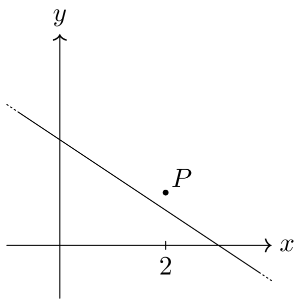
$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7 \neq 6.$$

Alltså ligger P *inte* på linjen.

Punkten P ligger ovanför linjen om P har större y-koordinat än linjen då $x = 2$. Eftersom linjen har y-koordinat

$$y = \frac{6 - 2x}{3} = \{\, x = 2 \,\} = \frac{6 - 2 \cdot 2}{3} = \tfrac{2}{3} < 1$$

ligger punkten P ovanför linjen.

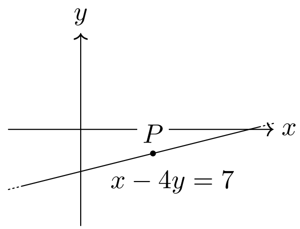


P.2.20 Ligger punkten $P = (3, -1)$ på, ovanför eller under linjen $x - 4y = 7$.

Punkten $P = (3, -1)$ ligger på linjen om den uppfyller linjens ekvation,

$$3 - 4 \cdot (-1) = 3 + 4 = 7.$$

Alltså ligger P på linjen.



P.2.21 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(0, 0)$ och $(2, 3)$.

Eftersom punkterna $(0, 0)$ och $(2, 3)$ inte ligger ovanför varandra (punkterna har inte samma x-koordinat) är linjen inte lodrät, och kan skrivas i formen

$$y = kx + m.$$

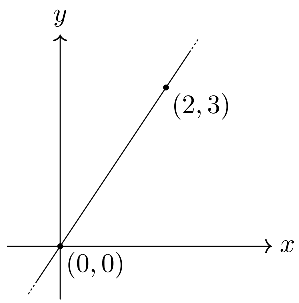
Eftersom punkterna $(0, 0)$ och $(2, 3)$ ska ligga på linjen måste de uppfylla linjens ekvation,

$$0 = k \cdot 0 + m = m \qquad (1)$$

$$3 = k \cdot 2 + m \qquad (2)$$

Från (1) får vi att $m = 0$. Detta insatt i (2) ger att $k = \frac{3}{2}$. Alltså är linjens ekvation

$$y = \tfrac{3}{2}x.$$



P.2.22 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(-2, 1)$ och $(2, -2)$.

Punkterna ligger inte ovanför varandra så linjen är inte lodrät och vi kan skriva linjens ekvation som

$$y = kx + m,$$

där k och m är konstanter som vi ska bestämma.

Eftersom punkterna ska ligga på linjen måste de uppfylla linjens ekvation,

$$1 = k \cdot (-2) + m, \tag{1}$$
$$-2 = k \cdot 2 + m. \tag{2}$$

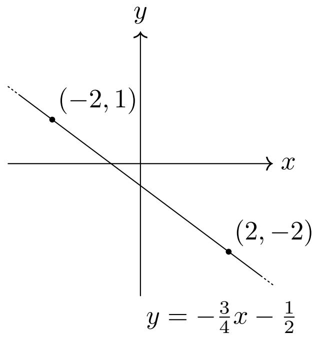
Om vi adderar (1) och (2) så får vi

$$-1 = 2m \quad \Leftrightarrow \quad m = -\tfrac{1}{2}.$$

Subtraherar vi (1) med (2) får vi

$$3 = -4k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\tfrac{3}{4}.$$

Linjens ekvation är därmed $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.



P.2.23 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(4, 1)$ och $(-2, 3)$.

Eftersom punkterna inte ligger ovanför varandra så är linjen inte lodrät och vi kan skriva linjens ekvation i formen

$$y = kx + m.$$

Punkterna $(4, 1)$ och $(-2, 3)$ ska ligga på linjen och måste därför uppfylla linjens ekvation

$$1 = k \cdot 4 + m, \tag{1}$$
$$3 = k \cdot (-2) + m. \tag{2}$$

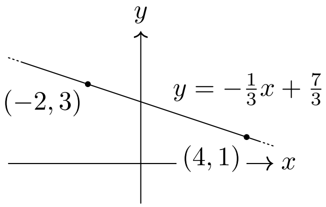
Om vi från (1) löser ut $m = 1 - 4k$ och stoppar in det i (2), så får vi

$$3 = -2k + 1 - 4k = 1 - 6k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\tfrac{1}{3}.$$

Detta insatt i (1) ger

$$1 = \left(-\tfrac{1}{3}\right) \cdot 4 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \tfrac{7}{3}.$$

Alltså är linjens ekvation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.



P.2.24 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(-2, 0)$ och $(0, 2)$.

Punkterna ligger inte rakt ovanför varandra så linjen är inte lodrät, och kan därför skrivas i formen

$$y = kx + m.$$

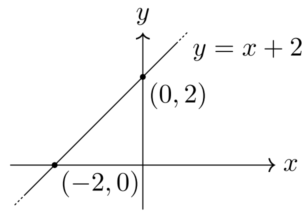
Punkterna ska ligga på linjen och därmed uppfylla linjens ekvation

$$0 = k \cdot (-2) + m, \tag{1}$$
$$2 = k \cdot 0 + m. \tag{2}$$

Från (2) får vi att $m = 2$. Detta insatt i (1) ger

$$0 = -2k + 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1.$$

Linjens ekvation är $y = x + 2$.



P.2.25 Bestäm en ekvation för den linje med lutning -2 och som skär y-axeln i $\sqrt{2}$.

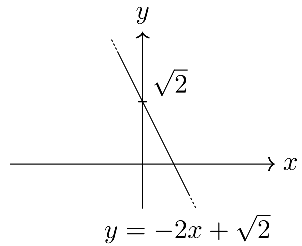
Eftersom linjens lutning är given vet vi att linjens ekvation kan skrivas som

$$y = -2x + m,$$

där m är en konstant som vi ska bestämma. Det andra villkoret är att $y = \sqrt{2}$ då $x = 0$, d.v.s.

$$\sqrt{2} = -2 \cdot 0 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \sqrt{2}.$$

Alltså är linjens ekvation $y = -2x + \sqrt{2}$.



P.2.26 Bestäm en ekvation för den linje med lutning $-\frac{1}{2}$ och som skär y-axeln i -3.

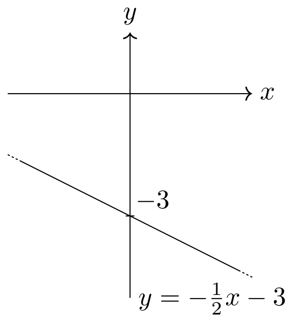
Eftersom linjens lutning är $-\frac{1}{2}$ kan linjens ekvation skrivas som

$$y = -\tfrac{1}{2}x + m.$$

När linjen skär y-axeln gör den det i punkten $(0, -3)$, och den punkten måste då uppfylla linjens ekvation,

$$-3 = -\tfrac{1}{2} \cdot 0 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -3.$$

Linjens ekvation är $y = -\frac{1}{2}x - 3$.



P.2.27 Bestäm var linjen $3x + 4y = 12$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

En punkt ligger på x-axeln om dess y-koordinat är noll. Den punkt på linjen som skär x-axeln måste alltså uppfylla

$$3x + 4 \cdot 0 = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 4.$$

Punkten $(4, 0)$ är alltså skärningspunkten mellan linjen och x-axeln.

På motsvarande sätt ligger en punkt på y-axeln om dess x-koordinat är noll. Skärningspunkten mellan linjen och y-axeln måste alltså uppfylla

$$3 \cdot 0 + 4y = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 3.$$

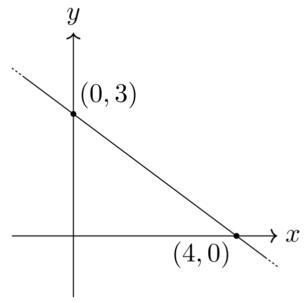
Alltså är $(0, 3)$ den sökta skärningspunkten.

Genom att skriva om linjens ekvation i standardform,

$$3x + 4y = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -\tfrac{3}{4}x + 3,$$

kan vi direkt avläsa att lutningen är $-\frac{3}{4}$.

Eftersom vi vet två punkter på linjen, $(4, 0)$ och $(0, 3)$, så är den sökta linjen den linje som förbinder de två punkterna.



P.2.28 Bestäm var linjen $x + 2y = -4$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

Skärningspunkten med x-axeln $(y = 0)$ ges av

$$x + 2 \cdot 0 = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -4,$$

d.v.s. skärningspunkten är $(-4, 0)$.

Skärningspunkten med y-axeln $(x = 0)$ ges av

$$0 + 2y = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -2,$$

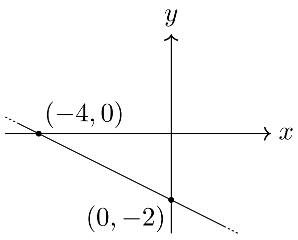
d.v.s. skärningspunkten är $(0, -2)$.

Vi skriver linjens ekvation i standardform

$$y = -\tfrac{1}{2}x - 2$$

och kan avläsa att linjens lutning är $-\frac{1}{2}$.

En skiss av linjen får vi genom att förbinda punkterna $(-4,0)$ och $(0,-2)$ med en rät linje.



P.2.29 Bestäm var linjen $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 2$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

Linjen skär x-axeln då $y=0$, d.v.s. då

$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\cdot 0 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{2}.$$

Skärningspunkten med x-axeln är alltså $(\sqrt{2},0)$.

Linjen skär y-axeln då $x=0$, d.v.s. då

$$\sqrt{2}\cdot 0 - \sqrt{3}\,y = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -\tfrac{2}{\sqrt{3}}.$$

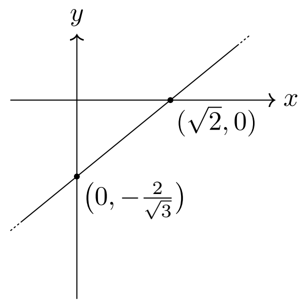
Skärningspunkten med y-axeln är alltså $\bigl(0,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\bigr)$.

Skriver vi linjens ekvation i standardform

$$y = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x - \tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

ser vi att linjens lutning är $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

Eftersom linjen förbinder punkterna $(\sqrt{2},0)$ med $\bigl(0,-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\bigr)$ har linjen följande utseende.



P.2.30 Bestäm var linjen $1{,}5x - 2y = -3$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

Linjen skär x-axeln då $y=0$, d.v.s. då

$$1{,}5x - 2\cdot 0 = -3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2.$$

Skärningen med x-axeln sker alltså i punkten $(-2,0)$.

Linjen skär y-axeln då $x=0$, d.v.s. då

$$1{,}5\cdot 0 - 2y = -3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \tfrac{3}{2}.$$

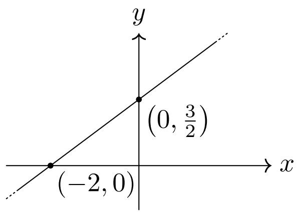
Skärningen med y-axeln sker alltså i punkten $\bigl(0,\tfrac{3}{2}\bigr)$.

Skriver vi linjens ekvation i standardform

$$y = 0{,}75\,x + \tfrac{3}{2}$$

så ser vi att linjens lutning är $0{,}75$.

Eftersom linjen förbinder punkterna $(-2,0)$ och $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ får vi följande skiss.



P.2.31 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P=(2,1)$ och är

a) parallell med linjen $y=x+2$,

b) vinkelrät mot linjen $y=x+2$.

a) Eftersom linjen ska vara parallell med linjen $y=x+2$ ska den ha samma lutning 1. Vår linje har alltså ekvationen

$$y=x+m.$$

Eftersom vår linje går genom punkten $(2,1)$ ska denna punkt uppfylla linjens ekvation,

$$1=2+m \qquad \Leftrightarrow \qquad m=-1.$$

Vår linje har alltså ekvationen $y=x-1$.

b) Eftersom linjen ska vara vinkelrät mot linjen $y=x+2$ ska den ha en lutning som är $-\frac{1}{1}=-1$ (se sidan 15 i kursboken). Vår linje har alltså ekvationen

$$y=-x+m.$$

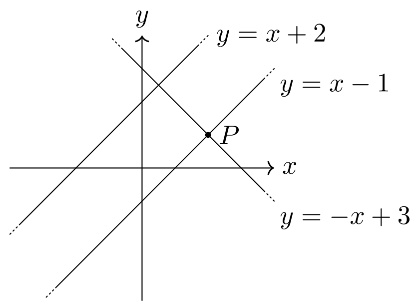
Eftersom linjen ska gå genom punkten $(2,1)$ ska denna punkt uppfylla linjens ekvation,

$$1=-2+m \qquad \Leftrightarrow \qquad m=3.$$

Vår linje har alltså ekvationen

$$y=-x+3.$$

Vi ritar upp linjerna.



P.2.32 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P=(-2,2)$ och är

a) parallell med linjen $2x+y=4$,

b) vinkelrät mot linjen $2x+y=4$.

a) En linje som är parallell med

$$2x+y=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y=-2x+4$$

ska ha samma lutning -2, d.v.s. ha en ekvation i formen

$$y=-2x+m.$$

Eftersom punkten $(-2,2)$ ska ligga på den sökta linjen måste $(-2,2)$ uppfylla linjens ekvation

$$2=-2\cdot(-2)+m \qquad \Leftrightarrow \qquad m=-2.$$

Vår linje är $y=-2x-2$.

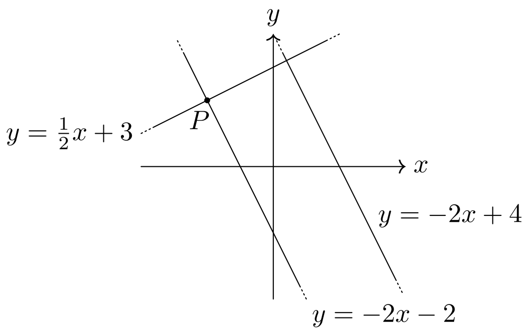
b) Vår linje ska vara vinkelrät mot $y=-2x+4$ och måste därför har lutningen $-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$ (se sidan 15 i kursboken). Den sökta linjen har alltså ekvationen

$$y=\tfrac{1}{2}x+m.$$

Eftersom punkten $(-2,2)$ ska ligga på vår linje måste $(-2,2)$ uppfylla linjens ekvation

$$2 = \tfrac{1}{2}\cdot(-2)+m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 3.$$

Linjens ekvation är $y = \frac{1}{2}x + 3$.



P.2.33 Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $3x + 4y = -6$ och $2x - 3y = 13$.

Skärningspunkten ligger på båda linjerna och uppfyller därför båda linjernas ekvationer

$$3x + 4y = -6, \tag{1}$$
$$2x - 3y = 13. \tag{2}$$

Från (1) löser vi ut x,

$$x = -2 - \tfrac{4}{3}y, \tag{3}$$

och stoppar in i (2),

$$2\bigl(-2 - \tfrac{4}{3}y\bigr) - 3y = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -3.$$

(3) ger nu att

$$x = -2 = \tfrac{4}{3}\cdot(-3) = 2.$$

Alltså är skärningspunkten $(2,-3)$.

P.2.34 Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $2x + y = 8$ och $5x - 7y = 1$.

Skärningspunkten ligger på båda linjerna och uppfyller därför båda linjernas ekvationer

$$2x + y = 8, \tag{1}$$
$$5x - 7y = 1. \tag{2}$$

Från (1) löser vi ut y,

$$y = 8 - 2x, \tag{3}$$

och stoppar in i (2),

$$5x - 7(8 - 2x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3.$$

(3) ger nu att

$$y = 8 - 2\cdot 3 = 2.$$

Skärningspunkten är alltså $(3,2)$.

P.2.37 Bestäm skärningen med y-axeln för den linje som går genom punkterna $(2,1)$ och $(3,-1)$.

Vi bestämmer först linjens ekvation. Om vi skriver linjens ekvation som

$$y = kx + m,$$

då ska $(2,1)$ och $(3,-1)$ uppfylla ovanstående samband

$$1 = k\cdot 2 + m, \tag{1}$$
$$-1 = k\cdot 3 + m. \tag{2}$$

(2) – (1) ger att $k = -2$. Detta insatt i (1) ger att

$$1 = -2\cdot 2 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 5.$$

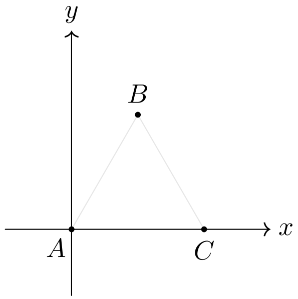
Alltså är linjens ekvation $y = -2x + 5$.
Linjen skär y-axeln då $x = 0$ med y-värdet

$$y = -2 \cdot 0 + 5 = 5,$$

d.v.s. $(0, 5)$ är den sökta skärningspunkten.

P.2.42 Visa att triangeln med hörn i $A = (0, 0)$, $B = (1, \sqrt{3}\,)$ och $C = (2, 0)$ är liksidig.

Vi ritar först upp hörnpunkterna.



Vi ska visa att avståndet mellan

1. A och B,
2. A och C, samt
3. B och C

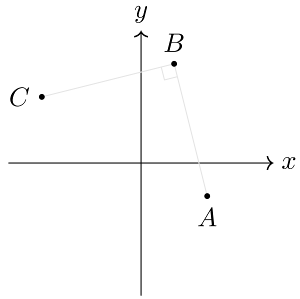
är lika. Avståndsformeln ger att

1. avstånd $= \sqrt{(0-1)^2 + (0-\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{1+3} = 2$,
2. avstånd $= \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$,
3. avstånd $= \sqrt{(1-2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

vilket visar att sidorna i triangeln är lika långa.

P.2.43 Visa att punkterna $A = (2, -1)$, $B = (1, 3)$ och $C = (-3, 2)$ bildar tre hörnpunkter i en kvadrat, och bestäm den fjärde hörnpunkten.

Vi ritar upp de tre punkterna.



För att de tre punkterna ska vara hörnpunkter i en kvadrat krävs att

1. avståndet mellan A och B är lika med avståndet mellan B och C, och att
2. kantlinjen mellan A och B är vinkelrät mot kantlinjen mellan B och C.

Vi visar att dessa villkor är uppfyllda.

1. Avståndet mellan A och B är

$$\sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$$

   Avståndet mellan B och C är

$$\sqrt{\bigl(1-(-3)\bigr)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

2. För att visa att kantlinjerna är vinkelräta bestämmer vi ekvationer för kantlinjerna i formen

$$y = k_1 x + m_1 \quad \text{och} \quad y = k_2 x + m_2.$$

   Linjerna är vinkelräta om

$$k_1 k_2 = -1. \tag{$*$}$$

   Linjen genom punkterna A och B har lutningen

$$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{2-1} = -4.$$

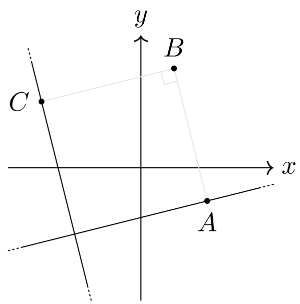
Linjen genom punkterna B och C har lutningen

$$k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-2}{1-(-3)} = \tfrac{1}{4}.$$

Alltså är $k_1 \cdot k_2 = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$, vilket visar att kantlinjerna är vinkelräta.

Den fjärde hörnpunkten får vi som skärningspunkt mellan

1. kantlinjen som är parallell med AB och går genom punkten C, och
2. kantlinjen som är parallell med BC och går genom punkten A.



Vi bestämmer först ekvationerna för dessa kantlinjer

1. Eftersom linjen genom A och B har lutningen -4 har den parallella kantlinjen genom C ekvationen

$$y = -4x + m.$$

Punkten C ligger på kantlinjen och uppfyller därför linjens ekvation

$$2 = -4 \cdot (-3) + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -10.$$

Kantlinjens ekvation är alltså $y = -4x - 10$.

2. Eftersom linjen genom B och C har lutning $\frac{1}{4}$ har den parallella kantlinjen genom A ekvationen

$$y = \tfrac{1}{4}x + m.$$

Punkten A ligger på kantlinjen och uppfyller därför linjens ekvation

$$-1 = \tfrac{1}{4} \cdot 2 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -\tfrac{3}{2}.$$

Kantlinjens ekvation är alltså $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.

Den fjärde hörnpunkten uppfyller båda dessa kantlinjers ekvationer

$$y = -4x - 10, \tag{1}$$
$$y = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}. \tag{2}$$

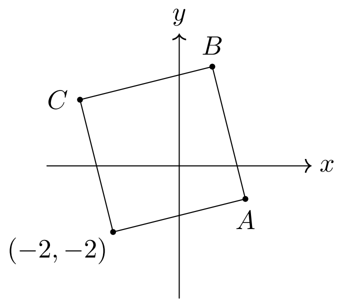
(1) − (2) ger

$$0 = -\tfrac{17}{4}x - \tfrac{17}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2.$$

Detta insatt i (1) ger

$$y = -4 \cdot (-2) - 10 = -2.$$

Den fjärde hörnpunkten är alltså $(-2, -2)$.



P.2.49 För vilka värden på k är linjen $2x + ky = 3$

a) vinkelrät mot linjen $4x + y = 1$?

b) parallell med linjen $4x + y = 1$?

a) Vi skriver de två linjerna i standardform

$$y = -\tfrac{2}{k}x + \tfrac{3}{k}, \tag{1}$$
$$y = -4x + 1, \tag{2}$$

förutsatt att $k \neq 0$. De två linjerna är vinkelräta om produkten av deras lutningar är -1, d.v.s.

$$-\tfrac{2}{k} \cdot (-4) = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = -8.$$

Om $k = 0$ är den första linjen lodrät och inte vinkelrät mot $4x + y = 1$.

b) De två linjerna är parallella om de har samma lutning, d.v.s. (om $k \neq 0$)

$$-\tfrac{2}{k} = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \tfrac{1}{2}.$$

Om $k = 0$ är linjerna inte parallella.

Inledande kurs i matematik, avsnitt P.3

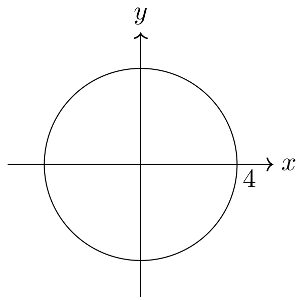
P.3.1 Bestäm en ekvation för cirkeln med mittpunkt i $(0, 0)$ och radie 4.

En cirkel med mittpunkt i (x_c, y_c) och radie r har ekvationen

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2.$$

I vårt fall är $x_c = y_c = 0$ och $r = 4$, vilket ger ekvationen

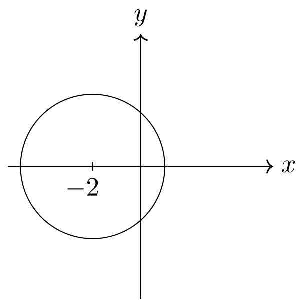
$$x^2 + y^2 = 16.$$



P.3.3 Bestäm en ekvation för cirkeln med mittpunkt i $(-2, 0)$ och radie 3.

Standardekvationen för cirkeln är

$$\begin{aligned} &\bigl(x - (-2)\bigr)^2 + \bigl(y - 0\bigr)^2 = 3^2 \\ \Leftrightarrow \qquad &(x + 2)^2 + y^2 = 9. \end{aligned}$$



P.3.5 Bestäm mittpunkt och radie till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x = 3$.

Vi vill skriva om cirkelns ekvation i standardform och därefter direkt kunna avläsa mittpunkt och radie. Med standardform menar vi

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2,$$

där (x_c, y_c) är cirkelns mittpunkt och r är dess radie.

Med hjälp av kvadratkompletteringsformeln

$$x^2 + px = \bigl(x + \tfrac{p}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{p}{2}\bigr)^2$$

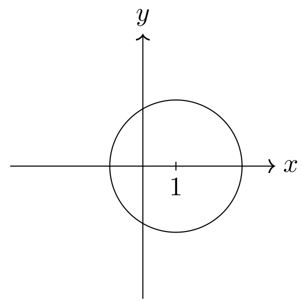
kan vi samla alla x i en kvadratterm,

$$x^2 - 2x = \bigl(x + \tfrac{-2}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{-2}{2}\bigr)^2 = (x - 1)^2 - 1.$$

Cirkelns ekvation kan alltså skrivas

$$\begin{aligned} &(x - 1)^2 - 1 + y^2 = 3 \\ \Leftrightarrow \qquad &(x - 1)^2 + y^2 = 2^2. \end{aligned}$$

Nu kan vi avläsa cirkelns mittpunkt $(1, 0)$ och radie 2.



P.3.7 Bestäm mittpunkt och radie till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$.

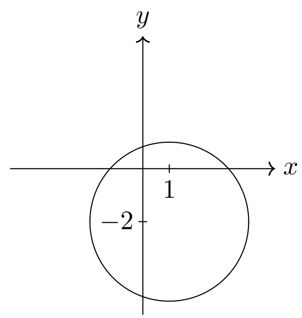
Vi skriver om cirkelns ekvation i standardform genom att kvadratkomplettera x- och y-termerna,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= (x - 1)^2 - 1, \\ y^2 + 4y &= (y + 2)^2 - 4. \end{aligned}$$

Alltså är cirkelns ekvation

$$\begin{aligned} &(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 4 \\ \Leftrightarrow \qquad &(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 = 3^2. \end{aligned}$$

Vi kan nu avläsa att cirkelns mittpunkt är $(1, -2)$ och att dess radie är 3.



P.3.9 Beskriv området som bestäms av olikheten $x^2 + y^2 > 1$.

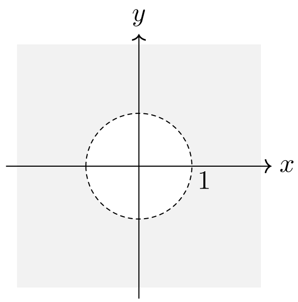
En punkt (x, y) tillhör området om den uppfyller olikheten

$$x^2 + y^2 > 1. \tag{$*$}$$

Om vi betraktar de punkter (x, y) som *inte* uppfyller olikheten så uppfyller de istället den omvända olikheten

$$x^2 + y^2 \leq 1. \tag{$\dagger$}$$

Vi vet att mängden som svarar mot (†) är en disk med mittpunkt i origo och radie 1. De punkter som uppfyller ($*$) är därför alla punkter utanför denna disk.



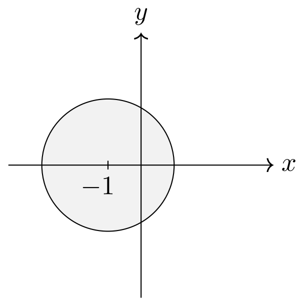
Vi har ritat cirkeln streckad eftersom den inte tillhör det gråa området.

P.3.11 Beskriv området som bestäms av olikheten $(x + 1)^2 + y^2 \leq 4$.

Olikheten kan skrivas som

$$\big(x - (-1)\big)^2 + (y - 0)^2 \leq 2^2,$$

och då ser vi direkt att området består av alla punkter innanför (och på) cirkeln med mittpunkt i $(-1, 0)$ och radie 2.

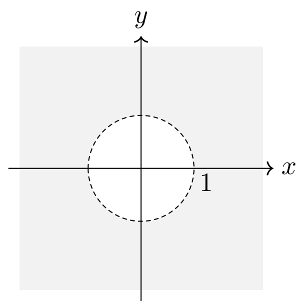


Att cirkeln är heldragen betyder att punkter på cirkeln också tillhör det gråa området.

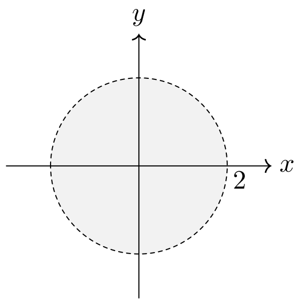
P.3.13 Beskriv området som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 > 1$ och $x^2 + y^2 < 4$.

Området består av alla punkter (x, y) som uppfyller båda olikheterna.

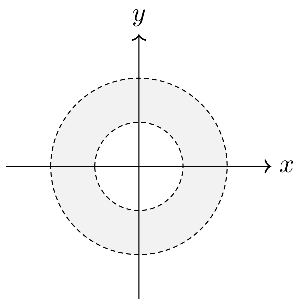
De punkter som uppfyller den första olikheten $x^2 + y^2 > 1$ ligger alla utanför enhetscirkeln.



De punkter som uppfyller den andra olikheten $x^2 + y^2 < 4$ ligger alla innanför cirkeln med mittpunkt i origo och radie 2.



För att en punkt ska uppfylla båda olikheterna måste den alltså ligga mellan enhetscirkeln och cirkeln med radie 2.



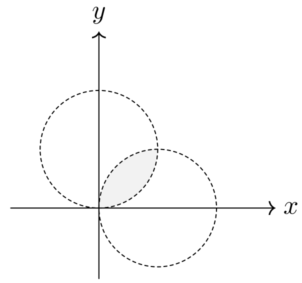
P.3.15 Beskriv området som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 < 2x$ och $x^2 + y^2 < 2y$.

Vi skriver först om de två olikheterna i standardform med hjälp av kvadratkomplettering,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= (x-1)^2 - 1 \\ y^2 - 2y &= (y-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 &< 1, \qquad (1) \\ x^2 + (y-1)^2 &< 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

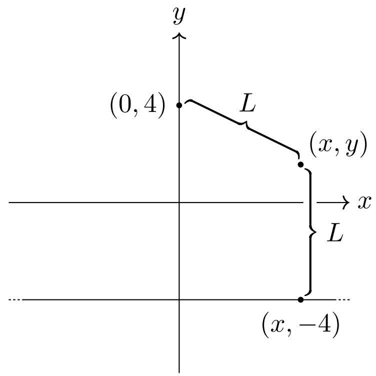


Olikhet (1) ger alla punkter som ligger innanför cirkeln med mittpunkt i $(1, 0)$ och radie 1, medan olikhet (2) ger alla punkter som ligger innanför cirkeln med mittpunkt i $(0, 1)$ och radie 1.

För att en punkt ska uppfylla båda olikheterna måste den ligga innanför båda cirklarna.

P.3.21 Bestäm ekvationen för den parabel som har brännpunkt i $(0, 4)$ och styrlinjen $y = -4$.

En punkt (x, y) ligger på parabeln om dess avstånd till brännpunkten är lika med dess avstånd till styrlinjen.



För att (x, y) ska tillhöra parabeln måste alltså

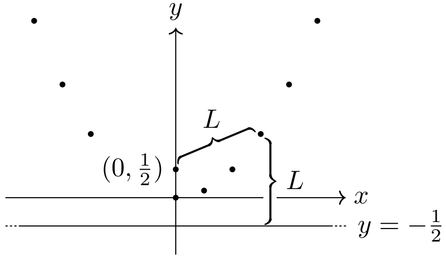
$$(x-0)^2 + (y-4)^2 = (x-x)^2 + \big(y-(-4)\big)^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 - 8y + 16 = 0^2 + y^2 + 8y + 16 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \tfrac{1}{16}x^2.$$

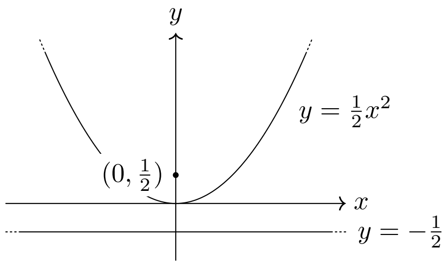
P.3.25 Bestäm brännpunkt och styrlinje till parabeln $y = x^2/2$, och skissera parabeln, brännpunkten och styrlinjen.

En allmän tumregel för en parabel med ekvationen $y = x^2/4p$ är att den har brännpunkt i $(0, p)$ och styrlinje $y = -p$.

I vårt fall är $p = \frac{1}{2}$, och därmed är brännpunkten $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ och styrlinjen är $y = -\frac{1}{2}$. För att skissera parabeln kan man välja några punkter som ligger på lika avstånd från brännpunkten och stylinjen,



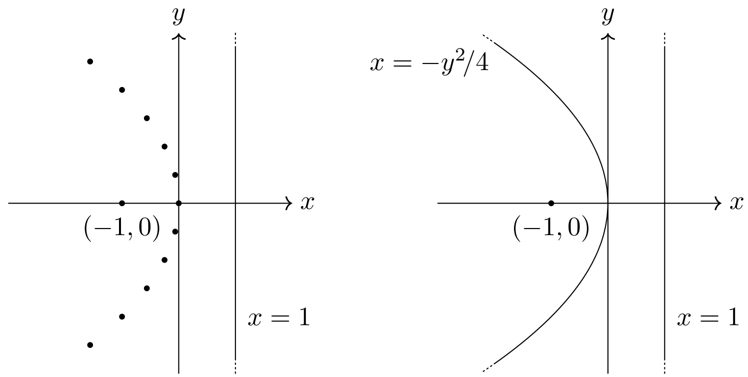
och sedan förbinda dessa punkter med en kurva.



P.3.27 Bestäm brännpunkt och styrlinje till parabeln $x = -y^2/4$, och skissera parabeln, brännpunkten och styrlinjen.

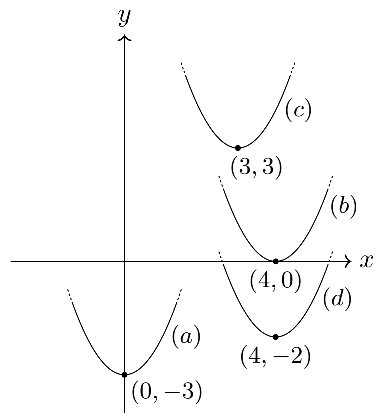
En parabel med ekvationen $x = y^2/4p$ har brännpunkt i $(p, 0)$ och styrlinje $x = -p$. Detta följer direkt genom att ge x och y ombytta roller i ekvationen $y = x^2/4p$.

I vårt fall är $p = -1$, och brännpunkten är $(-1, 0)$ och styrlinjen är $x = 1$. Vi ritar ut några punkter som har samma avstånd till brännpunkten som till styrlinjen, och förbinder punkterna med en kurva.

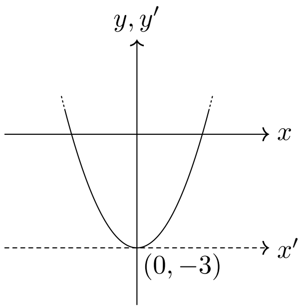


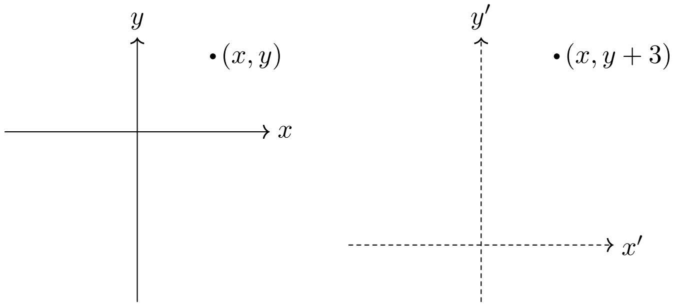
P.3.29 Figuren till höger visar grafen till $y = x^2$ i fyra translaterade versioner.

Bestäm ekvationerna för dessa fyra parabler.



a) Vi använder två koordinatsystem.
Dels det ursprungliga x, y-systemet, dels ett x', y'-system som följt med parabeln i translationen. Eftersom x', y'-systemet translaterats tillsammans med parabeln ges parabeln av ekvationen $y' = {x'}^2$ i x', y'-systemet.
För att uttrycka parabelns ekvation i x, y-systemet behöver vi ett samband mellan de två systemen. En punkt som har koordinater (x, y) i det ursprungliga systemet har i x', y'-systemet koordinater $(x, y+3)$.





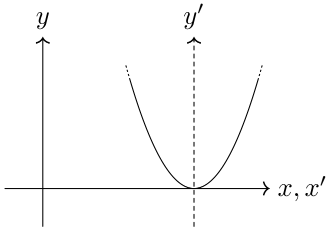
Alltså är

$$x' = x,$$
$$y' = y + 3.$$

Den translaterade parabelns ekvation är

$$y + 3 = x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x^2 - 3.$$

b) På samma sätt som i a-uppgiften inför vi ett x', y'-system som följt med translationen. Sambandet mellan x, y- och x', y'-systemet är

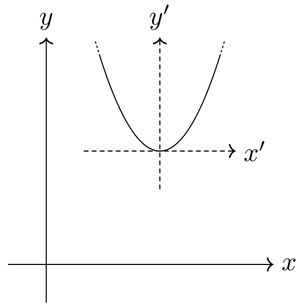


$$x' = x - 4$$
$$y' = y$$

och den translaterade parabelns ekvation är

$$y' = {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = (x-4)^2.$$

c) För c-parabeln inför vi ett koordinatsystem som translaterats 3 enheter åt höger och 3 enheter uppåt. Vi har sambandet

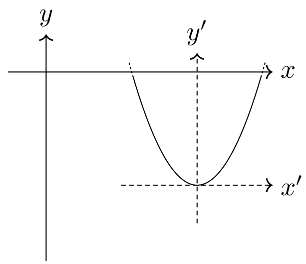


$$x' = x - 3,$$
$$y' = y - 3,$$

mellan de två systemen. Parabelns ekvation blir

$$y' = {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y - 3 = (x-3)^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad y = (x-3)^2 + 3.$$

d) Vi inför ett nytt koordinatsystem som translaterats dels 4 enheter åt höger, dels 2 enheter neråt. Sambandet mellan de två koordinatsystemen är



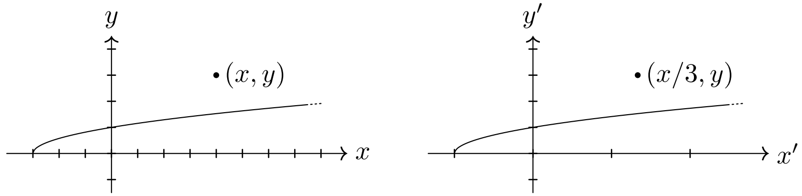
$$x' = x - 4,$$
$$y' = y + 2,$$

vilket ger att d-parabeln har ekvationen

$$y' = {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y + 2 = (x-4)^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad y = (x-4)^2 - 2.$$

P.3.31 Bestäm ekvationen för grafen till $y = \sqrt{x+1}$ efter att horisontella avstånd multiplicerats med 3.

För den omskalade kvadratrotskurvan inför vi ett nytt x', y'-koordinatsystem där den horisontella skalan expanderats med en faktor 3 så att den nya kvadratrotskurvan har ekvationen $y' = \sqrt{x'+1}$.



Sambandet mellan x, y- och x', y'-koordinater är att en punkt som har x, y-koordinaten (x, y) har i x', y'-systemet koordinaten $(x/3, y)$, d.v.s.

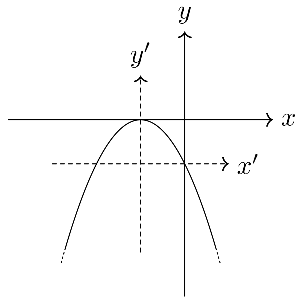
$$\begin{aligned} x' &= x/3, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Den expanderande kurvan har alltså följande ekvation i x, y-systemet

$$y' = \sqrt{x'+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \sqrt{x/3+1}.$$

P.3.35 Bestäm ekvationen för den graf som fås då $y = 1 - x^2$ translateras en enhet neråt och en enhet åt vänster.

Vi inför ett koordinatsystem som följer med den translaterade kurvan.



I x', y'-koordinater har kurvan fortfarande ekvationen

$$y' = 1 - x'^2.$$

Sambandet mellan de två koordinatsystemen är

$$\begin{aligned} x' &= x+1, \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

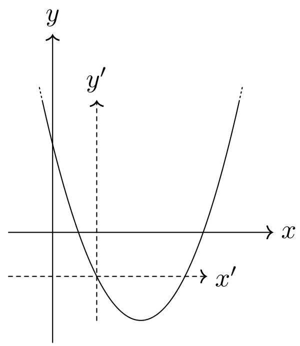
I x, y-koordinater har alltså kurvan ekvationen

$$y' = 1 - x'^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y+1 = 1-(x+1)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -(x+1)^2.$$

P.3.37 Bestäm ekvationen för den graf som fås då $y = (x-1)^2 - 1$ translateras en enhet neråt och en enhet åt höger.

Om vi inför ett koordinatsystem som i figuren till höger, så har den translaterade kurvan ekvationen

$$y' = (x'-1)^2 - 1.$$



Sambandet mellan de två systemen,

$$\begin{aligned} x' &= x - 1, \\ y' &= y + 1, \end{aligned}$$

ger att kurvans ekvation i x, y-koordinater blir

$$\begin{aligned} & y' = (x'-1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y + 1 = (x-1-1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y = (x-2)^2 - 2. \end{aligned}$$

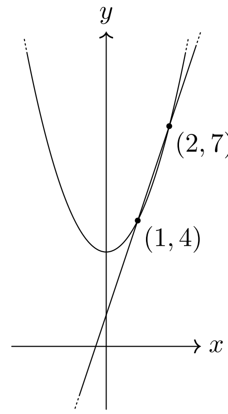
P.3.39 Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $y = x^2 + 3$ och $y = 3x + 1$.

En punkt är en skärningspunkt om den ligger på båda kurvorna, d.v.s. uppfyller båda kurvornas ekvationer

$$y = x^2 + 3, \qquad (1)$$
$$y = 3x + 1. \qquad (2)$$

(2) insatt i (1) ger

$$\begin{aligned} & 3x + 1 = x^2 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & x_\pm = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases} . \end{aligned}$$



Från (2) får vi de y-värden som svarar mot de två x-värdena

$$y_+ = 3x_+ + 1 = 7 \quad \text{och} \quad y_- = 3x_- + 1 = 4.$$

Skärningspunkterna är alltså $(1, 4)$ och $(2, 7)$.

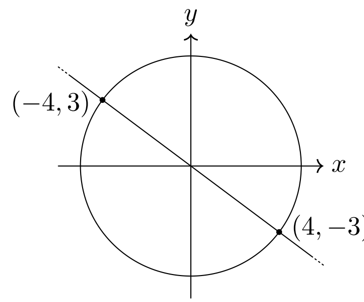
P.3.41 Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $x^2 + y^2 = 25$ och $3x + 4y = 0$.

Skärningspunkterna ska uppfylla båda kurvornas ekvationer,

$$x^2 + y^2 = 25, \qquad (1)$$
$$3x + 4y = 0. \qquad (2)$$

Från (2) löser vi ut y, $y = -\frac{3}{4}x$ och stoppar in i (1),

$$\begin{aligned} & x^2 + \left(-\tfrac{3}{4}x\right)^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{25}{16}x^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & x_\pm = \pm 4. \end{aligned}$$



Från $y = -\frac{3}{4}x$ får vi motsvarande y-värden,

$$y_+ = -3 \quad \text{och} \quad y_- = +3.$$

Skärningspunkterna är därmed $(4, -3)$ och $(-4, 3)$.

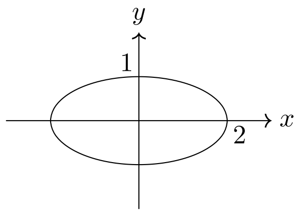
P.3.43 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Vi ser att kurvan är i formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där $a = 2$ och $b = 1$, vilket betyder att kurvan är en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 2 och 1.



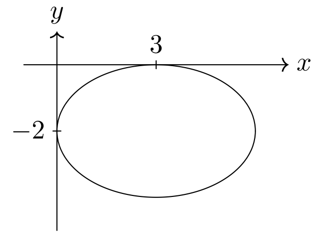
P.3.45 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Uttrycket påminner om en ellips; en summa av två kvadrater är lika med 1. Hade ekvationen istället varit

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

skulle vi haft en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 3 och 2. I vårt fall är denna ellips translaterad med tre enheter åt höger och två enheter neråt.



P.3.47 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

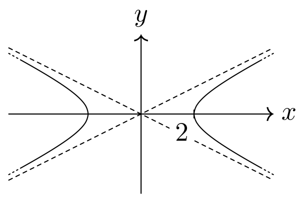
$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

En ekvation i formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

är en hyperbel med asymptoter $y = \pm\frac{b}{a}x$ (linjer som hyperbeln närmar sig då $x \to \pm\infty$) och skärningspunkter $(\pm a, 0)$ med x-axeln.

I vårt fall ser vi att $a = 2$ och $b = 1$. Kurvan är alltså en hyperbel med utseendet



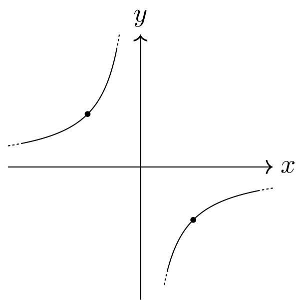
P.3.49 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen $xy = -4$.

Den kurva som ges av ekvationen $xy = 1$ är en hyperbel som är roterad 45° moturs kring origo, går genom punkterna $(1,1)$, $(-1,-1)$ och har koordinataxlarna som asymptoter.

Vi skriver om vår ekvation till

$$\left(\frac{x}{-2}\right)\cdot\left(\frac{y}{2}\right) = 1.$$

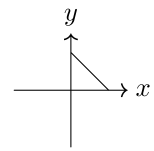
Då ser vi att i koordinatsystemet $x' = -\frac{1}{2}x$, $y' = \frac{1}{2}y$ är vår kurva en roterad hyperbel med koordinataxlarna som asymptoter och går genom punkterna $(-2,2)$ och $(2,-2)$.



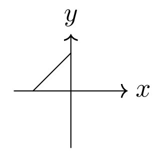
P.3.53 Skissera grafen till $|x| + |y| = 1$.

För att kunna skriva kurvans ekvation utan beloppstecken måste vi undersöka fyra fall.

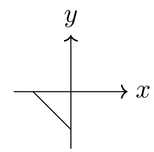
1. $x \geq 0, y \geq 0$:
   I första kvadranten är $|x| = x$ och $|y| = y$, så ekvationen blir $x + y = 1$, vilket är en rät linje som skär x-axeln i $(1,0)$ och y-axeln i $(0,1)$.



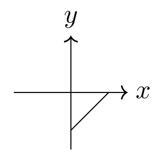
2. $x \leq 0, y \geq 0$:
   I den andra kvadranten är $x \leq 0$ och då är $|x| = -x$ medan $|y| = y$. Ekvationen blir därför $-x + y = 1$, vilket är en rät linje som skär x-axeln i $(-1,0)$ och y-axeln i $(0,1)$.



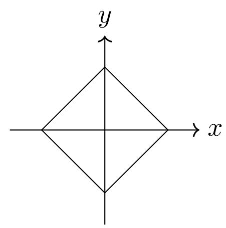
3. $x \leq 0, y \leq 0$:
   I den tredje kvadranten är både x och y negativa varför $|x| = -x$ och $|y| = -y$. Ekvationen är $-x-y = 1$, vilket är en rät linje som skär x-axeln i $(-1,0)$ och y-axeln i $(0,-1)$.



4. $x \geq 0, y \leq 0$:
   Slutligen, i den fjärde kvadranten är $x = |x|$ och $|y| = -y$. Ekvationen blir $x - y = 1$. Detta är en rät linje som skär x-axeln i $(1,0)$ och y-axeln i $(0,-1)$.



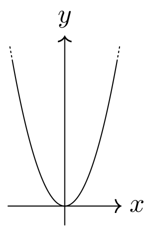
Sammantaget har ekvationen $|x| + |y| = 1$ grafen



Inledande kurs i matematik, avsnitt P.4

P.4.1 Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $f(x) = 1 + x^2$.

Uttrycket $1 + x^2$ är definierat för alla x, vilket betyder att f:s definitionsmängd är $(-\infty, \infty)$. Om vi ritar upp grafen till funktionen $x \mapsto x^2$,



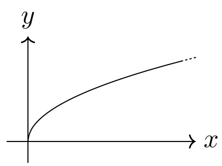
så ser vi att $x \mapsto x^2$ har värdemängden $[0, \infty)$. Funktionen f har en graf som ovanstående förskjuten en enhet uppåt. f:s värdemängd är alltså $[1, \infty)$.

P.4.3 Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $G(x) = \sqrt{8 - 2x}$.

För att $\sqrt{8 - 2x}$ ska vara definierad måste uttrycket under kvadratroten vara icke-negativ, d.v.s.

$$8 - 2x \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq 4.$$

Funktionen G:s definitionsmängd är alltså $(-\infty, 4]$. Ritar vi upp funktionen $x \mapsto \sqrt{x}$,



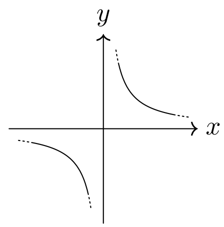
så ser vi att den har värdemängden $[0, \infty)$. Eftersom funktionen G har utseendet $\sqrt{\text{någonting}}$ där "någonting" antar alla icke-negativa värden, är G:s värdemängd också $[0, \infty)$.

P.4.4 Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $F(x) = 1/(x - 1)$.

Funktionen F är definierad överallt utom där nämnaren är noll, d.v.s. överallt utom där

$$x - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.$$

Definitionsmängden är därmed de två intervallen $(-\infty, 1)$ och $(1, \infty)$. Funktionen $x \mapsto 1/x$ har grafen



och värdemängden $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

F har också utseendet $F(x) = \frac{1}{\text{någonting}}$ där "någonting" antar alla värden utom noll. F:s värdemängd är därför de två intervallen $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

P.4.13 Vilka symmetrier har grafen till

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}?$$

Speciellt, är f jämn eller udda?

Vi undersöker först om f är jämn eller udda.

1. Om vi har att $f(-x) = f(x)$ för alla x, då är f en jämn funktion.
2. Om vi har att $f(-x) = -f(x)$ för alla x, då är f en udda funktion.

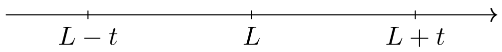
Vi har att

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x).$$

Alltså är f udda.

Funktionen f har en symmetri kring värdet $x = L$ om f antar samma värde (eller samma värde med motsatt tecken) i symmetriska punkter kring $x = L$.

Om $x = L+t$ är en punkt till höger om $x = L$, då är $x = L-t$ den symmetriska punkten till vänster om $x = L$.



Vi ska alltså undersöka om det finns något L så att

$$f(L+t) = f(L-t) \quad \text{för alla } t,$$

eller

$$f(L+t) = -f(L-t) \quad \text{för alla } t.$$

Vi kontrollerar om något sådant L finns.

1. Vi undersöker om

$$\begin{aligned} f(L+t) = \frac{L+t}{(L+t)^2-1} &= f(L-t) = \frac{L-t}{(L-t)^2-1} \\ \Leftrightarrow \qquad (L+t)\big((L-t)^2-1\big) &= (L-t)\big((L+t)^2-1\big) \\ \Leftrightarrow \qquad L^3 + Lt^2 - 2L^2t - L + L^2t + t^3 - 2Lt^2 - t & \\ &= L^3 + Lt^2 + 2L^2t - L - L^2t - t^3 - 2Lt + t. \end{aligned}$$

Vi samlar allt i ena ledet

$$2t^3 - 2(L^2-1)t = 0, \quad \text{för alla } t.$$

Detta polynom är *inte* lika med noll för alla t, oavsett hur vi väljer L. Alltså finns ingen symmetri av typen $f(L+t) = f(L-t)$.

2. Vi undersöker om

$$\begin{aligned} f(L+t) = \frac{L+t}{(L+t)^2-1} &= -f(L-t) = -\frac{L-t}{(L-t)^2-1} \\ \Leftrightarrow \qquad (L+t)\big((L-t)^2-1\big) &= -(L-t)\big((L+t)^2-1\big) \\ \Leftrightarrow \qquad L^3 + Lt^2 - 2L^2t - L + L^2t + t^3 - 2Lt^2 - t & \\ &= -L^3 - Lt^2 - 2L^2t + L + L^2t + t^3 + 2Lt - t. \end{aligned}$$

Vi samlar allt i ena ledet

$$-2L\,t^2 + 2L(L^2-1) = 0, \quad \text{för alla } t.$$

Ett polynom är identiskt noll omm (om och endast om) dess koefficienter alla är noll, d.v.s.

$$\begin{aligned} -2L &= 0 \\ 2L(L^2-1) &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad L = 0.$$

Funktionen har alltså endast en udda symmetri kring $L = 0$ (vilket vi redan visste).

P.4.14 Vilka symmetrier har grafen till

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}?$$

Speciellt, är f jämn eller udda?

Funktionen f är symmetrisk kring $x = L$ om

1. $f(L+t) = f(L-t), \quad$ för alla t, eller
2. $f(L+t) = -f(L-t), \quad$ för alla t.

Vi undersöker om och för vilka L dessa symmetrier inträffar.

1. Vi undersöker om

$$\begin{aligned} f(L+t) = \frac{1}{(L+t)^2-1} &= f(L-t) = \frac{1}{(L-t)^2-1} \\ \Leftrightarrow \qquad & (L+t)^2 - 1 = (L-t)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \qquad & L^2 + 2Lt + t^2 - 1 = L^2 - 2Lt + t^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \qquad & 4L\,t = 0, \quad \text{för alla } t. \end{aligned}$$

Detta polynom är identiskt noll om dess koefficienter är noll, d.v.s. $L = 0$. Funktionen är alltså jämn kring $x = 0$.

2. Vi undersöker om

$$\begin{aligned} f(L+t) = \frac{1}{(L+t)^2-1} &= -f(L-t) = -\frac{1}{(L-t)^2-1} \\ \Leftrightarrow \qquad & (L+t)^2 - 1 = -(L-t)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \qquad & L^2 + 2Lt + t^2 - 1 = -L^2 + 2Lt - t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \qquad & 2t^2 + 2(L^2 - 1) = 0, \quad \text{för alla } t. \end{aligned}$$

Detta polynom är inte identiskt noll oavsett hur L väljs. Alltså finns inga udda symmetrier för f.

Från punkt 1 har vi att f är en jämn funktion.

P.4.19 Vilka symmetrier har grafen till $f(x) = \left|x^3\right|$? Speciellt, är f jämn eller udda?

Vi ska undersöka om det finns något $x = L$ så att

1. $f(L+t) = f(L-t), \quad$ för alla t, eller
2. $f(L+t) = -f(L-t), \quad$ för alla t.

Om punkt 1 är uppfylld är f en jämn funktion kring $x = L$. Om punkt 2 är uppfylld är f en udda funktion kring $x = L$. Vi undersöker om sådant L finns.

1. Vi har

$$f(L+t) = \left|(L+t)^3\right| = f(L-t) = \left|(L-t)^3\right|.$$

Vi ser direkt att om $t = -L$ då är $\left|(L+t)^3\right| = 0$ medan $\left|(L-t)^3\right| = 8L^3$. För att båda uttryck ska vara lika måste $L = 0$. Även med detta val av L återstår att undersöka om $f(L+t) = f(L-t)$ för övriga värden på t. Vi har

$$f(0-t) = \left|(-t)^3\right| = \left|-t^3\right| = \left|t^3\right| = f(0+t).$$

Med andra ord är $f(L-t) = f(L+t)$ omm $L = 0$.

2. Vi har att

$$f(L+t) = \left|(L+t)^3\right| = -f(L-t) = -\left|(L-t)^3\right|.$$

Uttrycket $\left|(L+t)^3\right|$ är alltid icke-negativt medan uttrycket $-\left|(L-t)^3\right|$ alltid är icke-positivt. Den enda möjligheten att de två uttrycken skulle vara lika vore om de båda är 0 för alla t, men det är de inte. Funktionen saknar alltså udda symmetrier.

Från punkt 1 ser vi att f är en jämn funktion.

P.4.20 Vilka symmetrier har grafen till $f(x) = |x+1|$? Speciellt, är f jämn eller udda?

Vi har att undersöka om det finns något $x = L$ så att

1. $f(L+t) = f(L-t), \quad$ för alla t, eller

2. $f(L+t) = -f(L-t), \quad$ för alla t.

Vi undersöker dessa två fall.

1. Vi har att

$$f(L+t) = |L+t+1| = f(L-t) = |L-t+1|.$$

Om $t = -1 - L$ då är $|L+t+1| = 0$ och $|L-t+1| = |2(L+1)|$. För att vi överhuvudtaget ska ha någon symmetri måste alltså $L+1 = 0$ eller $L = -1$.

Om $L = -1$ då är

$$f(-1+t) = \big|-1+t+1\big| = |t|$$
$$f(-1-t) = \big|-1-t+1\big| = |-t| = |t|.$$

Alltså är f symmetrisk kring $L = -1$.

2. Vi har att

$$f(L+t) = |L+t+1| = -f(L-t) = -|L-t+1|$$
$$\Leftrightarrow \qquad |L+t+1| + |L-t+1| = 0, \quad \text{för alla } t.$$

Eftersom vänsterledet är en summa av två icke-negativa tal måste

$$|L+t+1| = |L-t+1| = 0, \quad \text{för alla } t,$$

vilket inte inträffar, oavsett L:s värde. Funktionen saknar alltså udda symmetrier.

Från punkterna ovan ser vi att f är varken jämn eller udda (inga symmetrier kring $L = 0$).

P.4.22 Vilka symmetrier har grafen till $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$? Speciellt, är f jämn eller udda?

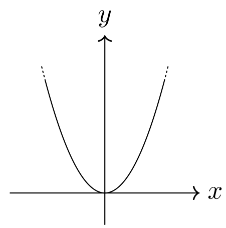
Vi kan skriva f som

$$f(x) = |x-1|,$$

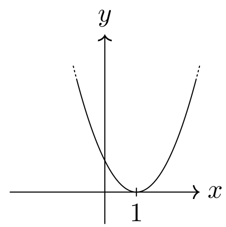
(se sidan 8 i kursboken) och då blir uppgiften nästan identisk med P.4.20. Samma typ av undersökningar ger att f har en jämn symmetri kring $L = 1$ och är varken jämn eller udda.

P.4.26 Skissera grafen till $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

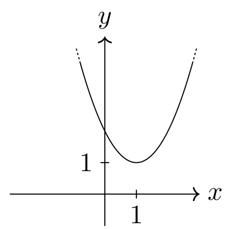
Om vi börjar med funktionen $x \mapsto x^2$ så har den grafen,



Förskjuter vi grafen en enhet åt höger får vi grafen till $x \mapsto (x-1)^2$.

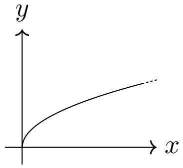


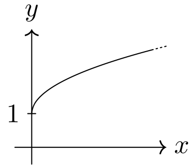
Slutligen ger en förskjutning med en enhet uppåt grafen till $x \mapsto (x-1)^2 + 1$.



P.4.29 Skissera grafen till $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

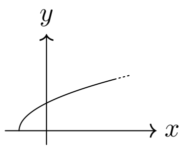
Grafen till $x \mapsto \sqrt{x}$ har utseendet i figuren till vänster. Genom att förskjuta grafen en enhet uppåt får vi grafen till $f(x) = \sqrt{x} + 1$.





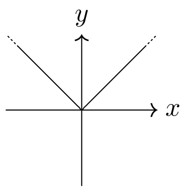
P.4.30 Skissera grafen till $f(x) = \sqrt{x+1}$.

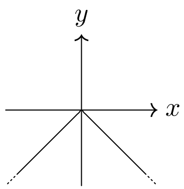
Vi får grafen till f genom att förskjuta grafen till $x \mapsto \sqrt{x}$ en enhet åt vänster.



P.4.31 Skissera grafen till $f(x) = -|x|$.

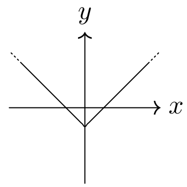
Funktionen $x \mapsto |x|$ har grafen i figuren till vänster. Speglar vi grafen i x-axeln får vi grafen till $f(x) = -|x|$.





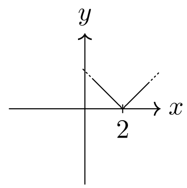
P.4.32 Skissera grafen till $f(x) = |x| - 1$.

Vi får grafen till f genom att förskjuta grafen till $x \mapsto |x|$ en enhet neråt.



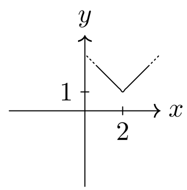
P.4.33 Skissera grafen till $f(x) = |x - 2|$.

Om vi förskjuter grafen till $x \mapsto |x|$ två enheter åt höger får vi grafen till $x \mapsto |x - 2|$.



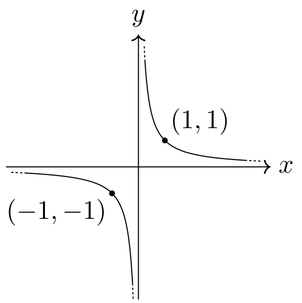
P.4.34 Skissera grafen till $f(x) = 1 + |x - 2|$.

Grafen till $x \mapsto |x - 2|$ får vi genom att förskjuta grafen till $x \mapsto |x|$ två enheter åt höger. Genom att addera 1, $x \mapsto |x - 2| + 1$, förskjuts grafen ytterligare en enhet uppåt.

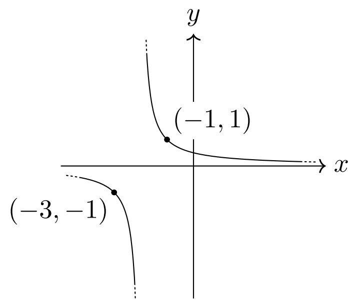


P.4.35 Skissera grafen till $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$.

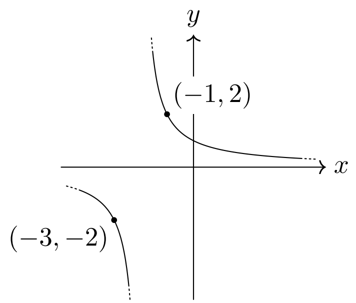
Funktionen $x \mapsto 1/x$ har utseendet



Förskjuter vi grafen två enheter till vänster får vi grafen till $x \mapsto \frac{1}{x+2}$.



Multiplikation med 2 ger att alla y-koordinater multipliceras med faktorn 2. Grafen får då utseendet

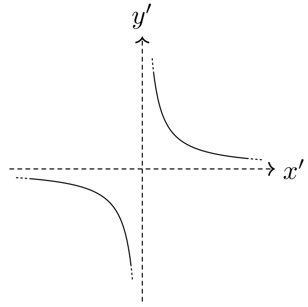


P.4.37 Skissera grafen till $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

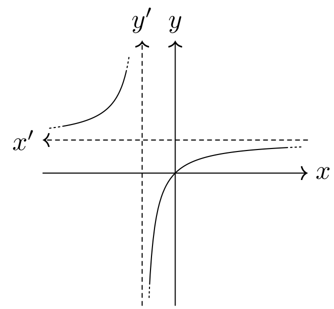
Vi skriver om funktionen något

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Om vi inför ett nytt koordinatsystem (x', y') där $x' = -x - 1$ och $y' = y - 1$. Då ges f:s graf av ekvationen $y' = 1/x'$.

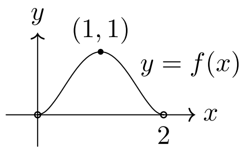


I det ursprungliga koordinatsystemet blir detta

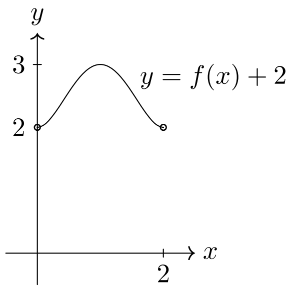


P.4.39 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto f(x)+2$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



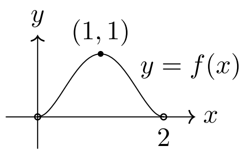
När vi adderar 2 till högerledet i $y = f(x)$ så förskjuter vi f:s graf med två enheter uppåt.



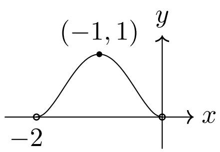
Definitionsmängden till $x \mapsto f(x)+2$ är fortfarande $[0,2]$ medan värdemängden förskjuts två enheter uppåt till $[2,3]$.

P.4.41 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto f(x+2)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Om vi ersätter x med $x+2$ i $y = f(x)$ så förskjuts grafen två enheter åt vänster. Funktionen $x \mapsto f(x+2)$ har alltså grafen.

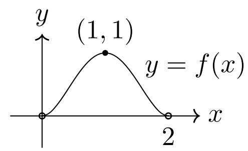


Eftersom $f(x)$ är definierad då $0 \le x \le 2$ så är $f(x+2)$ definierad då $0 \le x+2 \le 2$, d.v.s. då $-2 \le x \le 0$. Definitionsmängden är alltså $[-2,0]$.

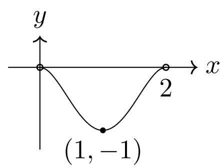
Eftersom funktionen är $x \mapsto f(\text{någonting})$ där ”någonting” antar värden i $[0,2]$ har $x \mapsto f(x+2)$ samma värdemängd som $f(x)$, d.v.s. $[0,1]$.

P.4.43 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$ samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto -f(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



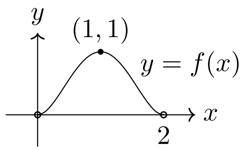
Med ett minustecken framför $f(x)$ speglas grafen i x-axeln. Funktionen $x \mapsto f(x)$ har alltså grafen.



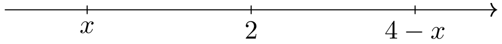
Där $x \mapsto f(x)$ är definierad är också $x \mapsto -f(x)$ definierad. Alltså har $x \mapsto -f(x)$ definitionsmängden $[0,2]$. Värdemängden till samma funktion är $[-1,0]$ eftersom när $f(x)$ antar värdet b så antar $-f(x)$ värdet $-b$.

P.4.45 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

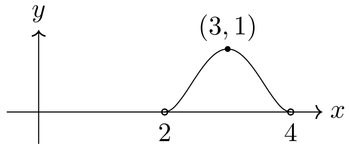
Skissera funktionen $x \mapsto f(4-x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Övergången från x till $4-x$ blir tydligare om vi skriver $x = 2-(2-x)$ och $4-x = 2+(2-x)$. Vi ser då att x och $4-x$ är varandras spegelbilder kring $x=2$.



Grafen till $x \mapsto f(4-x)$ blir alltså spegelbilden av grafen till f kring $x=2$.

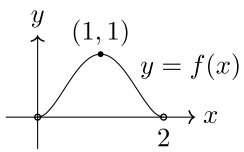


Funktionen $x \mapsto f(4-x)$ är definierad för $0 \le 4-x \le 2$ eller $2 \le x \le 4$. Definitionsmängden är alltså $[2,4]$.

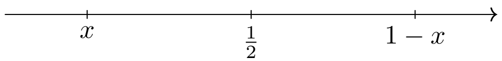
Eftersom $x \mapsto f(4-x)$ är $x \mapsto f(\text{någonting})$ där $0 \le$ "någonting" ≤ 2, har $x \mapsto f(4-x)$ samma värdemängd som $f(x)$, d.v.s. $[0,1]$.

P.4.46 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

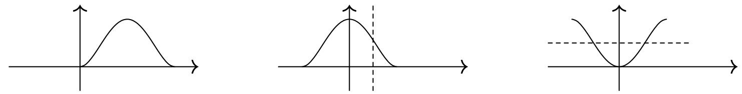
Skissera funktionen $x \mapsto 1-f(1-x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Uttrycket $1-x$ ersätter x med dess spegelbild kring $\frac{1}{2}$ (det ser vi genom att skriva $x = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x\right)$ och $1-x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)$).



Denna spegling har vi både i x- och y-led. $x \mapsto 1-f(1-x)$ har alltså grafen.



$x \mapsto f(x)$ $\qquad$ $x \mapsto f(1-x)$ $\qquad$ $x \mapsto 1-f(1-x)$

Funktionen $x \mapsto 1-f(1-x)$ är definierad för $0 \le 1-x \le 2$ eller $-1 \le x \le 1$. Definitionsmängden är alltså $[-1,1]$.

När $-1 \le x \le 1$ är

$$0 \le 1-x \le 2 \quad \text{och} \quad 0 \le f(1-x) \le 1.$$

Detta ger att

$$-1 \le -f(1-x) \le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \le 1-f(1-x) \le 1.$$

Alltså har $x \mapsto 1-f(1-x)$ värdemängden $[0,1]$.

Inledande kurs i matematik, avsnitt P.5

P.5.7 Om $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 3$, bestäm följande uttryck

a) $f \circ g(x)$, b) $g\big(f(0)\big)$,
c) $f\big(g(x)\big)$, d) $g \circ f(x)$,
e) $f \circ f(-5)$, f) $g\big(g(2)\big)$,
g) $f\big(f(x)\big)$, h) $g \circ g(x)$.

a) $f \circ g(0) = f\big(g(0)\big) = \{\, g(0) = 0^2 - 3 = -3 \,\} = f(-3) = -3 + 5 = 2$

b) $g\big(f(0)\big) = \{\, f(0) = 0 + 5 = 5 \,\} = g(5) = 5^2 - 3 = 22$

c) $f\big(g(x)\big) = f(x^2 - 3) = (x^2 - 3) + 5 = x^2 + 2$

d) $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(x + 5) = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 22$

e) $f \circ f(-5) = f\big(f(-5)\big) = \{\, f(-5) = -5 + 5 = 0 \,\} = f(0) = 0 + 5 = 5$

f) $g\big(g(2)\big) = \{\, g(2) = 2^2 - 3 = 1 \,\} = g(1) = 1^2 - 3 = -2$

g) $f\big(f(x)\big) = f(x + 5) = (x + 5) + 5 = x + 10$

h) $g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

P.5.9 Om $f(x) = 1/(1 - x)$ och $g(x) = \sqrt{x - 1}$, bestäm följande funktioner och deras definitionsmängder,

a) $f \circ f(x)$,
b) $f \circ g(x)$,
c) $g \circ f(x)$,
d) $g \circ g(x)$.

Vi ska först ta reda på definitionsmängd och värdemängd till f och g.

- Definitionsmängd till f

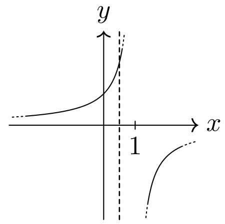
  Funktionen $f(x) = 1/(1 - x)$ är definierad överallt utom där nämnaren är noll, d.v.s. överallt utom i $x = 1$.

- Definitionsmängd till g

  Funktionen $g(x) = \sqrt{x - 1}$ är definierad överallt där $x - 1 \ge 0$, d.v.s. $x \ge 1$.

- Värdemängd till f

  Grafen till f är grafen till $x \mapsto 1/x$ speglad i $x = \frac{1}{2}$ ($x \mapsto 1 - x$ är en spegling i $x = \frac{1}{2}$), d.v.s.

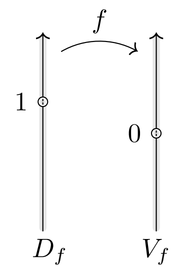
  

  Funktionen f har därför samma värdemängd som $x \mapsto 1/x$, d.v.s. alla värden utom 0.

- Värdemängd till g

  Funktionen g har utseendet $\sqrt{\cdots}$ där uttrycket under rottecknet varierar över de icke-negativa talen. Alltså har g samma värdemängd som $x \mapsto \sqrt{x}$, d.v.s. $[0, \infty)$.

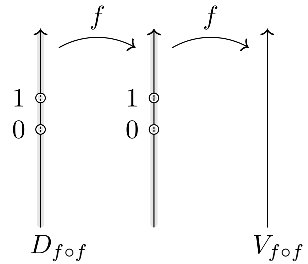
a) Vi börjar med att rita upp hur punkterna avbildas med f en gång.



Om vi nu ska applicera f ytterligare en gång måste vi undanta punkten 1 från V_f (f ej definierad i 1), vilket betyder att vi måste ta bort alla punkter i D_f som avbildas på värdet 1. De x som ger värdet 1 uppfyller

$$1 = f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$

Alltså

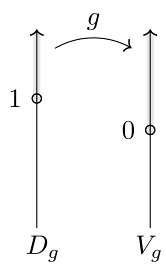


Definitionsmängden till $f \circ f$ är alltså alla punkter utom 0 och 1, eller skrivet med intervall $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Det analytiska uttrycket för $f \circ f$ blir

$$f \circ f(x) = f\bigl(f(x)\bigr) = f\Bigl(\frac{1}{1-x}\Bigr) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}.$$

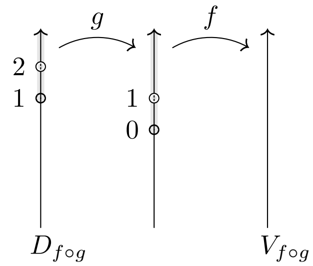
b) I sammansättningen $f \circ g$ utförs först funktionen g.



För att vi sedan ska kunna sammansätta med f får inte värdet 1 ingå i V_g, d.v.s. vi måste sortera bort de punkter i D_g som avbildas på värdet 1. Sådana punkter uppfyller

$$1 = g(x) = \sqrt{x-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2.$$

Alltså

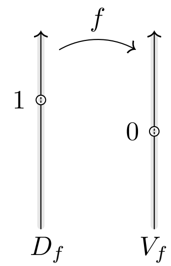


Vi kan alltså definiera $f \circ g$ på intervallen $[1, 2) \cup (2, \infty)$.

Det analytiska uttrycket för $f \circ g$ blir

$$f \circ g(x) = f\bigl(g(x)\bigr) = f\bigl(\sqrt{x-1}\bigr) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-1}}.$$

c) Först utförs funktionen f.

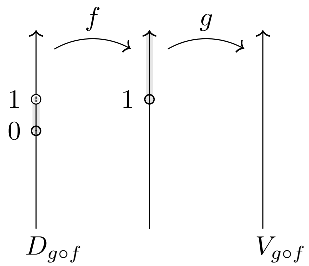


För att sedan kunna sammansätta med g får vi inte ha några värden i V_f mindre än 1 (i de punkterna är g inte definierad). Vi måste alltså ta bort de punkter i D_f som avbildas till värden mindre än 1, d.v.s. alla x sådana att

$$f(x) = \frac{1}{1-x} < 1.$$

Vi löser denna olikhet på samma sätt som i uppgift P.1.19 och får intervallen $(-\infty, 0)$ och $(1, \infty)$.

Alltså måste vi undanta alla punkter utom de mellan 0 och 1.

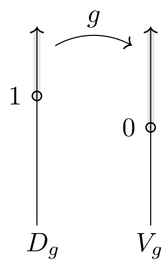


Definitionsmängden till $g \circ f$ är alltså $[0, 1)$.

Det analytiska uttrycket för $g \circ f$ blir

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

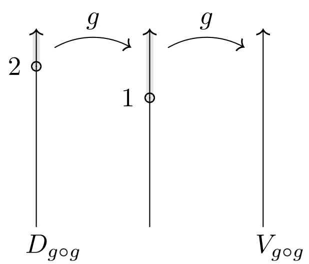
d) Funktionen g avbildar punkter enligt



För att vi ska kunna använda g igen krävs att inga värden i V_g är mindre än 1, d.v.s. vi måste plocka bort de punkter i D_g som avbildas på värden mindre än 1. Vi ska alltså ta bort de x som uppfyller

$$g(x) = \sqrt{x-1} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < 2.$$

Vi har därmed



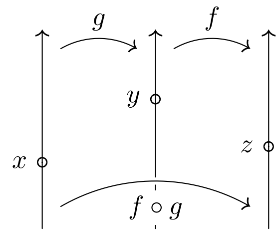
Definitionsmängden till $g \circ g$ är alltså $[2, \infty)$. Det analytiska uttrycket för $g \circ g$ blir

$$g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g\big(\sqrt{x-1}\,\big) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}.$$

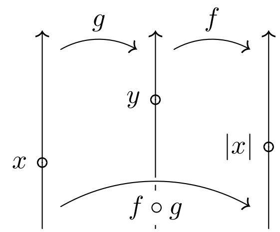
P.5.13 Bestäm vad som ska stå i den gråa luckan

$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
$\sqrt{x}$		$\lvert x\rvert$

Vi ritar upp hur de olika funktionerna avbildar en punkt.



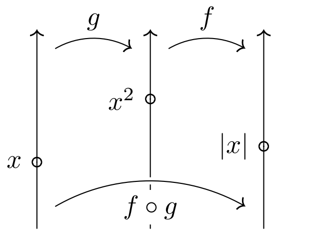
Eftersom vi vet att $f \circ g(x) = |x|$ så är $z = |x|$, och vi har förljande figur.



Vilket värde måste y har för att $f(y) = |x|$?

$$f(y) = \sqrt{y} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x^2.$$

Alltså har vi figuren

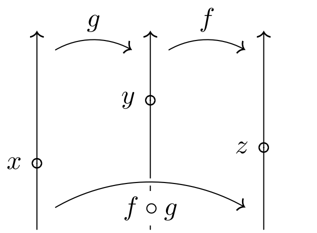


Nu ser vi att $g(x) = x^2$.

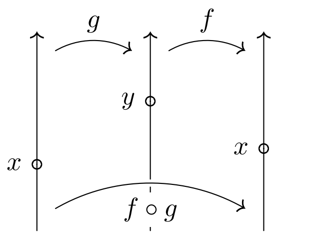
P.5.15 Bestäm vad som ska stå i den gråa luckan.

$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
$(x+1)/x$		x

Vi ritar upp hur f och $f \circ g$ avbildar en punkt x.



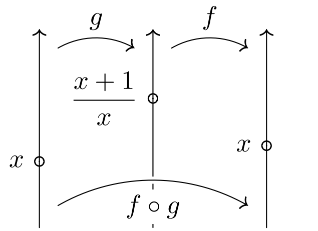
Eftersom $f \circ g(x) = x$ har vi att $z = x$.



Vad ska nu y vara för att $f(y) = x$?

$$f(y) = \frac{y+1}{y} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y + 1 = xy \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{1}{y-1}.$$

y ska alltså vara lika med $1/(y-1)$. Vi får figuren



Nu ser vi att $g(x) = 1/(x-1)$.

P.5.16 Bestäm vad som ska stå i den gråa luckan.

$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
	$x-1$	$1/x^2$

Vi vet att

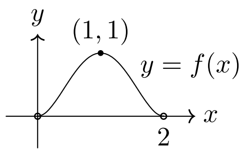
$$f \circ g(x) = 1/x^2 \quad \text{och} \quad f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-1).$$

Om vi kallar $y = x - 1$ så är $x = y + 1$ och

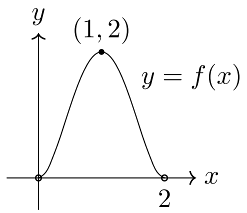
$$f(y) = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

P.5.19 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto 2f(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Genom att multiplicera $f(x)$ med 2 expanderar vi grafen med en faktor 2 i y-led.



Funktionen $x \mapsto 2f(x)$ är definierad överallt där f är definierad, d.v.s. definitionsmängden till $x \mapsto 2f(x)$ är $[0,2]$.

Eftersom vi har att

$$0 \le f(x) \le 1 \qquad \text{för } 0 \le x \le 2,$$

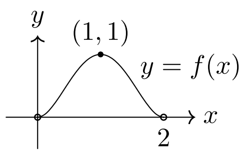
så är

$$0 \le 2f(x) \le 2 \qquad \text{för } 0 \le x \le 2.$$

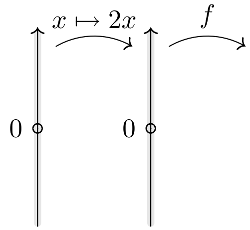
Funktionen $x \mapsto 2f(x)$ har alltså värdemängden $[0,2]$.

P.5.21 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto f(2x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

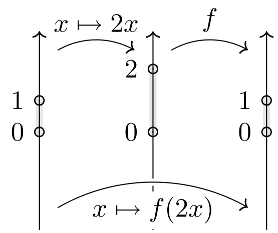


Funktionen $x \mapsto f(2x)$ kan ses som sammansatt av två funktioner, dels $x \mapsto 2x$ och dels $x \mapsto f(x)$,



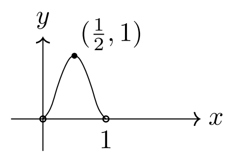
men för att vi ska kunna använda f i det sista steget får vi inte ha värden utanför intervallet $[0,2]$ efter funktionen $x \mapsto 2x$. Vi måste alltså ta bort alla punkter som avbildas med $x \mapsto 2x$ utanför $[0,2]$. Vi ska alltså bara behålla de x som uppfyller

$$0 \le 2x \le 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \le x \le 1.$$



Funktionen $x \mapsto f(2x)$ har alltså definitionsmängden $[0,1]$ och värdemängden $[0,1]$.

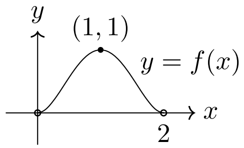
Den första funktionen $x \mapsto 2x$ innebär att vi expanderar intervallet $[0,1]$ till $[0,2]$ och sedan använder f. Grafen till $x \mapsto f(2x)$ blir alltså ihoptryckt till intervallet $[0,1]$ på x-axeln.



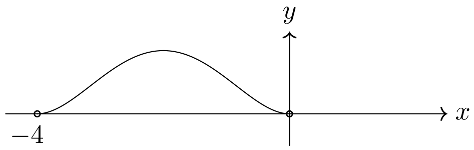
Anm. Denna lösning är kanske lite väl omständig, men lösningen illustrerar iallafall hur man kan dela upp en funktion i enklare delar och analysera dessa.

P.5.23 Funktionen f har definitionsmängden $[0, 2]$ och värdemängden $[0, 1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto 1 + f(-x/2)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

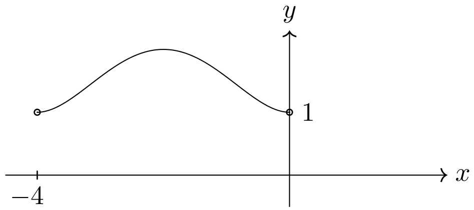


När vi ersätter x med $-x/2$ i $y = f(x)$ så förlängs grafen i x-led med en faktor 2 och minustecknet speglar grafen i y-axeln.



$x \mapsto f(-x/2)$

När vi sedan adderar 1 till $x \mapsto f(-x/2)$ så förskjuts grafen en enhet uppåt.



$x \mapsto 1 + f(-x/2)$

Funktionen är definierad för

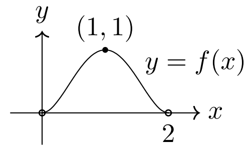
$$0 \le -x/2 \le 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad -4 \le x \le 0,$$

d.v.s. definitionsmängden är $[-4, 0]$.

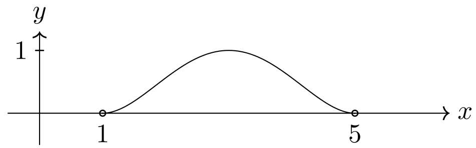
Eftersom vi vet att $0 \le f(\cdots) \le 1$ är $1 \le 1 + f(-x/2) \le 2$. Värdemängden är alltså $[1, 2]$.

P.5.24 Funktionen f har definitionsmängden $[0, 2]$ och värdemängden $[0, 1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto 2f\big((x-1)/2\big)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

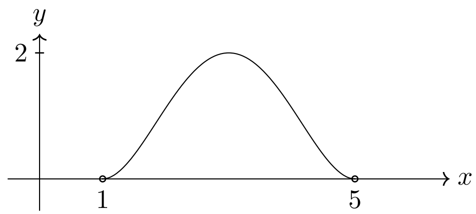


När vi ersätter x med $(x - 1)/2$ expanderas grafen med en faktor 2 i x-led och sedan en förskjutning med en enhet åt höger.



$x \mapsto f\big((x-1)/2\big)$

Multiplikationen med 2 gör att grafen förlängs i y-led med en faktor 2.



$x \mapsto 2\,f\big((x-1)/2\big)$

Funktionen $x \mapsto 2f\big((x-1)/2\big)$ är definierad då

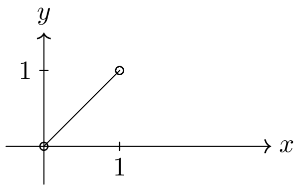
$$0 \le \frac{x-1}{2} \le 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \le x \le 5.$$

Definitionsmängden är alltså $[1, 5]$.

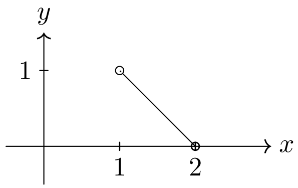
Eftersom vi vet att $0 \le f(\cdots) \le 1$ så är $0 \le 2f\big((x-1)/2\big) \le 2$. Värdemängden är $[0, 2]$.

P.5.25 Skissera grafen till $f(x) = \begin{cases} x & \text{om } 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{om } 1 < x \le 2. \end{cases}$

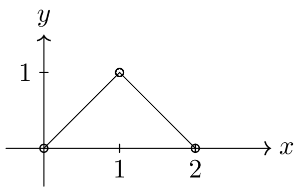
Funktionen f är lika med x i intervallet $[0,1]$.



I intervallet $(1,2]$ är f lika med $2-x$.



Över hela definitionsmängden $[0,2]$ har alltså f grafen.



Notera att f visserligen ges av två olika uttryck på olika delar av definitionsmängden men f är *en* funktion.

P.5.27 Bestäm alla reella konstanter A och B för vilka funktionen $F(x) = Ax + B$ uppfyller

a) $F \circ F(x) = F(x)$ för alla x,

b) $F \circ F(x) = x$ för alla x.

a) Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL} &= F \circ F(x) = F\bigl(F(x)\bigr) = F(Ax+B) \\ &= A(Ax+B) + B = A^2x + AB + B, \\ \text{HL} &= Ax + B. \end{aligned}$$

Eftersom VL ska vara lika med HL för alla x måste koefficienten framför x i båda led vara lika. Samma sak gäller konstanttermerna,

$$\begin{aligned} A^2 &= A \\ AB + B &= B \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \text{ eller } \quad A = 0.$$

Vi har alltså två typer av lösningar $\{A = 1, B = 0\}$ och $\{A = 0, B \text{ godtycklig}\}$.

b) Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \{\text{ se a-uppgiften }\} = A^2x + AB + B, \\ \text{HL} &= x. \end{aligned}$$

VL = HL för alla x ger att

$$\begin{aligned} A^2 &= 1 \\ AB + B &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \text{ och } \quad A = -1.$$

Det finns alltså två typer av lösningar $\{A = 1, B = 0\}$ och $\{A = 1, B \text{ godtycklig}\}$.

P.5.33 Antag att f är en jämn funktion, g är en udda funktion, och att både f och g är definierade på hela reella tallinjen $\boldsymbol{R}$.

Undersök om följande funktioner är jämna, udda eller ingetdera.

$$f+g,\quad f\cdot g,\quad f/g,\quad g/f,\quad f^2=f\cdot f,\quad g^2=g\cdot g,$$
$$f\circ g,\quad g\circ f,\quad f\circ f,\quad g\circ g.$$

Att f är jämn betyder att

$$f(-x)=f(x)\quad\text{för alla } x. \tag{$*$}$$

Att g är udda betyder att

$$g(-x)=-g(x)\quad\text{för alla } x. \tag{$\dagger$}$$

Vi ska nu undersöka om funktionerna i uppgiften är jämna, udda eller ingetdera.

Som en första grov såll kan vi ta två konkreta exempel på f och g, t.ex.

$$f(x)=x^2\quad\text{och}\quad g(x)=x,$$

och något x-värde, t.ex. $x=7$. Om någon av kombinationerna i uppgiftstexten inte uppfyller $(*)$ eller $(\dagger)$ för dessa speciella f, g och x, då kan kombinationen inte vara jämn respektive udda (eftersom då krävs ju att $(*)$ respektive $(\dagger)$ är uppfylld för alla f, g och x).

$f+g:$ Vi har att

$$f(-x)+g(-x)=(-7)^2+(-7)=42,$$
$$\pm\bigl(f(x)+g(x)\bigr)=\pm\bigl(7^2+7\bigr)=\pm 56.$$

Alltså kan $f+g$ varken vara jämn eller udda.

$f\cdot g:$ Vi har att

$$f(-x)\cdot g(-x)=(-7)^2\cdot(-7)=-343,$$
$$\pm f(x)\cdot g(x)=\pm 7^2\cdot 7=\pm 343.$$

$f\cdot g$ skulle kunna vara udda, men det kan ju också vara en slump. Däremot kan $f\cdot g$ inte vara jämn.

$f/g:$ Vi har att

$$f(-x)/g(-x)=(-7)^2/(-7)=-7,$$
$$\pm f(x)/g(x)=\pm 7^2/7=\pm 7.$$

f/g skulle kunna vara udda, men inte jämn.

$g/f:$ Vi har att

$$g(-x)/f(-x)=(-7)/(-7)^2=-\tfrac{1}{7},$$
$$\pm g(x)/f(x)=\pm 7/7^2=\pm\tfrac{1}{7}.$$

g/f skulle kunna vara udda, men inte jämn.

$f\cdot f:$ Vi har att

$$f(-x)\cdot f(-x)=(-7)^2\cdot(-7)^2=2401,$$
$$\pm f(x)\cdot f(x)=\pm 7^2\cdot 7^2=\pm 2401.$$

$f\cdot f$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$g\cdot g:$ Vi har att

$$g(-x)\cdot g(-x)=(-7)\cdot(-7)=49,$$
$$\pm g(x)\cdot g(x)=\pm 7\cdot 7=\pm 49.$$

$g\cdot g$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$f\circ g:$ Vi har att

$$f\circ g(-x)=f\bigl(g(-7)\bigr)=f(-7)=(-7)^2=49,$$
$$\pm f\circ g(x)=\pm f\bigl(g(7)\bigr)=\pm f(7)=\pm 7^2=\pm 49.$$

$f\circ g$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$g\circ f:$ Vi har att

$$g\circ f(-x)=g\bigl(f(-7)\bigr)=g(49)=49,$$
$$\pm g\circ f(x)=\pm g\bigl(f(7)\bigr)=\pm g(49)=\pm 49.$$

$g\circ f$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$f \circ f:$ Vi har att

$$f \circ f(-x) = f\big(f(-7)\big) = f(49) = 49^2 = 2401,$$
$$\pm\, f \circ f(x) = \pm f\big(f(-7)\big) = \pm f(49) = \pm 49^2 = \pm 2401.$$

$f \circ f$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$g \circ g:$ Vi har att

$$g \circ g(-x) = g\big(g(-7)\big) = g(-7) = -7,$$
$$\pm\, g \circ g(x) = \pm g\big(g(7)\big) = \pm g(7) = \pm 7.$$

$g \circ g$ skulle kunna vara udda, men inte jämn.

Vi har nu sållat bort några omöjliga fall. Nästa steg är att vi försöker bevisa de fall som inte kunde uteslutas ovan (de är troligtvis sanna).

$f \cdot g:$ Vi vet: (1) $f(-x) = f(x)$ för alla x,
(2) $g(-x) = -g(x)$ för alla x.
Vill visa: $(*)$ $f \cdot g$ udda, d.v.s. $f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$.
Vi har

$$\text{VL av } (*) = f(-x) \cdot g(-x) = \{\,(1),(2)\,\} = f(x) \cdot \big(-g(x)\big)$$
$$= -f(x) \cdot g(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \cdot g$ udda.

I de följande fallen kan vi vara lite mer kortfattade.

$f/g:$ Vill visa: $(*)$ $f(-x)/g(-x) = -f(x)/g(x)$

$$\text{VL av } (*) = f(-x)/g(-x) = -f(x)/g(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är f/g udda.

$g/f:$ Vill visa: $(*)$ $g(-x)/f(-x) = -g(x)/f(x)$

$$\text{VL av } (*) = g(-x)/f(-x) = -g(x)/f(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är g/f udda.

$f \cdot f:$ Vill visa: $(*)$ $f(-x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot f(x)$

$$\text{VL av } (*) = f(-x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot f(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \cdot f$ jämn.

$g \cdot g:$ Vill visa: $(*)$ $g(-x) \cdot g(-x) = g(x) \cdot g(x)$

$$\text{VL av } (*) = g(-x) \cdot g(-x) = \big(-g(x)\big) \cdot \big(-g(x)\big)$$
$$= g(x) \cdot g(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $g \cdot g$ jämn.

$f \circ g:$ Vill visa: $(*)$ $f \circ g(-x) = f \circ g(x)$

$$\text{VL av } (*) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \circ g$ jämn.

$g \circ f:$ Vill visa: $(*)$ $g \circ f(-x) = g \circ f(x)$

$$\text{VL av } (*) = g\big(f(-x)\big) = g\big(f(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $g \circ f$ jämn.

$f \circ f:$ Vill visa: $(*)$ $f \circ f(-x) = f \circ f(x)$

$$\text{VL av } (*) = f\big(f(-x)\big) = f\big(f(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \circ f$ jämn.

$g \circ g:$ Vill visa: $(*)$ $g \circ g(-x) = -g \circ g(x)$

$$\text{VL av } (*) = g\big(g(-x)\big) = g\big(-g(x)\big) = -g\big(g(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $g \circ g$ udda.

P.5.35a Låt f vara en funktion med ett origosymmetriskt definitionsområde. Visa att f är en summa av en jämn och en udda funktion

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

där E är en jämn funktion (even) och O är en udda funktion (odd).

Tips: Låt $E(x) = \big(f(x) + f(-x)\big)/2$. Visa att $E(-x) = E(x)$, varför E är jämn. Visa sedan att $O(x) = f(x) - E(x)$ är udda.

Vi låter

$$\begin{aligned} E(x) &= \big(f(x) + f(-x)\big)/2, \\ O(x) &= f(x) - E(x) = f(x) - \big(f(x) + f(-x)\big)/2 \\ &= \big(f(x) - f(-x)\big)/2. \end{aligned}$$

Då är

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

och vi visar att

E jämn : Vi ska visa att

$$E(-x) = -E(x). \qquad (*)$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL av } (*) = E(-x) &= \big(f(-x) + f\big(-(-x)\big)\big)/2 \\ &= \big(f(x) + f(-x)\big)/2 = \text{HL av } (*) \end{aligned}$$

Alltså är E jämn.

O udda : Vi ska visa att

$$O(-x) = -O(x). \qquad (*)$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL av } (*) = O(-x) &= \big(f(-x) - f\big(-(-x)\big)\big)/2 \\ &= -\big(f(x) - f(-x)\big)/2 = \text{HL av } (*) \end{aligned}$$

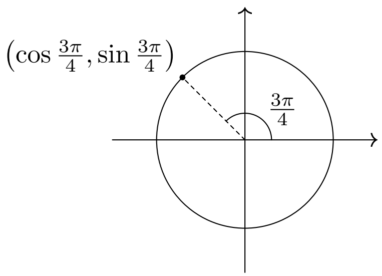
Alltså är O udda.

Inledande kurs i matematik, avsnitt P.6

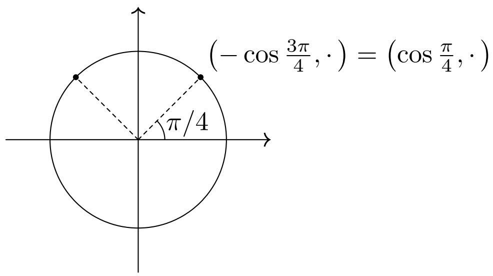
P.6.1 Beräkna $\cos\frac{3\pi}{4}$.

Vi ska använda enhetscirkeln och symmetrier i denna för att bestämma $\cos\frac{3\pi}{4}$.

Den punkt på enhetscirkeln med vinkeln $\frac{3\pi}{4}$ har koordinater $(\cos\frac{3\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4})$.



Genom att spegla punkten i y-axeln får vi en punkt i första kvadranten med x-koordinaten $-\cos\frac{3\pi}{4}$ (men oförändrad y-koordinat). Denna punkt har vinkeln $\frac{\pi}{4}$ (som är spegelvinkeln till $\frac{3\pi}{4}$ i y-axeln), och därmed x-koordinaten $\cos\frac{\pi}{4}$.

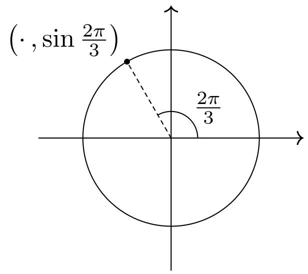


Alltså är

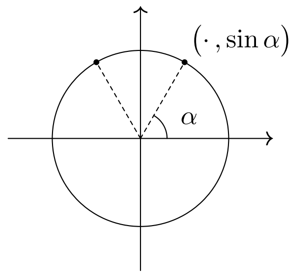
$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

P.6.3 Beräkna $\sin\frac{2\pi}{3}$.

Vi ritar upp enhetscirkeln och vinkeln $\frac{2\pi}{3}$.



Vi kan använda spegling i y-axeln för att uttrycka $\sin\frac{2\pi}{3}$ med spegelvinkeln i första kvadranten. Om α är spegelvinkeln då är



$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\alpha.$$

Vi ser vad $\frac{2\pi}{3}$:s spegelvinkel är genom att skriva

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6} = \frac{3\pi+\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6},$$

för då är

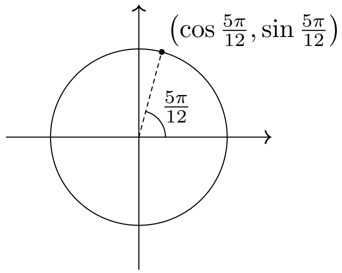
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi-\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Alltså är

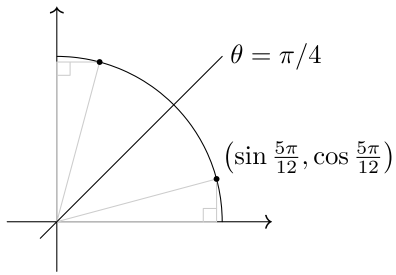
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

P.6.5 Beräkna $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Vi ritar upp vinkeln $\frac{5\pi}{12}$ i enhetscirkeln.



Genom att spegla punkten i diagonallinjen (vinkeln $\frac{\pi}{4}$) får vi en spegelpunkt med x- och y-koordinater ombytta jämfört punkten (se trianglarna i figuren), d.v.s. spegelpunkten har koordinaterna $\left(\sin\frac{5\pi}{12}, \cos\frac{5\pi}{6}\right)$.



Spegelvinkeln α får vi genom att skriva

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi + 2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6},$$

för då är

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12},$$

och vi har att $\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12}$. För att bestämma $\sin\frac{\pi}{12}$ noterar vi att $\frac{\pi}{12}$ är hälften av vinkeln $\frac{\pi}{6}$ som vi kan cosinus- och sinusvärdena till. Med formeln för halva vinkeln

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

har vi att

$$|\sin\theta| = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}.$$

Alltså är

$$\left|\sin\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}}.$$

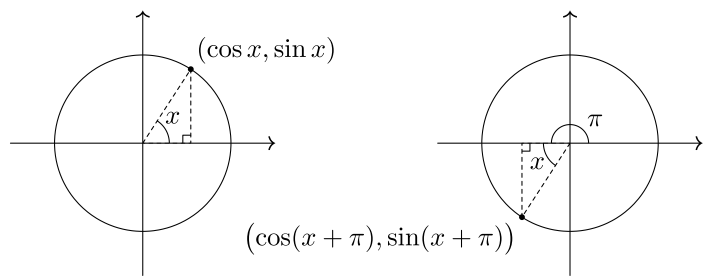
Eftersom vinkeln $\pi/12$ är i första kvadranten är $\sin\frac{\pi}{12} > 0$, och vi har att

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} = \left|\sin\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}}.$$

Anm. I facit ges svaret $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ som är lika med vårt svar. (Extrauppgift: Visa detta.)

P.6.7 Uttryck $\cos(\pi + x)$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Vinkeln $\pi + x$ är vinkeln x roterad ett halvt varv, varför de två trianglarna nedan är kongruenta.

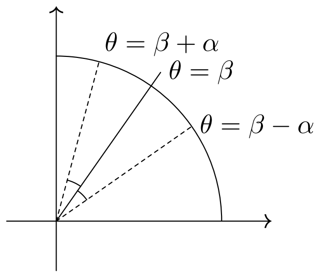


Sidlängderna lika ger att $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

P.6.9 Uttryck $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Vinklarna $\frac{3\pi}{2} - x$ och x har formen av att vara varandras spegelvinklar kring någon mittvinkel. Vi vill alltså kunna hitta α och β så att

$$\begin{aligned} \tfrac{3\pi}{2} - x &= \beta + \alpha, && (1)\\ x &= \beta - \alpha. && (2) \end{aligned}$$



(1) + (2) ger $\frac{3\pi}{2} = 2\beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{3\pi}{4}$.

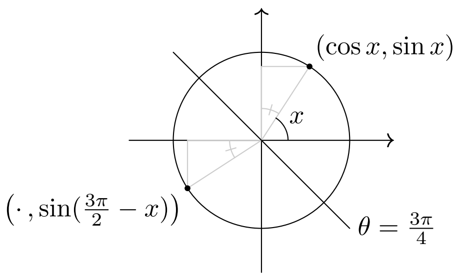
(1) − (2) ger $\frac{3\pi}{2} - 2x = 2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} - x$.

Alltså kan vi skriva

$$\begin{aligned} \tfrac{3\pi}{2} - x &= \tfrac{3\pi}{4} + \left(\tfrac{3\pi}{4} - x\right),\\ x &= \tfrac{3\pi}{4} - \left(\tfrac{3\pi}{4} - x\right). \end{aligned}$$

Vinklarna $\frac{3\pi}{2} - x$ och x är alltså varandras spegelvinklar kring mittvinkeln $\frac{3\pi}{4}$.

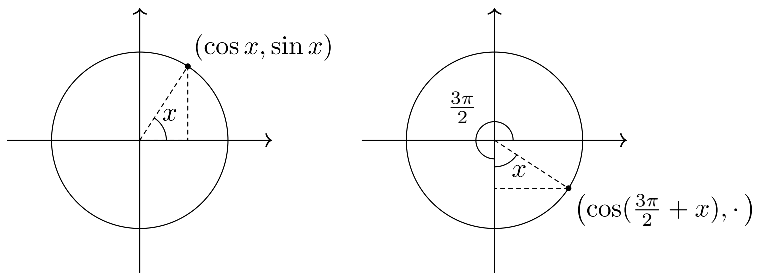
Vi kan nu uttrycka $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ i $\cos x$ och $\sin x$ med hjälp av symmetrier i enhetscirkeln (de utritade trianglarna är kongruenta).



$$\sin\left(\tfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x.$$

P.6.10 Uttryck $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

För att få $\frac{3\pi}{2} + x$ från x roterar vi x $\frac{3}{4}$ varv motsols. Trianglarna nedan är alltså kongruenta.



Alltså är $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

P.6.12 Uttryck $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Definitionen av $\tan x$ och $\cot x$ ger att

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}} = \{\text{ förläng med } \cos x \sin x \,\}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{-\cos 2x}{1} = -\cos 2x.$$

P.6.13 Visa att $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$.

Konjugatregeln ger att

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \bigl(\cos^2 x + \sin^2 x\bigr)\bigl(\cos^2 x - \sin^2 x\bigr) = 1 \cdot \cos 2x = \cos 2x.$$

P.6.14 Visa att $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \tan \dfrac{x}{2}$.

Vi förlänger med $1+\cos x$,

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos x}{\sin x} &= \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}\\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.\end{aligned}$$

Vi har att

$$1+\cos x = 2\cos^2 \tfrac{x}{2} \quad \text{och} \quad \sin x = 2\cos\tfrac{x}{2}\sin\tfrac{x}{2}.$$

Alltså är

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\tfrac{x}{2}.$$

P.6.15 Visa att $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$.

Formeln för dubbla vinkeln ger att

$$\begin{aligned}2\cos\tfrac{x}{2} &= 1+\cos x,\\ 2\sin\tfrac{x}{2} &= 1-\cos x.\end{aligned}$$

Alltså är

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = \tan\tfrac{x}{2}.$$

P.6.17 Uttryck $\sin 3x$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Additionsformeln för sinus ger att

$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x.$$

Vidare har vi att

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{och} \quad \sin 2x = 2\cos x \sin x.$$

Alltså är

$$\sin 3x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x.$$

Anm. I facit ges svaret $3\sin x - 4\sin^3 x$ vilket är lika med vårt svar ty $3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x(1-\sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

P.6.18 Uttryck $\cos 3x$ i termer av $\cos x$ och $\sin x$.

Additionsformeln för cosinus ger att

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x.$$

Formeln för dubbla vinkeln,

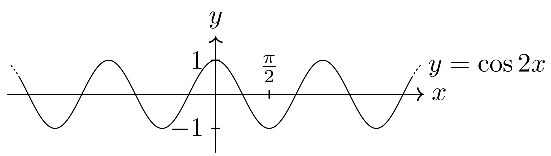
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{och} \quad \sin 2x = 2 \cos x \sin x,$$

ger att

$$\cos 3x = \cos^3 x - \cos x \sin^2 x - 2 \cos \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x.$$

P.6.19 Skissera grafen till $f(x) = \cos 2x$. Vilken period har funktionen?

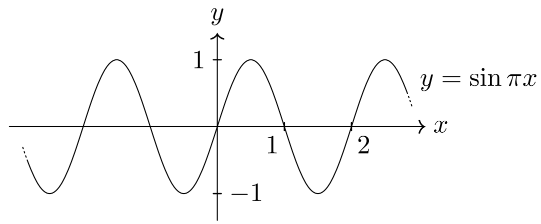
Grafen till $f(x) = \cos 2x$ är cosinus-kurvan kontraherad i x-led med en faktor $\frac{1}{2}$.



Vi vet att $x \mapsto \cos x$ är 2π-periodisk och när vi ersätter x med $2x$ förkortas perioden också med en faktor $\frac{1}{2}$, $x \mapsto \cos 2x$ är därför π-periodisk.

P.6.21 Skissera grafen till $f(x) = \sin \pi x$. Vilken period har funktionen?

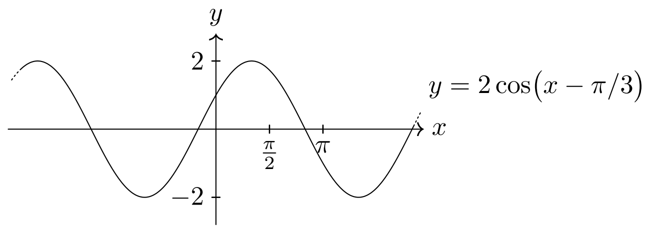
När vi ersätter x med πx skalas grafen till $x \mapsto \sin x$ med en faktor $\frac{1}{\pi}$ i x-led. Grafen till f blir alltså



Perioden till f skalas också om från 2π till $\frac{2\pi}{2} = 2$.

P.6.23 Skissera grafen till $y = 2\cos\big(x - \pi/3\big)$.

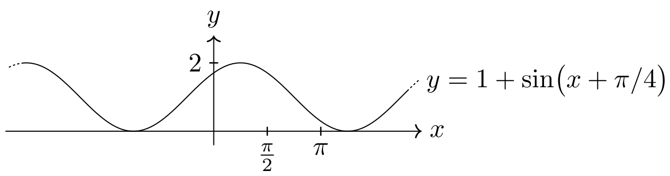
När vi ersätter x med $x - \pi/3$ förskjuts grafen till $x \mapsto \cos x$ med $\frac{\pi}{3}$ enheter åt höger. Faktorn 2 skalar sedan om grafen i y-led.



P.6.24 Skissera grafen till $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

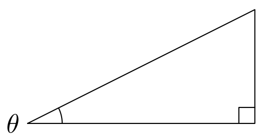
Grafen till $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ är förskjuten med $\frac{\pi}{4}$ enheter åt vänster jämfört med $y = \sin x$.

Grafen till $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ är slutligen förskjuten med en enhet uppåt.

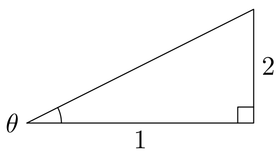


P.6.26 Givet $\tan\theta = 2$, där θ tillhör $\left[0, \pi/2\right]$. Bestäm $\cos\theta$ och $\sin\theta$.

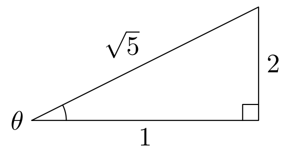
Eftersom θ ligger i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kan vi rita θ som en vinkel i en hjälptriangel.



Vi vet att $\tan\theta = 2$ så vi kan ge kateterna längderna 2 och 1.



Pythagoras sats ger att hypotenusan är $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,



Från triangeln får vi nu att

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{och} \quad \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

P.6.27 Givet $\cos\theta = \frac{1}{3}$, där θ tillhör intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Bestäm $\sin\theta$ och $\tan\theta$.

Den trigonometriska ettan ger att

$$|\sin\theta| = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{9}} = \tfrac{\sqrt{8}}{3} = \tfrac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Eftersom θ tillhör $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ har $\sin\theta$ ett negativt tecken. Alltså är

$$\sin\theta = -|\sin\theta| = -\tfrac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Slutligen får vi

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}.$$

P.6.29 Givet $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, där θ tillhör intervallet $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$. Bestäm $\cos\theta$ och $\tan\theta$.

Den trigonometriska ettan ger att

$$|\cos\theta\,| = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}/2.$$

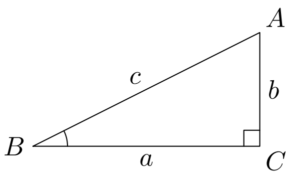
Eftersom θ tillhör intervallet $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, som är tredje kvadranten, har $\cos\theta$ ett negativt tecken och därmed är

$$\cos\theta = -|\cos\theta\,| = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

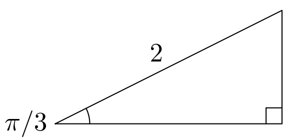
Sedan har vi att

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-1/2}{-\sqrt{3}/2} = 1/\sqrt{3}.$$

P.6.31 ABC är en triangel med en rät vinkel i C, och a, b och c är sidorna som är motstående respektive vinkel. Bestäm a och b om $c = 2$ och $B = \pi/3$.



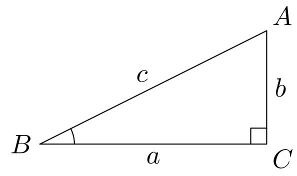
Vad som är givet är alltså



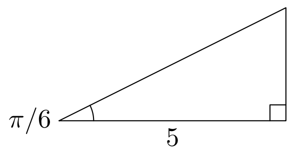
Definitionen av cosinus och sinus ger att

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{\pi}{3} &= \tfrac{a}{2} &\quad\Leftrightarrow\quad& a = 2\cos\tfrac{\pi}{3} = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1,\\
\sin\tfrac{\pi}{3} &= \tfrac{b}{2} &\quad\Leftrightarrow\quad& b = 2\sin\tfrac{\pi}{3} = 2\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

P.6.33 ABC är en triangel med en rät vinkel i C, och a, b och c är sidorna som är motstående respektive vinkel. Bestäm b och c, om $a = 5$ och $B = \frac{\pi}{6}$.



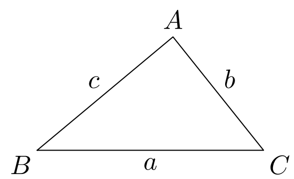
Vi ritar upp de givna storheterna i triangeln.



Definitionen av cosinus och tangens ger att

$$\begin{aligned}
\cos\tfrac{\pi}{6} &= \tfrac{5}{c} &\quad\Leftrightarrow\quad& c = \frac{5}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{5}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{\sqrt{3}},\\
\tan\tfrac{\pi}{6} &= \tfrac{b}{5} &\quad\Leftrightarrow\quad& b = 5\tan\tfrac{\pi}{6} = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

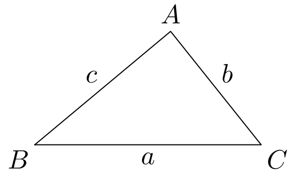
P.6.43 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm $\sin B$ om $a = 4$, $b = 3$ och $A = \pi/4$.



Sinussatsen ger att

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad\Leftrightarrow\quad \sin B = \tfrac{b}{a}\sin A = \tfrac{3}{4}\cdot\sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{3}{4\sqrt{2}}.$$

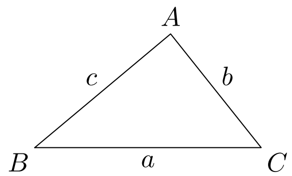
P.6.44 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm $\cos A$ om $a = 2$, $b = 2$ och $c = 3$.



Cossinussatsen ger att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \Leftrightarrow$$
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{4}.$$

P.6.45 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm $\sin B$ om $a = 2$, $b = 3$ och $c = 4$.



Cosinussatsen ger att

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad \Leftrightarrow$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \tfrac{11}{16}.$$

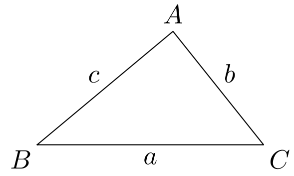
Den trigonometriska ettan ger att

$$|\sin B| = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \tfrac{121}{256}} = \sqrt{\tfrac{135}{256}}.$$

Eftersom B är en vinkel i en triangel ligger B i intervallet $[0, \pi]$, vilket betyder att $\sin B$ har positivt tecken. Alltså är

$$\sin B = |\sin B| = \sqrt{\tfrac{135}{256}}.$$

P.6.47 Låt ABC vara en triangel med sidorna a, b och c motstående vinklarna A, B respektive C. Bestäm a om $c = 4$, $A = \pi/4$ och $B = \pi/3$.



Eftersom vinkelsumman i en triangel är π, är $C = \pi - A - B = \frac{5\pi}{12}$. Sinussatsen ger att

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = c\,\frac{\sin A}{\sin C} = 3 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{12}}$$

Från uppgift P.6.5 har vi att $\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}$

$$a = 3 \cdot \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \sqrt{3}/2}}.$$

Inledande kurs i matematik, avsnitt 3.2

3.2.1 Förenkla uttrycket $\dfrac{3^3}{\sqrt{3^5}}$.

Vi skriver om nämnaren i potensform,

$$\frac{3^3}{\sqrt{3^5}} = \frac{3^3}{\left(3^5\right)^{1/2}} = \frac{3^3}{3^{5/2}} = 3^{3-5/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}.$$

3.2.2 Förenkla uttrycket $2^{1/2}8^{1/2}$.

Vi använder att $8 = 2^3$ och får

$$2^{1/2}8^{1/2} = 2^{1/2} \cdot \left(2^3\right)^{1/2} = 2^{1/2} \cdot 2^{3/2} = 2^{1/2+3/2} = 2^2 = 4.$$

3.2.3 Förenkla uttrycket $\left(x^{-3}\right)^{-2}$.

Om vi antar att $x > 0$ ger potenslagarna att

$$\left(x^{-3}\right)^{-2} = x^{(-3)\cdot(-2)} = x^6.$$

3.2.4 Förenkla uttrycket $\left(\frac{1}{2}\right)^x 4^{x/2}$.

Vi har att $4 = 2^2$ och får därför att

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^x 4^{x/2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x (2^2)^{x/2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x 2^{2\cdot x/2} = \tfrac{1^x}{2^x} \cdot 2^x = \tfrac{1}{2^x} \cdot 2^x = 1.$$

3.2.5 Förenkla utttrycket $\log_5 125$.

Vi har att $125 = 5^3$. Logaritmlagarna ger att $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \cdot \log_5 5 = 3 \cdot 1 = 3$.

3.2.6 Förenkla uttrycket $\log_4\left(\frac{1}{8}\right)$.

Vi har att $\frac{1}{8} = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{4}\,4} = \frac{1}{4^{3/2}}$. Alltså är

$$\log_4\left(\tfrac{1}{8}\right) = \log_4\left(\tfrac{1}{4^{3/2}}\right) = \log_4 4^{-3/2} = -\tfrac{3}{2} \cdot \log_4 4 = -\tfrac{3}{2} \cdot 1 = -\tfrac{3}{2}.$$

3.2.8 Förenkla uttrycket $2^{\log_4 8}$.

Från uppgift 3.2.6 vet vi att

$$\log_4 \tfrac{1}{8} = -\tfrac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \log_4 8 = \log_4\left(\tfrac{1}{8}\right)^{-1} = -\log_4 \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{2}.$$

Alltså är

$$2^{\log_4 8} = 2^{3/2} = 2^{1+1/2} = 2 \cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}.$$

3.2.9 Förenkla uttrycket $10^{-\log_{10}(1/x)}$.

Logaritm- och potenslagarna ger att $10^{-\log_{10}(1/x)} = 10^{\log_{10}(1/x)^{-1}} = 10^{\log_{10} x} = x$ om $x > 0$.

3.2.11 Förenkla uttrycket $(\log_a b)(\log_b a)$.

Basbytesformeln ger att

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Alltså är

$$(\log_a b)(\log_b a) = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1.$$

3.2.12 Förenkla uttrycket $\log_x\bigl(x(\log_y y^2)\bigr)$.

Vi har att $\log_y y = 1$ varför

$$\log_x\bigl(x(\log_y y^2)\bigr) = \log_x(x \cdot 2) = \log_x x + \log_x 2 = 1 + \log_x 2.$$

3.2.15 Förenkla uttrycket $\log_6 9 + \log_6 4$.

Logaritmlagarna ger att

$$\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6(9 \cdot 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \cdot \log_6 6 = 2 \cdot 1 = 2.$$

3.2.16 Förenkla uttrycket $2\log_3 12 - 4\log_3 6$.

Logaritmlagarna ger att

$$\begin{aligned} 2\log_3 12 - 4\log_3 6 &= \log_3 12^2 - \log_3 6^4 = \log_3 \frac{12^2}{6^4} \\ &= \log_3 \frac{1}{3^2} = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

3.2.17 Förenkla uttrycket

$$\log_a(x^4 + 3x^2 + 2) + \log_a(x^4 + 5x^2 + 6) - 4\,\log_a \sqrt{x^2 + 2}.$$

Den tredje termen kan vi skriva som

$$4\,\log_a \sqrt{x^2 + 2} = \log_a(\sqrt{x^2 + 2}\,)^4 = \log_a(x^2 + 2)^2.$$

Logaritmlagarna ger att uttrycket i uppgiftstexten är lika med

$$\log_a \frac{(x^4 + 3x^2 + 2)(x^4 + 5x^2 + 6)}{(x^2 + 2)^2}.$$

Det kan nu vara så att det finns gemensamma faktorer i bråket ovan, och i sådant fall kan vi förenkla uttrycket ytterligare.

För att se om vi har gemensamma faktorer behöver vi faktorisera de två uttrycken i täljaren.

$x^4 + 3x^2 + 2:$ Eftersom x endast förekommer i potenser av x^2 sätter vi $t = x^2$ och skriver polynomet som

$$t^2 + 3t + 2. \qquad (*)$$

Om a och b är nollställen till detta polynom, då har vi att

$$t^2 + 3t + 2 = (t - a)(t - b).$$

Nollställena till $(*)$ fås med sedvanliga formler och de är -1 och -2. Alltså är

$$t^2 + 3t + 2 = (t + 1)(t + 2),$$

eller uttryckt i x,

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2).$$

$x^4 + 5x^2 + 6:$ Vi sätter $t = x^2$ och får

$$t^2 + 5t + 6.$$

Detta andragradsuttrycket har nollställena -3 och -2, och därmed är

$$t^2 + 5t + 6 = (t + 3)(t + 2),$$

eller uttryckt i x,

$$(x^2 + 3)(x^2 + 2).$$

Uttrycket i uppgiftstexten kan alltså skrivas som

$$\begin{aligned}\log_a \frac{(x^2+1)(x^2+2)\cdot(x^2+3)(x^2+2)}{(x^2+2)^2} &= \log\bigl((x^2+1)(x^2+3)\bigr)\\ &= \log\bigl(x^4+4x^2+3\bigr).\end{aligned}$$

3.2.18 Förenkla uttrycket

$$\log_\pi(1-\cos x) + \log_\pi(1+\cos x) - 2\,\log_\pi \sin x.$$

Förutsatt att argumentet till den tredje logaritmen är positiv (de övriga två argumentet är positiva utom i enstaka punkter) så ger logaritmlagarna att

$$\begin{aligned}&\log_\pi(1-\cos x) + \log_\pi(1+\cos x) - 2\,\log_\pi \sin x\\ &\quad = \log\bigl((1-\cos x)(1+\cos x)\bigr) - \log_\pi \sin^2 x\\ &\quad = \log_\pi(1-\cos^2 x) - \log_\pi \sin^2 x = \log_\pi \sin^2 x - \log_\pi \sin^2 x = 0.\end{aligned}$$

3.2.29 Lös ekvationen $\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \frac{1}{2}$.

Vi kan skriva högerledet som

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\log_4 4 = \log_4 4^{1/2} = \log_4 2$$

och flytta över till vänsterledet. Vi får då att

$$0 = \log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) - \log_4 2 = \log_4 \frac{x+4}{2(x+1)^2}.$$

Logaritmfunktionen antar värdet 0 endast då dess argument är 1, d.v.s. då

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{2(x+1)^2} = 1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 2(x+1)^2 - (x+4) = 0\\ &\Leftrightarrow \qquad 2x^2 + 3x - 2 = 0.\end{aligned}$$

Denna andragradare har lösningarna -2 och $-\frac{1}{2}$.

Ekvationen i uppgiftstexten har alltså lösningarna $x = -2$ och $x = \frac{1}{2}$.

3.2.30 Lös ekvationen $2\log_3 x + \log_9 x = 10$.

Enklast är att uttrycka alla termer som 3-logaritmer av något,

$$\begin{aligned}\log_9 x &= \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 x}{2} = \log_3\sqrt{x},\\ 10 &= \log_3(3^{10}).\end{aligned}$$

Ekvationen kan alltså skrivas (efter omflyttning av alla termer till ena ledet),

$$0 = \log_3 x^2 + \log_3\sqrt{x} - \log_3(3^{10}) = \log_3\Bigl(\frac{x^2\sqrt{x}}{3^{10}}\Bigr).$$

Logaritmen antar värdet 0 endast då dess argument är 1, d.v.s.

$$\frac{x^2\sqrt{x}}{3^{10}} = 1 \qquad\Leftrightarrow\qquad x^{5/2} = 3^{10} \qquad\Leftrightarrow\qquad x = (3^{10})^{2/5} = 3^4 = 81.$$

Alltså har ekvationen i uppgiftstexten lösningen $x = 81$.