Inledande kurs i matematik, avsnitt P.3

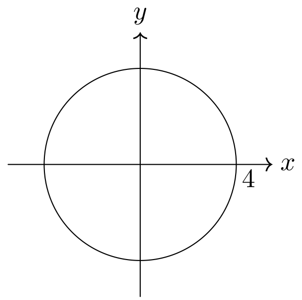
P.3.1 Bestäm en ekvation för cirkeln med mittpunkt i $(0,0)$ och radie 4.

En cirkel med mittpunkt i (x_c, y_c) och radie r har ekvationen

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2.$$

I vårt fall är $x_c = y_c = 0$ och $r = 4$, vilket ger ekvationen

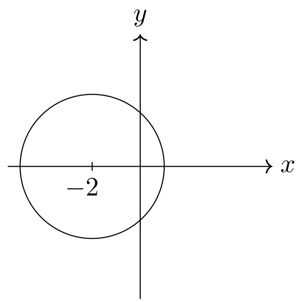
$$x^2 + y^2 = 16.$$



P.3.3 Bestäm en ekvation för cirkeln med mittpunkt i $(-2,0)$ och radie 3.

Standardekvationen för cirkeln är

$$\begin{aligned} \bigl(x-(-2)\bigr)^2 + \bigl(y-0\bigr)^2 &= 3^2 \\ \Leftrightarrow \qquad (x+2)^2 + y^2 &= 9. \end{aligned}$$



P.3.5 Bestäm mittpunkt och radie till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x = 3$.

Vi vill skriva om cirkelns ekvation i standardform och därefter direkt kunna avläsa mittpunkt och radie. Med standardform menar vi

$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2,$$

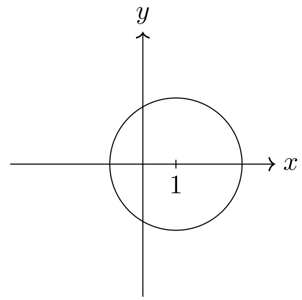
där (x_c, y_c) är cirkelns mittpunkt och r är dess radie.

Med hjälp av kvadratkompletteringsformeln

$$x^2 + px = \bigl(x + \tfrac{p}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{p}{2}\bigr)^2$$

kan vi samla alla x i en kvadratterm,

$$x^2 - 2x = \bigl(x + \tfrac{-2}{2}\bigr)^2 - \bigl(\tfrac{-2}{2}\bigr)^2 = (x-1)^2 - 1.$$



Cirkelns ekvation kan alltså skrivas

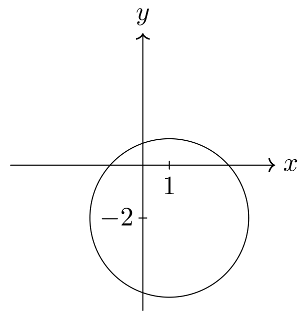
$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 1 + y^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 + y^2 &= 2^2. \end{aligned}$$

Nu kan vi avläsa cirkelns mittpunkt $(1,0)$ och radie 2.

P.3.7 Bestäm mittpunkt och radie till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$.

Vi skriver om cirkelns ekvation i standardform genom att kvadratkomplettera x- och y-termerna,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= (x-1)^2 - 1, \\ y^2 + 4y &= (y+2)^2 - 4. \end{aligned}$$



Alltså är cirkelns ekvation

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 &= 4 \\ \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 9 = 3^2. \end{aligned}$$

Vi kan nu avläsa att cirkelns mittpunkt är $(1,-2)$ och att dess radie är 3.

P.3.9 Beskriv området som bestäms av olikheten $x^2 + y^2 > 1$.

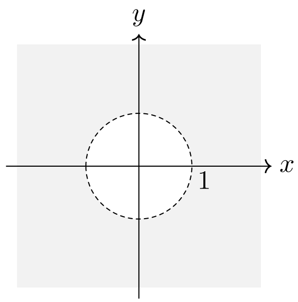
En punkt (x, y) tillhör området om den uppfyller olikheten

$$x^2 + y^2 > 1. \tag{$*$}$$

Om vi betraktar de punkter (x, y) som *inte* uppfyller olikheten så uppfyller de istället den omvända olikheten

$$x^2 + y^2 \le 1. \tag{$\dagger$}$$

Vi vet att mängden som svarar mot $(\dagger)$ är en disk med mittpunkt i origo och radie 1. De punkter som uppfyller $(*)$ är därför alla punkter utanför denna disk.



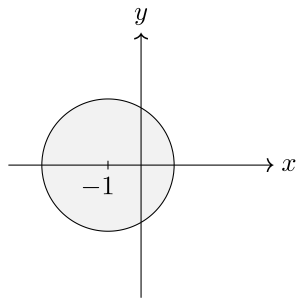
Vi har ritat cirkeln streckad eftersom den inte tillhör det gråa området.

P.3.11 Beskriv området som bestäms av olikheten $(x+1)^2 + y^2 \le 4$.

Olikheten kan skrivas som

$$\big(x - (-1)\big)^2 + (y - 0)^2 \le 2^2,$$

och då ser vi direkt att området består av alla punkter innanför (och på) cirkeln med mittpunkt i $(-1, 0)$ och radie 2.

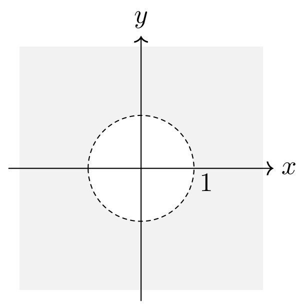


Att cirkeln är heldragen betyder att punkter på cirkeln också tillhör det gråa området.

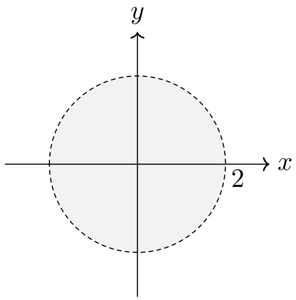
P.3.13 Beskriv området som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 > 1$ och $x^2 + y^2 < 4$.

Området består av alla punkter (x, y) som uppfyller båda olikheterna.

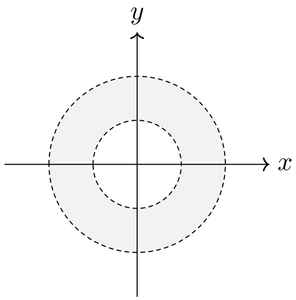
De punkter som uppfyller den första olikheten $x^2 + y^2 > 1$ ligger alla utanför enhetscirkeln.



De punkter som uppfyller den andra olikheten $x^2 + y^2 < 4$ ligger alla innanför cirkeln med mittpunkt i origo och radie 2.



För att en punkt ska uppfylla båda olikheterna måste den alltså ligga mellan enhetscirkeln och cirkeln med radie 2.



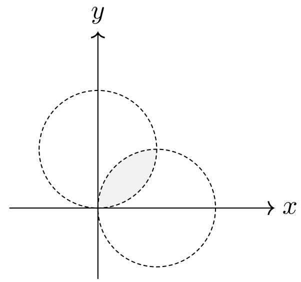
P.3.15 Beskriv området som bestäms av olikheterna $x^2 + y^2 < 2x$ och $x^2 + y^2 < 2y$.

Vi skriver först om de två olikheterna i standardform med hjälp av kvadratkomplettering,

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$$
$$y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$$

vilket ger

$$(x-1)^2 + y^2 < 1, \qquad (1)$$
$$x^2 + (y-1)^2 < 1. \qquad (2)$$

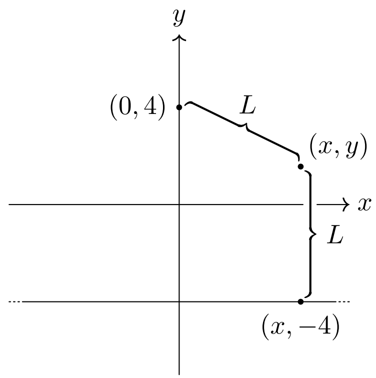


Olikhet (1) ger alla punkter som ligger innanför cirkeln med mittpunkt i $(1, 0)$ och radie 1, medan olikhet (2) ger alla punkter som ligger innanför cirkeln med mittpunkt i $(0, 1)$ och radie 1.

För att en punkt ska uppfylla båda olikheterna måste den ligga innanför båda cirklarna.

P.3.21 Bestäm ekvationen för den parabel som har brännpunkt i $(0, 4)$ och styrlinjen $y = -4$.

En punkt (x, y) ligger på parabeln om dess avstånd till brännpunkten är lika med dess avstånd till styrlinjen.



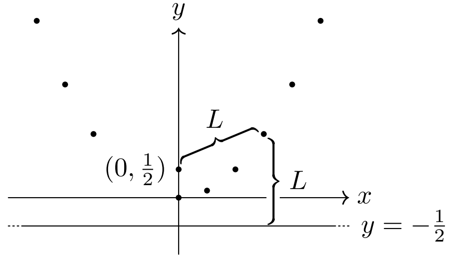
För att (x, y) ska tillhöra parabeln måste alltså

$$(x-0)^2 + (y-4)^2 = (x-x)^2 + \bigl(y-(-4)\bigr)^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 - 8y + 16 = 0^2 + y^2 + 8y + 16 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \tfrac{1}{16}x^2.$$

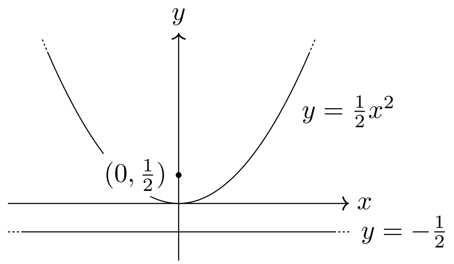
P.3.25 Bestäm brännpunkt och styrlinje till parabeln $y = x^2/2$, och skissera parabeln, brännpunkten och styrlinjen.

En allmän tumregel för en parabel med ekvationen $y = x^2/4p$ är att den har brännpunkt i $(0, p)$ och styrlinje $y = -p$.

I vårt fall är $p = \frac{1}{2}$, och därmed är brännpunkten $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ och styrlinjen är $y = -\frac{1}{2}$. För att skissera parabeln kan man välja några punkter som ligger på lika avstånd från brännpunkten och stylinjen,



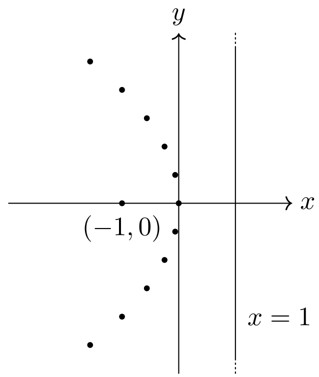
och sedan förbinda dessa punkter med en kurva.

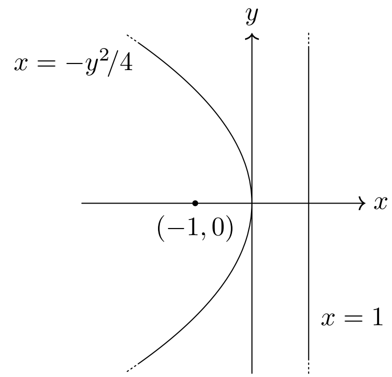


P.3.27 Bestäm brännpunkt och styrlinje till parabeln $x = -y^2/4$, och skissera parabeln, brännpunkten och styrlinjen.

En parabel med ekvationen $x = y^2/4p$ har brännpunkt i $(p, 0)$ och styrlinje $x = -p$. Detta följer direkt genom att ge x och y ombytta roller i ekvationen $y = x^2/4p$.

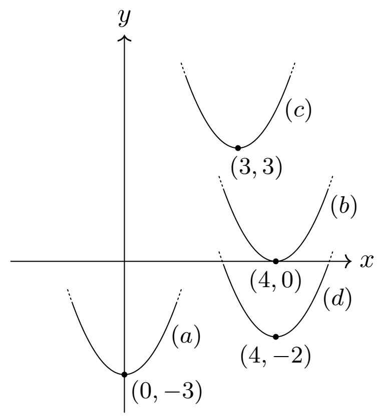
I vårt fall är $p = -1$, och brännpunkten är $(-1, 0)$ och styrlinjen är $x = 1$. Vi ritar ut några punkter som har samma avstånd till brännpunkten som till styrlinjen, och förbinder punkterna med en kurva.



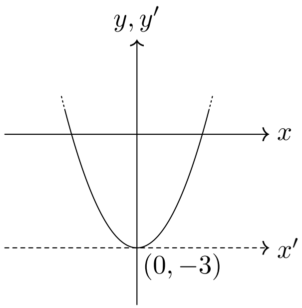


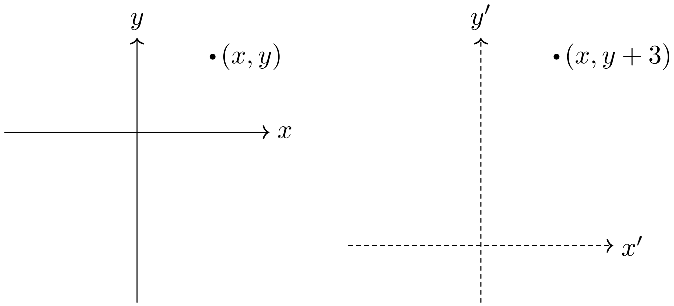
P.3.29 Figuren till höger visar grafen till $y = x^2$ i fyra translaterade versioner.

Bestäm ekvationerna för dessa fyra parabler.



a) Vi använder två koordinatsystem.
Dels det ursprungliga x, y-systemet, dels ett x', y'-system som följt med parabeln i translationen. Eftersom x', y'-systemet translaterats tillsammans med parabeln ges parabeln av ekvationen $y' = {x'}^2$ i x', y'-systemet.
För att uttrycka parabelns ekvation i x, y-systemet behöver vi ett samband mellan de två systemen. En punkt som har koordinater (x, y) i det ursprungliga systemet har i x', y'-systemet koordinater $(x, y + 3)$.





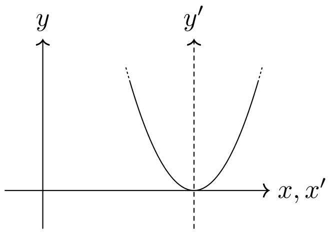
Alltså är

$$x' = x,$$
$$y' = y + 3.$$

Den translaterade parabelns ekvation är

$$y + 3 = x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x^2 - 3.$$

b) På samma sätt som i a-uppgiften inför vi ett x', y'-system som följt med translationen. Sambandet mellan x, y- och x', y'-systemet är

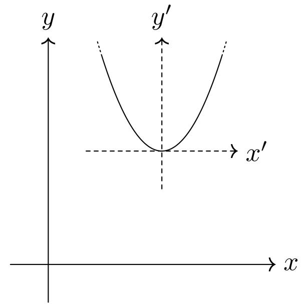


$$x' = x - 4$$
$$y' = y$$

och den translaterade parabelns ekvation är

$$y' = {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = (x-4)^2.$$

c) För c-parabeln inför vi ett koordinatsystem som translaterats 3 enheter åt höger och 3 enheter uppåt. Vi har sambandet

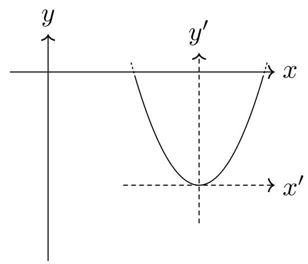


$$x' = x - 3,$$
$$y' = y - 3,$$

mellan de två systemen. Parabelns ekvation blir

$$y' = {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y - 3 = (x-3)^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad y = (x-3)^2 + 3.$$

d) Vi inför ett nytt koordinatsystem som translaterats dels 4 enheter åt höger, dels 2 enheter neråt. Sambandet mellan de två koordinatsystemen är



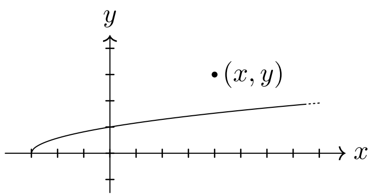
$$x' = x - 4,$$
$$y' = y + 2,$$

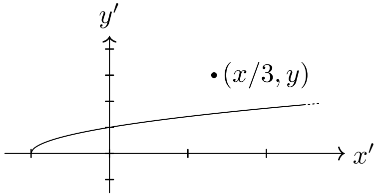
vilket ger att d-parabeln har ekvationen

$$y' = {x'}^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y + 2 = (x-4)^2$$
$$\Leftrightarrow \qquad y = (x-4)^2 - 2.$$

P.3.31 Bestäm ekvationen för grafen till $y = \sqrt{x+1}$ efter att horisontella avstånd multiplicerats med 3.

För den omskalade kvadratrotskurvan inför vi ett nytt x', y'-koordinatsystem där den horisontella skalan expanderats med en faktor 3 så att den nya kvadratrotskurvan har ekvationen $y' = \sqrt{x'+1}$.





Sambandet mellan x, y- och x', y'-koordinater är att en punkt som har x, y-koordinaten (x, y) har i x', y'-systemet koordinaten $(x/3, y)$, d.v.s.

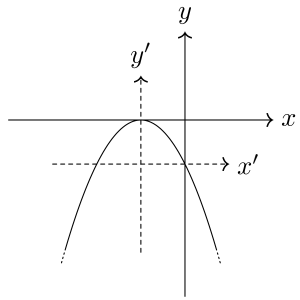
$$\begin{aligned} x' &= x/3, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Den expanderande kurvan har alltså följande ekvation i x, y-systemet

$$y' = \sqrt{x'+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \sqrt{x/3+1}.$$

P.3.35 Bestäm ekvationen för den graf som fås då $y = 1 - x^2$ translateras en enhet neråt och en enhet åt vänster.

Vi inför ett koordinatsystem som följer med den translaterade kurvan.



I x', y'-koordinater har kurvan fortfarande ekvationen

$$y' = 1 - x'^2.$$

Sambandet mellan de två koordinatsystemen är

$$\begin{aligned} x' &= x+1, \\ y' &= y+1. \end{aligned}$$

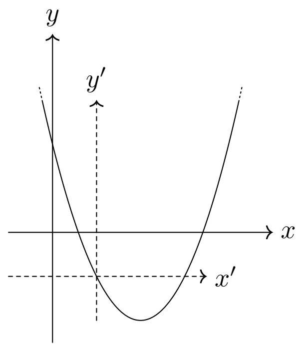
I x, y-koordinater har alltså kurvan ekvationen

$$y' = 1 - x'^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y+1 = 1-(x+1)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -(x+1)^2.$$

P.3.37 Bestäm ekvationen för den graf som fås då $y = (x-1)^2 - 1$ translateras en enhet neråt och en enhet åt höger.

Om vi inför ett koordinatsystem som i figuren till höger, så har den translaterade kurvan ekvationen

$$y' = (x'-1)^2 - 1.$$



Sambandet mellan de två systemen,

$$x' = x - 1,$$
$$y' = y + 1,$$

ger att kurvans ekvation i x, y-koordinater blir

$$\begin{aligned} & y' = (x'-1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y + 1 = (x-1-1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y = (x-2)^2 - 2. \end{aligned}$$

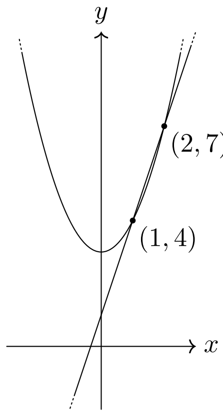
P.3.39 Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $y = x^2 + 3$ och $y = 3x + 1$.

En punkt är en skärningspunkt om den ligger på båda kurvorna, d.v.s. uppfyller båda kurvornas ekvationer

$$y = x^2 + 3, \tag{1}$$
$$y = 3x + 1. \tag{2}$$

(2) insatt i (1) ger

$$\begin{aligned} 3x + 1 = x^2 + 3 \quad & \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & x_\pm = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}. \end{aligned}$$



Från (2) får vi de y-värden som svarar mot de två x-värdena

$$y_+ = 3x_+ + 1 = 7 \quad \text{och} \quad y_- = 3x_- + 1 = 4.$$

Skärningspunkterna är alltså $(1, 4)$ och $(2, 7)$.

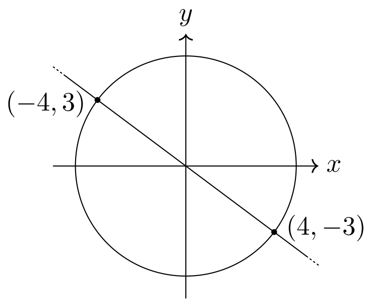
P.3.41 Bestäm skärningspunkterna mellan kurvorna $x^2 + y^2 = 25$ och $3x + 4y = 0$.

Skärningspunkterna ska uppfylla båda kurvornas ekvationer,

$$x^2 + y^2 = 25, \tag{1}$$
$$3x + 4y = 0. \tag{2}$$

Från (2) löser vi ut y, $y = -\frac{3}{4}x$ och stoppar in i (1),

$$\begin{aligned} & x^2 + \left(-\tfrac{3}{4}x\right)^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{25}{16}x^2 = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & x_\pm = \pm 4. \end{aligned}$$



Från $y = -\frac{3}{4}x$ får vi motsvarande y-värden,

$$y_+ = -3 \quad \text{och} \quad y_- = +3.$$

Skärningspunkterna är därmed $(4, -3)$ och $(-4, 3)$.

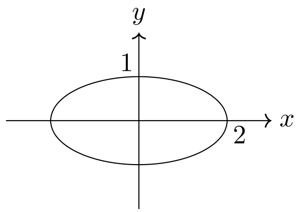
P.3.43 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Vi ser att kurvan är i formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

där $a = 2$ och $b = 1$, vilket betyder att kurvan är en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 2 och 1.



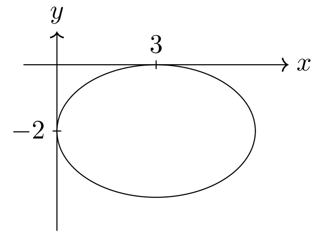
P.3.45 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Uttrycket påminner om en ellips; en summa av två kvadrater är lika med 1. Hade ekvationen istället varit

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

skulle vi haft en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 3 och 2. I vårt fall är denna ellips translaterad med tre enheter åt höger och två enheter neråt.



P.3.47 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen

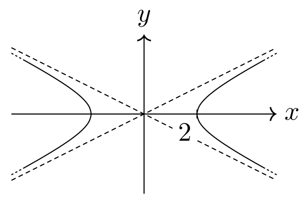
$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

En ekvation i formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

är en hyperbel med asymptoter $y = \pm\frac{b}{a}x$ (linjer som hyperbeln närmar sig då $x \to \pm\infty$) och skärningspunkter $(\pm a, 0)$ med x-axeln.

I vårt fall ser vi att $a = 2$ och $b = 1$. Kurvan är alltså en hyperbel med utseendet



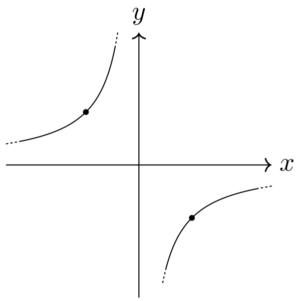
P.3.49 Identifiera och skissera kurvan som ges av ekvationen $xy = -4$.

Den kurva som ges av ekvationen $xy = 1$ är en hyperbel som är roterad $45°$ moturs kring origo, går genom punkterna $(1, 1)$, $(-1, -1)$ och har koordinataxlarna som asymptoter.

Vi skriver om vår ekvation till

$$\left(\frac{x}{-2}\right) \cdot \left(\frac{y}{2}\right) = 1.$$

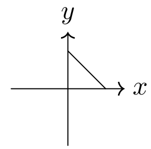
Då ser vi att i koordinatsystemet $x' = -\frac{1}{2}x$, $y' = \frac{1}{2}y$ är vår kurva en roterad hyperbel med koordinataxlarna som asymptoter och går genom punkterna $(-2, 2)$ och $(2, -2)$.



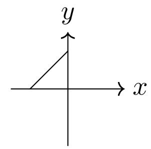
P.3.53 Skissera grafen till $|x| + |y| = 1$.

För att kunna skriva kurvans ekvation utan beloppstecken måste vi undersöka fyra fall.

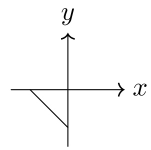
1. $x \geq 0, y \geq 0$:
   I första kvadranten är $|x| = x$ och $|y| = y$, så ekvationen blir $x + y = 1$, vilket är en rät linje som skär x-axeln i $(1, 0)$ och y-axeln i $(0, 1)$.

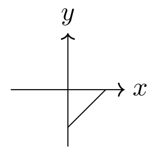
2. $x \leq 0, y \geq 0$:
   I den andra kvadranten är $x \leq 0$ och då är $|x| = -x$ medan $|y| = y$. Ekvationen blir därför $-x + y = 1$, vilket är en rät linje som skär x-axeln i $(-1, 0)$ och y-axeln i $(0, 1)$.

3. $x \leq 0, y \leq 0$:
   I den tredje kvadranten är både x och y negativa varför $|x| = -x$ och $|y| = -y$. Ekvationen är $-x-y = 1$, vilket är en rät linje som skär x-axeln i $(-1, 0)$ och y-axeln i $(0, -1)$.

4. $x \geq 0, y \leq 0$:
   Slutligen, i den fjärde kvadranten är $x = |x|$ och $|y| = -y$. Ekvationen blir $x - y = 1$. Detta är en rät linje som skär x-axeln i $(1, 0)$ och y-axeln i $(0, -1)$.

Sammantaget har ekvationen $|x| + |y| = 1$ grafen