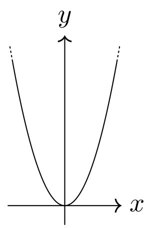
Inledande kurs i matematik, avsnitt P.4

P.4.1 Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $f(x) = 1 + x^2$.

Uttrycket $1 + x^2$ är definierat för alla x, vilket betyder att f:s definitionsmängd är $(-\infty, \infty)$. Om vi ritar upp grafen till funktionen $x \mapsto x^2$,



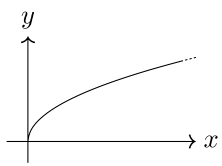
så ser vi att $x \mapsto x^2$ har värdemängden $[0, \infty)$. Funktionen f har en graf som ovanstående förskjuten en enhet uppåt. f:s värdemängd är alltså $[1, \infty)$.

P.4.3 Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $G(x) = \sqrt{8 - 2x}$.

För att $\sqrt{8 - 2x}$ ska vara definierad måste uttrycket under kvadratroten vara icke-negativ, d.v.s.

$$8 - 2x \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq 4.$$

Funktionen G:s definitionsmängd är alltså $(-\infty, 4]$. Ritar vi upp funktionen $x \mapsto \sqrt{x}$,



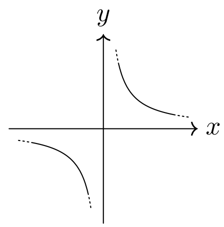
så ser vi att den har värdemängden $[0, \infty)$. Eftersom funktionen G har utseendet $\sqrt{\text{någonting}}$ där "någonting" antar alla icke-negativa värden, är G:s värdemängd också $[0, \infty)$.

P.4.4 Bestäm definitionsmängd och värdemängd till funktionen $F(x) = 1/(x - 1)$.

Funktionen F är definierad överallt utom där nämnaren är noll, d.v.s. överallt utom där

$$x - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.$$

Definitionsmängden är därmed de två intervallen $(-\infty, 1)$ och $(1, \infty)$. Funktionen $x \mapsto 1/x$ har grafen



och värdemängden $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

F har också utseendet $F(x) = \frac{1}{\text{någonting}}$ där "någonting" antar alla värden utom noll. F:s värdemängd är därför de två intervallen $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

P.4.13 Vilka symmetrier har grafen till

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}?$$

Speciellt, är f jämn eller udda?

Vi undersöker först om f är jämn eller udda.

1. Om vi har att $f(-x) = f(x)$ för alla x, då är f en jämn funktion.
2. Om vi har att $f(-x) = -f(x)$ för alla x, då är f en udda funktion.

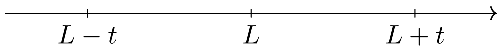
Vi har att

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x).$$

Alltså är f udda.

Funktionen f har en symmetri kring värdet $x = L$ om f antar samma värde (eller samma värde med motsatt tecken) i symmetriska punkter kring $x = L$.

Om $x = L+t$ är en punkt till höger om $x = L$, då är $x = L-t$ den symmetriska punkten till vänster om $x = L$.



Vi ska alltså undersöka om det finns något L så att

$$f(L+t) = f(L-t) \quad \text{för alla } t,$$

eller

$$f(L+t) = -f(L-t) \quad \text{för alla } t.$$

Vi kontrollerar om något sådant L finns.

1. Vi undersöker om

$$\begin{aligned}
f(L+t) = \frac{L+t}{(L+t)^2-1} &= f(L-t) = \frac{L-t}{(L-t)^2-1} \\
\Leftrightarrow \quad (L+t)\big((L-t)^2-1\big) &= (L-t)\big((L+t)^2-1\big) \\
\Leftrightarrow \quad L^3 + Lt^2 - 2L^2t - L + L^2t + t^3 - 2Lt^2 - t & \\
&= L^3 + Lt^2 + 2L^2t - L - L^2t - t^3 - 2Lt + t.
\end{aligned}$$

Vi samlar allt i ena ledet

$$2t^3 - 2(L^2-1)t = 0, \quad \text{för alla } t.$$

Detta polynom är *inte* lika med noll för alla t, oavsett hur vi väljer L. Alltså finns ingen symmetri av typen $f(L+t) = f(L-t)$.

2. Vi undersöker om

$$\begin{aligned}
f(L+t) = \frac{L+t}{(L+t)^2-1} &= -f(L-t) = -\frac{L-t}{(L-t)^2-1} \\
\Leftrightarrow \quad (L+t)\big((L-t)^2-1\big) &= -(L-t)\big((L+t)^2-1\big) \\
\Leftrightarrow \quad L^3 + Lt^2 - 2L^2t - L + L^2t + t^3 - 2Lt^2 - t & \\
&= -L^3 - Lt^2 - 2L^2t + L + L^2t + t^3 + 2Lt - t.
\end{aligned}$$

Vi samlar allt i ena ledet

$$-2L\,t^2 + 2L(L^2-1) = 0, \quad \text{för alla } t.$$

Ett polynom är identiskt noll omm (om och endast om) dess koefficienter alla är noll, d.v.s.

$$\begin{aligned} -2L &= 0 \\ 2L(L^2-1) &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad L = 0.$$

Funktionen har alltså endast en udda symmetri kring $L = 0$ (vilket vi redan visste).

P.4.14 Vilka symmetrier har grafen till

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}?$$

Speciellt, är f jämn eller udda?

Funktionen f är symmetrisk kring $x = L$ om

1. $f(L+t) = f(L-t)$, för alla t, eller
2. $f(L+t) = -f(L-t)$, för alla t.

Vi undersöker om och för vilka L dessa symmetrier inträffar.

1. Vi undersöker om

$$\begin{aligned} f(L+t) = \frac{1}{(L+t)^2-1} = f(L-t) = \frac{1}{(L-t)^2-1} \\ \Leftrightarrow \quad & (L+t)^2 - 1 = (L-t)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & L^2 + 2Lt + t^2 - 1 = L^2 - 2Lt + t^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 4Lt = 0, \quad \text{för alla } t. \end{aligned}$$

Detta polynom är identiskt noll om dess koefficienter är noll, d.v.s. $L = 0$. Funktionen är alltså jämn kring $x = 0$.

2. Vi undersöker om

$$\begin{aligned} f(L+t) = \frac{1}{(L+t)^2-1} = -f(L-t) = -\frac{1}{(L-t)^2-1} \\ \Leftrightarrow \quad & (L+t)^2 - 1 = -(L-t)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & L^2 + 2Lt + t^2 - 1 = -L^2 + 2Lt - t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2t^2 + 2(L^2 - 1) = 0, \quad \text{för alla } t. \end{aligned}$$

Detta polynom är inte identiskt noll oavsett hur L väljs. Alltså finns inga udda symmetrier för f.

Från punkt 1 har vi att f är en jämn funktion.

P.4.19 Vilka symmetrier har grafen till $f(x) = |x^3|$? Speciellt, är f jämn eller udda?

Vi ska undersöka om det finns något $x = L$ så att

1. $f(L+t) = f(L-t)$, för alla t, eller
2. $f(L+t) = -f(L-t)$, för alla t.

Om punkt 1 är uppfylld är f en jämn funktion kring $x = L$. Om punkt 2 är uppfylld är f en udda funktion kring $x = L$. Vi undersöker om sådant L finns.

1. Vi har

$$f(L+t) = \left|(L+t)^3\right| = f(L-t) = \left|(L-t)^3\right|.$$

Vi ser direkt att om $t = -L$ då är $\left|(L+t)^3\right| = 0$ medan $\left|(L-t)^3\right| = 8L^3$. För att båda uttryck ska vara lika måste $L = 0$. Även med detta val av L återstår att undersöka om $f(L+t) = f(L-t)$ för övriga värden på t. Vi har

$$f(0-t) = \left|(-t)^3\right| = \left|-t^3\right| = \left|t^3\right| = f(0+t).$$

Med andra ord är $f(L-t) = f(L+t)$ omm $L = 0$.

2. Vi har att

$$f(L+t) = \left|(L+t)^3\right| = -f(L-t) = -\left|(L-t)^3\right|.$$

Uttrycket $\left|(L+t)^3\right|$ är alltid icke-negativt medan uttrycket $-\left|(L-t)^3\right|$ alltid är icke-positivt. Den enda möjligheten att de två uttrycken skulle vara lika vore om de båda är 0 för alla t, men det är de inte. Funktionen saknar alltså udda symmetrier.

Från punkt 1 ser vi att f är en jämn funktion.

P.4.20 Vilka symmetrier har grafen till $f(x) = |x+1|$? Speciellt, är f jämn eller udda?

Vi har att undersöka om det finns något $x = L$ så att

1. $f(L+t) = f(L-t)$, för alla t, eller

2. $f(L+t) = -f(L-t), \quad$ för alla t.

Vi undersöker dessa två fall.

1. Vi har att

$$f(L+t) = |L+t+1| = f(L-t) = |L-t+1|.$$

Om $t = -1-L$ då är $|L+t+1| = 0$ och $|L-t+1| = |2(L+1)|$. För att vi överhuvudtaget ska ha någon symmetri måste alltså $L+1 = 0$ eller $L = -1$.

Om $L = -1$ då är

$$f(-1+t) = \big|-1+t+1\big| = |t|$$
$$f(-1-t) = \big|-1-t+1\big| = |-t| = |t|.$$

Alltså är f symmetrisk kring $L = -1$.

2. Vi har att

$$f(L+t) = |L+t+1| = -f(L-t) = -|L-t+1|$$
$$\Leftrightarrow \qquad |L+t+1| + |L-t+1| = 0, \quad \text{för alla } t.$$

Eftersom vänsterledet är en summa av två icke-negativa tal måste

$$|L+t+1| = |L-t+1| = 0, \quad \text{för alla } t,$$

vilket inte inträffar, oavsett L:s värde. Funktionen saknar alltså udda symmetrier.

Från punkterna ovan ser vi att f är varken jämn eller udda (inga symmetrier kring $L = 0$).

P.4.22 Vilka symmetrier har grafen till $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$? Speciellt, är f jämn eller udda?

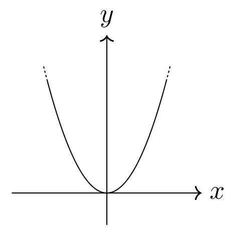
Vi kan skriva f som

$$f(x) = |x-1|,$$

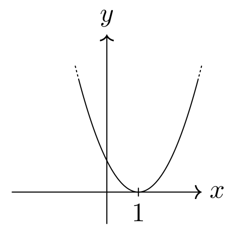
(se sidan 8 i kursboken) och då blir uppgiften nästan identisk med P.4.20. Samma typ av undersökningar ger att f har en jämn symmetri kring $L = 1$ och är varken jämn eller udda.

P.4.26 Skissera grafen till $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

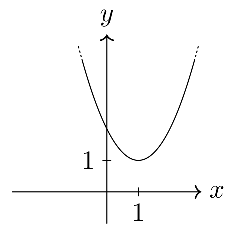
Om vi börjar med funktionen $x \mapsto x^2$ så har den grafen,



Förskjuter vi grafen en enhet åt höger får vi grafen till $x \mapsto (x-1)^2$.

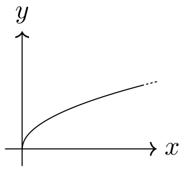


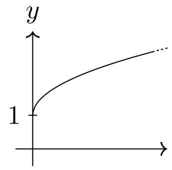
Slutligen ger en förskjutning med en enhet uppåt grafen till $x \mapsto (x-1)^2 + 1$.



P.4.29 Skissera grafen till $f(x) = \sqrt{x} + 1$.

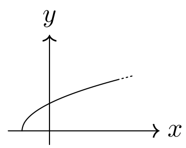
Grafen till $x \mapsto \sqrt{x}$ har utseendet i figuren till vänster. Genom att förskjuta grafen en enhet uppåt får vi grafen till $f(x) = \sqrt{x} + 1$.





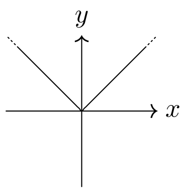
P.4.30 Skissera grafen till $f(x) = \sqrt{x+1}$.

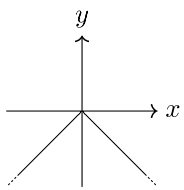
Vi får grafen till f genom att förskjuta grafen till $x \mapsto \sqrt{x}$ en enhet åt vänster.



P.4.31 Skissera grafen till $f(x) = -|x|$.

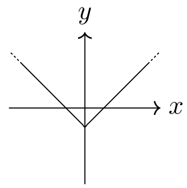
Funktionen $x \mapsto |x|$ har grafen i figuren till vänster. Speglar vi grafen i x-axeln får vi grafen till $f(x) = -|x|$.





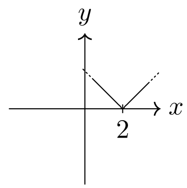
P.4.32 Skissera grafen till $f(x) = |x| - 1$.

Vi får grafen till f genom att förskjuta grafen till $x \mapsto |x|$ en enhet neråt.



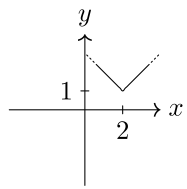
P.4.33 Skissera grafen till $f(x) = |x - 2|$.

Om vi förskjuter grafen till $x \mapsto |x|$ två enheter åt höger får vi grafen till $x \mapsto |x - 2|$.



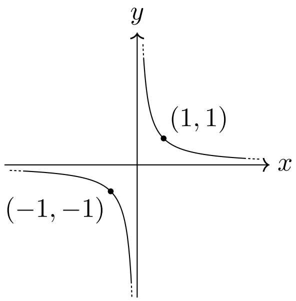
P.4.34 Skissera grafen till $f(x) = 1 + |x - 2|$.

Grafen till $x \mapsto |x - 2|$ får vi genom att förskjuta grafen till $x \mapsto |x|$ två enheter åt höger. Genom att addera 1, $x \mapsto |x - 2| + 1$, förskjuts grafen ytterligare en enhet uppåt.

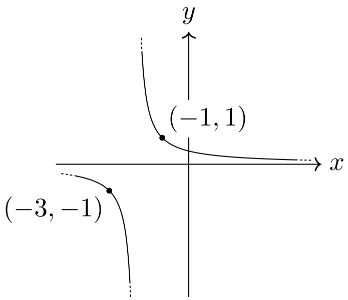


P.4.35 Skissera grafen till $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$.

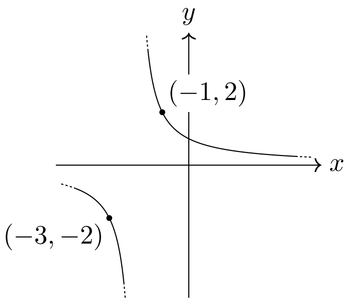
Funktionen $x \mapsto 1/x$ har utseendet



Förskjuter vi grafen två enheter till vänster får vi grafen till $x \mapsto \frac{1}{x+2}$.



Multiplikation med 2 ger att alla y-koordinater multipliceras med faktorn 2. Grafen får då utseendet

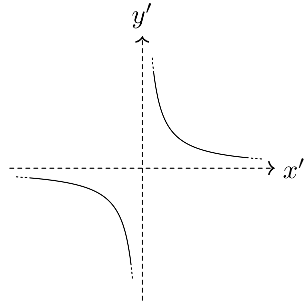


P.4.37 Skissera grafen till $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

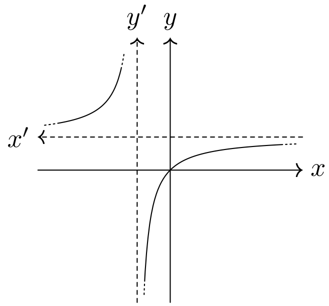
Vi skriver om funktionen något

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Om vi inför ett nytt koordinatsystem (x', y') där $x' = -x-1$ och $y' = y-1$. Då ges f:s graf av ekvationen $y' = 1/x'$.

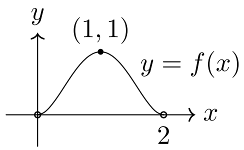


I det ursprungliga koordinatsystemet blir detta

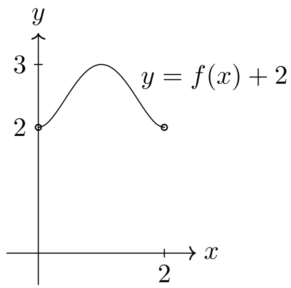


P.4.39 Funktionen f har definitionsmängden $[0, 2]$ och värdemängden $[0, 1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto f(x) + 2$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



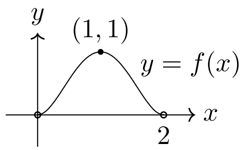
När vi adderar 2 till högerledet i $y = f(x)$ så förskjuter vi f:s graf med två enheter uppåt.



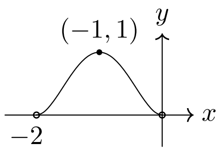
Definitionsmängden till $x \mapsto f(x) + 2$ är fortfarande $[0, 2]$ medan värdemängden förskjuts två enheter uppåt till $[2, 3]$.

P.4.41 Funktionen f har definitionsmängden $[0, 2]$ och värdemängden $[0, 1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto f(x + 2)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Om vi ersätter x med $x + 2$ i $y = f(x)$ så förskjuts grafen två enheter åt vänster. Funktionen $x \mapsto f(x + 2)$ har alltså grafen.

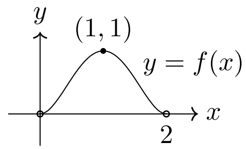


Eftersom $f(x)$ är definierad då $0 \leq x \leq 2$ så är $f(x+2)$ definierad då $0 \leq x+2 \leq 2$, d.v.s. då $-2 \leq x \leq 0$. Definitionsmängden är alltså $[-2, 0]$.

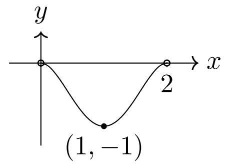
Eftersom funktionen är $x \mapsto f(\text{någonting})$ där ”någonting” antar värden i $[0, 2]$ har $x \mapsto f(x + 2)$ samma värdemängd som $f(x)$, d.v.s. $[0, 1]$.

P.4.43 Funktionen f har definitionsmängden $[0, 2]$ och värdemängden $[0, 1]$ samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto -f(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



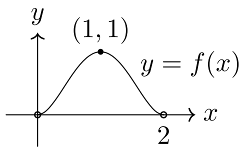
Med ett minustecken framför $f(x)$ speglas grafen i x-axeln. Funktionen $x \mapsto f(x)$ har alltså grafen.



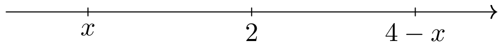
Där $x \mapsto f(x)$ är definierad är också $x \mapsto -f(x)$ definierad. Alltså har $x \mapsto -f(x)$ definitionsmängden $[0, 2]$. Värdemängden till samma funktion är $[-1, 0]$ eftersom när $f(x)$ antar värdet b så antar $-f(x)$ värdet $-b$.

P.4.45 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

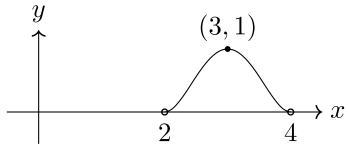
Skissera funktionen $x \mapsto f(4-x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Övergången från x till $4-x$ blir tydligare om vi skriver $x = 2-(2-x)$ och $4-x = 2+(2-x)$. Vi ser då att x och $4-x$ är varandras spegelbilder kring $x=2$.



Grafen till $x \mapsto f(4-x)$ blir alltså spegelbilden av grafen till f kring $x=2$.

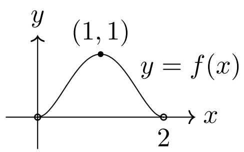


Funktionen $x \mapsto f(4-x)$ är definierad för $0 \le 4-x \le 2$ eller $2 \le x \le 4$. Definitionsmängden är alltså $[2,4]$.

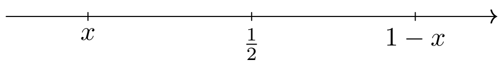
Eftersom $x \mapsto f(4-x)$ är $x \mapsto f(\text{någonting})$ där $0 \le$ "någonting" ≤ 2, har $x \mapsto f(4-x)$ samma värdemängd som $f(x)$, d.v.s. $[0,1]$.

P.4.46 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

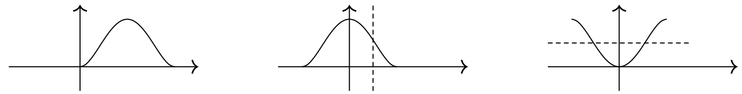
Skissera funktionen $x \mapsto 1 - f(1-x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Uttrycket $1-x$ ersätter x med dess spegelbild kring $\frac{1}{2}$ (det ser vi genom att skriva $x = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - x\right)$ och $1 - x = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)$).



Denna spegling har vi både i x- och y-led. $x \mapsto 1 - f(1-x)$ har alltså grafen.



$x \mapsto f(x)$ $\qquad$ $x \mapsto f(1-x)$ $\qquad$ $x \mapsto 1 - f(1-x)$

Funktionen $x \mapsto 1 - f(1-x)$ är definierad för $0 \le 1-x \le 2$ eller $-1 \le x \le 1$. Definitionsmängden är alltså $[-1,1]$.

När $-1 \le x \le 1$ är

$$0 \le 1-x \le 2 \quad \text{och} \quad 0 \le f(1-x) \le 1.$$

Detta ger att

$$-1 \le -f(1-x) \le 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \le 1 - f(1-x) \le 1.$$

Alltså har $x \mapsto 1 - f(1-x)$ värdemängden $[0,1]$.