Inledande kurs i matematik, avsnitt P.2

P.2.15 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (-1, 1)$ och har riktningskoefficient $k = 1$.

Varje icke-lodrät linje i planet kan skrivas i formen

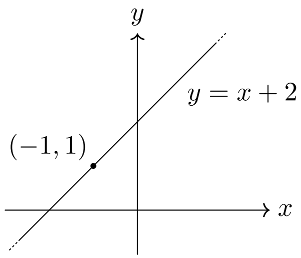
$$y = kx + m,$$

där k är linjens riktningskoefficient (eller lutning), och som är lika med 1 enligt uppgiftstexten.

För att bestämma konstanten m använder vi att linjen går genom punkten $P = (-1, 1)$, vilket betyder att linjens ekvation ska vara uppfylld i punkten P,

$$1 = 1 \cdot (-1) + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 2.$$

Linjens ekvation är alltså $y = x + 2$.



P.2.16 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (-2, 2)$ och har riktningskoefficient $k = \frac{1}{2}$.

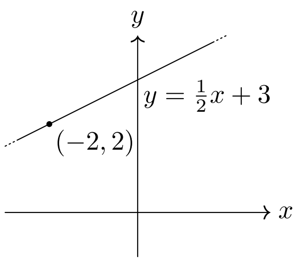
En linje med riktningskoefficient $\frac{1}{2}$ har ekvationen

$$y = \tfrac{1}{2}x + m.$$

Konstanten m bestämmer vi med villkoret att linjen går genom punkten $P = (-2, 2)$,

$$2 = \tfrac{1}{2} \cdot (-2) + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 3.$$

Linjens ekvation är $y = \frac{1}{2}x + 3$.



P.2.17 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (0, b)$ och har riktningskoefficient $k = 2$.

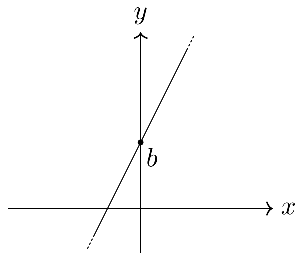
Linjens ekvation kan vi skriva som

$$y = 2x + m,$$

och m bestäms med villkoret att punkten $(0, b)$ uppfyller linjens ekvation, d.v.s.

$$b = 2 \cdot 0 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = b.$$

Linjens ekvation är $y = 2x + b$.



P.2.18 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P = (a, 0)$ och har riktningskoefficient $k = -2$.

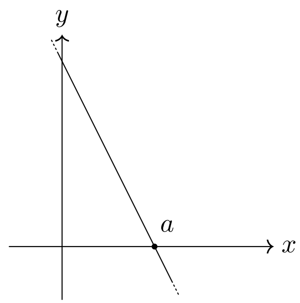
Linjens ekvation är

$$y = -2x + m.$$

Eftersom punkten $(a, 0)$ ligger på linjen ska den uppfylla linjens ekvation, d.v.s.

$$0 = -2 \cdot a + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 2a.$$

Alltså är linjens ekvation $y = -2x + 2a$.



P.2.19 Ligger punkten $P = (2, 1)$ på, ovanför eller under linjen $2x + 3y = 6$.

Punkten $P = (2, 1)$ ligger på linjen om den uppfyller linjens ekvation,

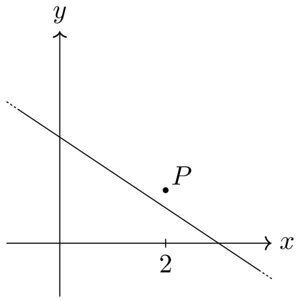
$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7 \neq 6.$$

Alltså ligger P *inte* på linjen.

Punkten P ligger ovanför linjen om P har större y-koordinat än linjen då $x = 2$. Eftersom linjen har y-koordinat

$$y = \frac{6 - 2x}{3} = \{\, x = 2 \,\} = \frac{6 - 2 \cdot 2}{3} = \tfrac{2}{3} < 1$$

ligger punkten P ovanför linjen.

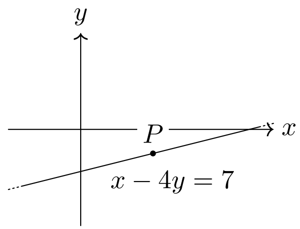


P.2.20 Ligger punkten $P = (3, -1)$ på, ovanför eller under linjen $x - 4y = 7$.

Punkten $P = (3, -1)$ ligger på linjen om den uppfyller linjens ekvation,

$$3 - 4 \cdot (-1) = 3 + 4 = 7.$$

Alltså ligger P på linjen.



P.2.21 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(0, 0)$ och $(2, 3)$.

Eftersom punkterna $(0, 0)$ och $(2, 3)$ inte ligger ovanför varandra (punkterna har inte samma x-koordinat) är linjen inte lodrät, och kan skrivas i formen

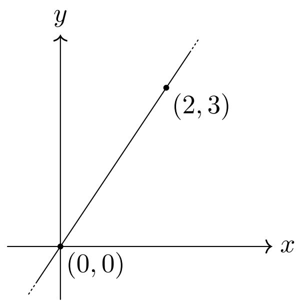
$$y = kx + m.$$

Eftersom punkterna $(0, 0)$ och $(2, 3)$ ska ligga på linjen måste de uppfylla linjens ekvation,

$$0 = k \cdot 0 + m = m \qquad (1)$$
$$3 = k \cdot 2 + m \qquad (2)$$

Från (1) får vi att $m = 0$. Detta insatt i (2) ger att $k = \frac{3}{2}$. Alltså är linjens ekvation

$$y = \tfrac{3}{2}x.$$



P.2.22 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(-2, 1)$ och $(2, -2)$.

Punkterna ligger inte ovanför varandra så linjen är inte lodrät och vi kan skriva linjens ekvation som

$$y = kx + m,$$

där k och m är konstanter som vi ska bestämma.

Eftersom punkterna ska ligga på linjen måste de uppfylla linjens ekvation,

$$1 = k \cdot (-2) + m, \qquad (1)$$
$$-2 = k \cdot 2 + m. \qquad (2)$$

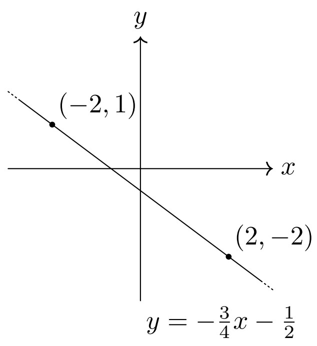
Om vi adderar (1) och (2) så får vi

$$-1 = 2m \quad \Leftrightarrow \quad m = -\tfrac{1}{2}.$$

Subtraherar vi (1) med (2) får vi

$$3 = -4k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\tfrac{3}{4}.$$

Linjens ekvation är därmed $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.



P.2.23 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(4,1)$ och $(-2,3)$.

Eftersom punkterna inte ligger ovanför varandra så är linjen inte lodrät och vi kan skriva linjens ekvation i formen

$$y = kx + m.$$

Punkterna $(4,1)$ och $(-2,3)$ ska ligga på linjen och måste därför uppfylla linjens ekvation

$$1 = k \cdot 4 + m, \qquad (1)$$
$$3 = k \cdot (-2) + m. \qquad (2)$$

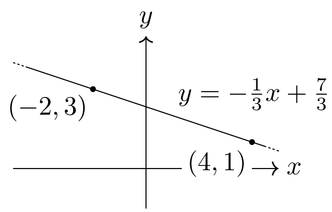
Om vi från (1) löser ut $m = 1 - 4k$ och stoppar in det i (2), så får vi

$$3 = -2k + 1 - 4k = 1 - 6k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\tfrac{1}{3}.$$

Detta insatt i (1) ger

$$1 = \left(-\tfrac{1}{3}\right) \cdot 4 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \tfrac{7}{3}.$$

Alltså är linjens ekvation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.



P.2.24 Bestäm en ekvation för den linje som passerar genom punkterna $(-2,0)$ och $(0,2)$.

Punkterna ligger inte rakt ovanför varandra så linjen är inte lodrät, och kan därför skrivas i formen

$$y = kx + m.$$

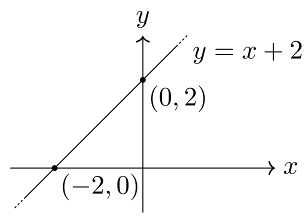
Punkterna ska ligga på linjen och därmed uppfylla linjens ekvation

$$0 = k \cdot (-2) + m, \qquad (1)$$
$$2 = k \cdot 0 + m. \qquad (2)$$

Från (2) får vi att $m = 2$. Detta insatt i (1) ger

$$0 = -2k + 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1.$$

Linjens ekvation är $y = x + 2$.



P.2.25 Bestäm en ekvation för den linje med lutning -2 och som skär y-axeln i $\sqrt{2}$.

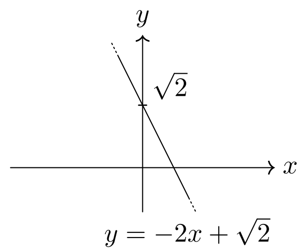
Eftersom linjens lutning är given vet vi att linjens ekvation kan skrivas som

$$y = -2x + m,$$

där m är en konstant som vi ska bestämma. Det andra villkoret är att $y = \sqrt{2}$ då $x = 0$, d.v.s.

$$\sqrt{2} = -2 \cdot 0 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = \sqrt{2}.$$

Alltså är linjens ekvation $y = -2x + \sqrt{2}$.



P.2.26 Bestäm en ekvation för den linje med lutning $-\frac{1}{2}$ och som skär y-axeln i -3.

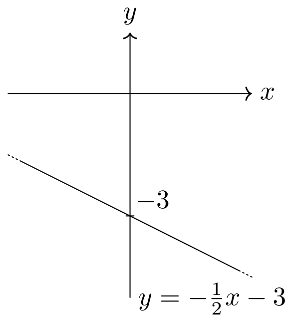
Eftersom linjens lutning är $-\frac{1}{2}$ kan linjens ekvation skrivas som

$$y = -\tfrac{1}{2}x + m.$$

När linjen skär y-axeln gör den det i punkten $(0, -3)$, och den punkten måste då uppfylla linjens ekvation,

$$-3 = -\tfrac{1}{2} \cdot 0 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -3.$$

Linjens ekvation är $y = -\frac{1}{2}x - 3$.



P.2.27 Bestäm var linjen $3x + 4y = 12$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

En punkt ligger på x-axeln om dess y-koordinat är noll. Den punkt på linjen som skär x-axeln måste alltså uppfylla

$$3x + 4 \cdot 0 = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 4.$$

Punkten $(4, 0)$ är alltså skärningspunkten mellan linjen och x-axeln.

På motsvarande sätt ligger en punkt på y-axeln om dess x-koordinat är noll. Skärningspunkten mellan linjen och y-axeln måste alltså uppfylla

$$3 \cdot 0 + 4y = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 3.$$

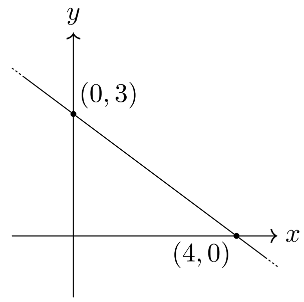
Alltså är $(0, 3)$ den sökta skärningspunkten.

Genom att skriva om linjens ekvation i standardform,

$$3x + 4y = 12 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -\tfrac{3}{4}x + 3,$$

kan vi direkt avläsa att lutningen är $-\frac{3}{4}$.

Eftersom vi vet två punkter på linjen, $(4, 0)$ och $(0, 3)$, så är den sökta linjen den linje som förbinder de två punkterna.



P.2.28 Bestäm var linjen $x + 2y = -4$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

Skärningspunkten med x-axeln $(y = 0)$ ges av

$$x + 2 \cdot 0 = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -4,$$

d.v.s. skärningspunkten är $(-4, 0)$.

Skärningspunkten med y-axeln $(x = 0)$ ges av

$$0 + 2y = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -2,$$

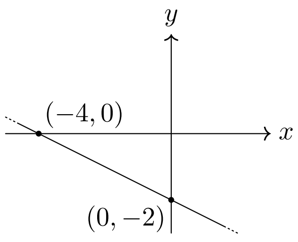
d.v.s. skärningspunkten är $(0, -2)$.

Vi skriver linjens ekvation i standardform

$$y = -\tfrac{1}{2}x - 2$$

och kan avläsa att linjens lutning är $-\frac{1}{2}$.

En skiss av linjen får vi genom att förbinda punkterna $(-4, 0)$ och $(0, -2)$ med en rät linje.



P.2.29 Bestäm var linjen $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 2$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

Linjen skär x-axeln då $y = 0$, d.v.s. då

$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{3} \cdot 0 = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{2}.$$

Skärningspunkten med x-axeln är alltså $(\sqrt{2}, 0)$.
Linjen skär y-axeln då $x = 0$, d.v.s. då

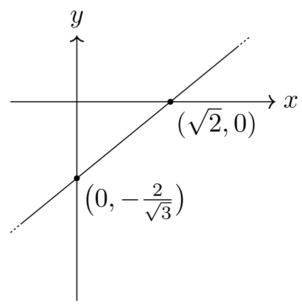
$$\sqrt{2} \cdot 0 - \sqrt{3}\,y = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -\tfrac{2}{\sqrt{3}}.$$

Skärningspunkten med y-axeln är alltså $\bigl(0, -\tfrac{2}{\sqrt{3}}\bigr)$.
Skriver vi linjens ekvation i standardform

$$y = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x - \tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

ser vi att linjens lutning är $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

Eftersom linjen förbinder punkterna $(\sqrt{2}, 0)$ med $\bigl(0, -\tfrac{2}{\sqrt{3}}\bigr)$ har linjen följande utseende.



P.2.30 Bestäm var linjen $1{,}5x - 2y = -3$ skär x- respektive y-axeln, och bestäm linjens lutning samt skissera linjen.

Linjen skär x-axeln då $y = 0$, d.v.s. då

$$1{,}5x - 2 \cdot 0 = -3 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2.$$

Skärningen med x-axeln sker alltså i punkten $(-2, 0)$.
Linjen skär y-axeln då $x = 0$, d.v.s. då

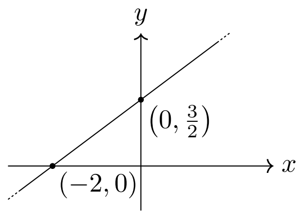
$$1{,}5 \cdot 0 - 2y = -3 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \tfrac{3}{2}.$$

Skärningen med y-axeln sker alltså i punkten $\bigl(0, \tfrac{3}{2}\bigr)$.
Skriver vi linjens ekvation i standardform

$$y = 0{,}75\,x + \tfrac{3}{2}$$

så ser vi att linjens lutning är $0{,}75$.

Eftersom linjen förbinder punkterna $(-2,0)$ och $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ får vi följande skiss.



P.2.31 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P=(2,1)$ och är

a) parallell med linjen $y=x+2$,

b) vinkelrät mot linjen $y=x+2$.

a) Eftersom linjen ska vara parallell med linjen $y=x+2$ ska den ha samma lutning 1. Vår linje har alltså ekvationen

$$y=x+m.$$

Eftersom vår linje går genom punkten $(2,1)$ ska denna punkt uppfylla linjens ekvation,

$$1=2+m \qquad \Leftrightarrow \qquad m=-1.$$

Vår linje har alltså ekvationen $y=x-1$.

b) Eftersom linjen ska vara vinkelrät mot linjen $y=x+2$ ska den ha en lutning som är $-\frac{1}{1}=-1$ (se sidan 15 i kursboken). Vår linje har alltså ekvationen

$$y=-x+m.$$

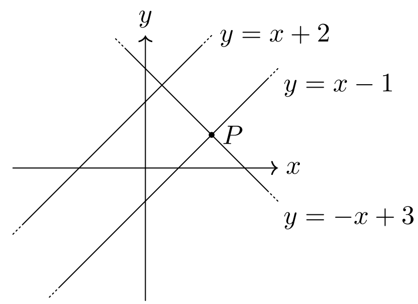
Eftersom linjen ska gå genom punkten $(2,1)$ ska denna punkt uppfylla linjens ekvation,

$$1=-2+m \qquad \Leftrightarrow \qquad m=3.$$

Vår linje har alltså ekvationen

$$y=-x+3.$$

Vi ritar upp linjerna.



P.2.32 Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $P=(-2,2)$ och är

a) parallell med linjen $2x+y=4$,

b) vinkelrät mot linjen $2x+y=4$.

a) En linje som är parallell med

$$2x+y=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y=-2x+4$$

ska ha samma lutning -2, d.v.s. ha en ekvation i formen

$$y=-2x+m.$$

Eftersom punkten $(-2,2)$ ska ligga på den sökta linjen måste $(-2,2)$ uppfylla linjens ekvation

$$2=-2\cdot(-2)+m \qquad \Leftrightarrow \qquad m=-2.$$

Vår linje är $y=-2x-2$.

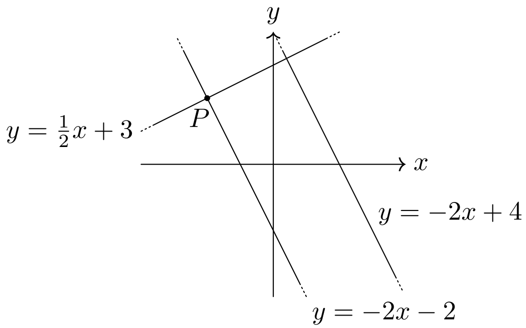
b) Vår linje ska vara vinkelrät mot $y=-2x+4$ och måste därför har lutningen $-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$ (se sidan 15 i kursboken). Den sökta linjen har alltså ekvationen

$$y=\tfrac{1}{2}x+m.$$

Eftersom punkten $(-2,2)$ ska ligga på vår linje måste $(-2,2)$ uppfylla linjens ekvation

$$2 = \tfrac{1}{2}\cdot(-2) + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 3.$$

Linjens ekvation är $y = \frac{1}{2}x + 3$.



P.2.33 Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $3x + 4y = -6$ och $2x - 3y = 13$.

Skärningspunkten ligger på båda linjerna och uppfyller därför båda linjernas ekvationer

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -6, \qquad (1)\\ 2x - 3y &= 13. \qquad (2) \end{aligned}$$

Från (1) löser vi ut x,

$$x = -2 - \tfrac{4}{3}y, \qquad (3)$$

och stoppar in i (2),

$$2\big(-2 - \tfrac{4}{3}y\big) - 3y = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -3.$$

(3) ger nu att

$$x = -2 = \tfrac{4}{3}\cdot(-3) = 2.$$

Alltså är skärningspunkten $(2,-3)$.

P.2.34 Bestäm skärningspunkten mellan linjerna $2x + y = 8$ och $5x - 7y = 1$.

Skärningspunkten ligger på båda linjerna och uppfyller därför båda linjernas ekvationer

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8, \qquad (1)\\ 5x - 7y &= 1. \qquad (2) \end{aligned}$$

Från (1) löser vi ut y,

$$y = 8 - 2x, \qquad (3)$$

och stoppar in i (2),

$$5x - 7(8 - 2x) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3.$$

(3) ger nu att

$$y = 8 - 2\cdot 3 = 2.$$

Skärningspunkten är alltså $(3,2)$.

P.2.37 Bestäm skärningen med y-axeln för den linje som går genom punkterna $(2,1)$ och $(3,-1)$.

Vi bestämmer först linjens ekvation. Om vi skriver linjens ekvation som

$$y = kx + m,$$

då ska $(2,1)$ och $(3,-1)$ uppfylla ovanstående samband

$$\begin{aligned} 1 &= k\cdot 2 + m, \qquad (1)\\ -1 &= k\cdot 3 + m. \qquad (2) \end{aligned}$$

(2) − (1) ger att $k = -2$. Detta insatt i (1) ger att

$$1 = -2\cdot 2 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = 5.$$

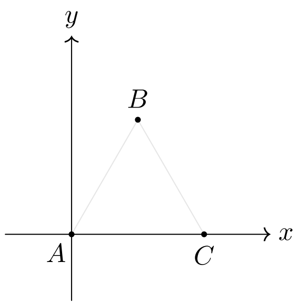
Alltså är linjens ekvation $y = -2x + 5$.
Linjen skär y-axeln då $x = 0$ med y-värdet

$$y = -2 \cdot 0 + 5 = 5,$$

d.v.s. $(0, 5)$ är den sökta skärningspunkten.

P.2.42 Visa att triangeln med hörn i $A = (0, 0)$, $B = (1, \sqrt{3}\,)$ och $C = (2, 0)$ är liksidig.

Vi ritar först upp hörnpunkterna.



Vi ska visa att avståndet mellan

1. A och B,
2. A och C, samt
3. B och C

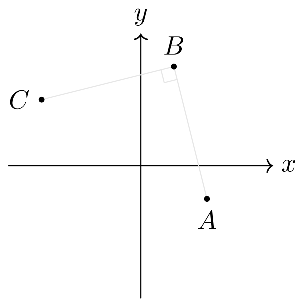
är lika. Avståndsformeln ger att

1. avstånd $= \sqrt{(0-1)^2 + (0-\sqrt{3}\,)^2} = \sqrt{1+3} = 2$,
2. avstånd $= \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4} = 2$,
3. avstånd $= \sqrt{(1-2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{1+3} = 2$

vilket visar att sidorna i triangeln är lika långa.

P.2.43 Visa att punkterna $A = (2, -1)$, $B = (1, 3)$ och $C = (-3, 2)$ bildar tre hörnpunkter i en kvadrat, och bestäm den fjärde hörnpunkten.

Vi ritar upp de tre punkterna.



För att de tre punkterna ska vara hörnpunkter i en kvadrat krävs att

1. avståndet mellan A och B är lika med avståndet mellan B och C, och att
2. kantlinjen mellan A och B är vinkelrät mot kantlinjen mellan B och C.

Vi visar att dessa villkor är uppfyllda.

1. Avståndet mellan A och B är

$$\sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$$

Avståndet mellan B och C är

$$\sqrt{\bigl(1-(-3)\bigr)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}.$$

2. För att visa att kantlinjerna är vinkelräta bestämmer vi ekvationer för kantlinjerna i formen

$$y = k_1 x + m_1 \quad \text{och} \quad y = k_2 x + m_2.$$

Linjerna är vinkelräta om

$$k_1 k_2 = -1. \tag{$*$}$$

Linjen genom punkterna A och B har lutningen

$$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{2-1} = -4.$$

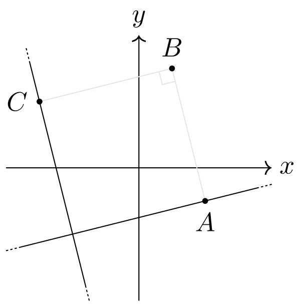
Linjen genom punkterna B och C har lutningen

$$k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-2}{1-(-3)} = \tfrac{1}{4}.$$

Alltså är $k_1 \cdot k_2 = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$, vilket visar att kantlinjerna är vinkelräta.

Den fjärde hörnpunkten får vi som skärningspunkt mellan

1. kantlinjen som är parallell med AB och går genom punkten C, och
2. kantlinjen som är parallell med BC och går genom punkten A.



Vi bestämmer först ekvationerna för dessa kantlinjer

1. Eftersom linjen genom A och B har lutningen -4 har den parallella kantlinjen genom C ekvationen

   $$y = -4x + m.$$

   Punkten C ligger på kantlinjen och uppfyller därför linjens ekvation

   $$2 = -4 \cdot (-3) + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -10.$$

   Kantlinjens ekvation är alltså $y = -4x - 10$.

2. Eftersom linjen genom B och C har lutning $\frac{1}{4}$ har den parallella kantlinjen genom A ekvationen

   $$y = \tfrac{1}{4}x + m.$$

   Punkten A ligger på kantlinjen och uppfyller därför linjens ekvation

   $$-1 = \tfrac{1}{4} \cdot 2 + m \qquad \Leftrightarrow \qquad m = -\tfrac{3}{2}.$$

   Kantlinjens ekvation är alltså $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.

Den fjärde hörnpunkten uppfyller båda dessa kantlinjers ekvationer

$$y = -4x - 10, \tag{1}$$
$$y = \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{2}. \tag{2}$$

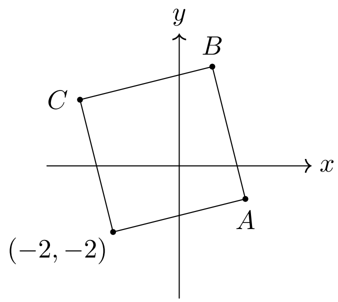
(1) − (2) ger

$$0 = -\tfrac{17}{4}x - \tfrac{17}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -2.$$

Detta insatt i (1) ger

$$y = -4 \cdot (-2) - 10 = -2.$$

Den fjärde hörnpunkten är alltså $(-2, -2)$.



P.2.49 För vilka värden på k är linjen $2x + ky = 3$

a) vinkelrät mot linjen $4x + y = 1$?

b) parallell med linjen $4x + y = 1$?

a) Vi skriver de två linjerna i standardform

$$y = -\tfrac{2}{k}x + \tfrac{3}{k}, \qquad (1)$$
$$y = -4x + 1, \qquad (2)$$

förutsatt att $k \neq 0$. De två linjerna är vinkelräta om produkten av deras lutningar är -1, d.v.s.

$$-\tfrac{2}{k} \cdot (-4) = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = -8.$$

Om $k = 0$ är den första linjen lodrät och inte vinkelrät mot $4x + y = 1$.

b) De två linjerna är parallella om de har samma lutning, d.v.s. (om $k \neq 0$)

$$-\tfrac{2}{k} = -4 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \tfrac{1}{2}.$$

Om $k = 0$ är linjerna inte parallella.