Inledande kurs i matematik, avsnitt P.5

P.5.7 Om $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 3$, bestäm följande uttryck

a)	$f \circ g(x)$,	b)	$g\bigl(f(0)\bigr)$,
c)	$f\bigl(g(x)\bigr)$,	d)	$g \circ f(x)$,
e)	$f \circ f(-5)$,	f)	$g\bigl(g(2)\bigr)$,
g)	$f\bigl(f(x)\bigr)$,	h)	$g \circ g(x)$.

a) $f \circ g(0) = f\bigl(g(0)\bigr) = \{\, g(0) = 0^2 - 3 = -3 \,\} = f(-3) = -3 + 5 = 2$

b) $g\bigl(f(0)\bigr) = \{\, f(0) = 0 + 5 = 5 \,\} = g(5) = 5^2 - 3 = 22$

c) $f\bigl(g(x)\bigr) = f(x^2 - 3) = (x^2 - 3) + 5 = x^2 + 2$

d) $g \circ f(x) = g\bigl(f(x)\bigr) = g(x + 5) = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 22$

e) $f \circ f(-5) = f\bigl(f(-5)\bigr) = \{\, f(-5) = -5 + 5 = 0 \,\} = f(0) = 0 + 5 = 5$

f) $g\bigl(g(2)\bigr) = \{\, g(2) = 2^2 - 3 = 1 \,\} = g(1) = 1^2 - 3 = -2$

g) $f\bigl(f(x)\bigr) = f(x + 5) = (x + 5) + 5 = x + 10$

h) $g \circ g(x) = g\bigl(g(x)\bigr) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

P.5.9 Om $f(x) = 1/(1 - x)$ och $g(x) = \sqrt{x - 1}$, bestäm följande funktioner och deras definitionsmängder,

a) $f \circ f(x)$,

b) $f \circ g(x)$,

c) $g \circ f(x)$,

d) $g \circ g(x)$.

Vi ska först ta reda på definitionsmängd och värdemängd till f och g.

- Definitionsmängd till f

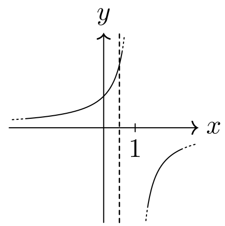
  Funktionen $f(x) = 1/(1 - x)$ är definierad överallt utom där nämnaren är noll, d.v.s. överallt utom i $x = 1$.

- Definitionsmängd till g

  Funktionen $g(x) = \sqrt{x - 1}$ är definierad överallt där $x - 1 \ge 0$, d.v.s. $x \ge 1$.

- Värdemängd till f

  Grafen till f är grafen till $x \mapsto 1/x$ speglad i $x = \frac{1}{2}$ ($x \mapsto 1 - x$ är en spegling i $x = \frac{1}{2}$), d.v.s.

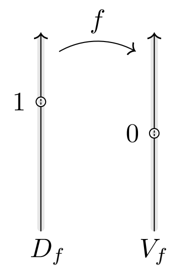
  

  Funktionen f har därför samma värdemängd som $x \mapsto 1/x$, d.v.s. alla värden utom 0.

- Värdemängd till g

  Funktionen g har utseendet $\sqrt{\cdots}$ där uttrycket under rottecknet varierar över de icke-negativa talen. Alltså har g samma värdemängd som $x \mapsto \sqrt{x}$, d.v.s. $[0, \infty)$.

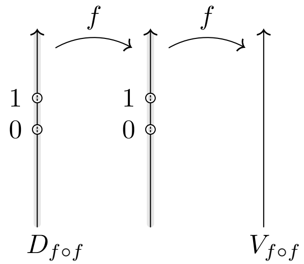
a) Vi börjar med att rita upp hur punkterna avbildas med f en gång.



Om vi nu ska applicera f ytterligare en gång måste vi undanta punkten 1 från V_f (f ej definierad i 1), vilket betyder att vi måste ta bort alla punkter i D_f som avbildas på värdet 1. De x som ger värdet 1 uppfyller

$$1 = f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0.$$

Alltså

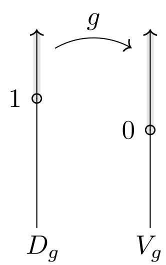


Definitionsmängden till $f \circ f$ är alltså alla punkter utom 0 och 1, eller skrivet med intervall $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Det analytiska uttrycket för $f \circ f$ blir

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}.$$

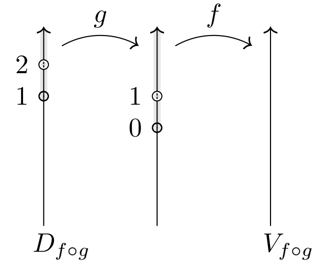
b) I sammansättningen $f \circ g$ utförs först funktionen g.



För att vi sedan ska kunna sammansätta med f får inte värdet 1 ingå i V_g, d.v.s. vi måste sortera bort de punkter i D_g som avbildas på värdet 1. Sådana punkter uppfyller

$$1 = g(x) = \sqrt{x-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2.$$

Alltså

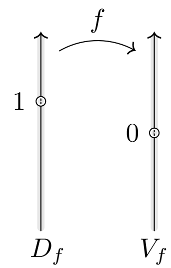


Vi kan alltså definiera $f \circ g$ på intervallen $[1, 2) \cup (2, \infty)$.

Det analytiska uttrycket för $f \circ g$ blir

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x-1}\,\big) = \frac{1}{1 - \sqrt{x-1}}.$$

c) Först utförs funktionen f.

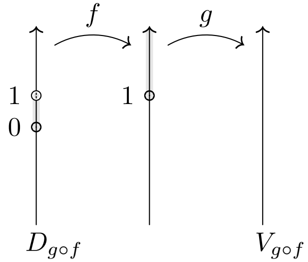


För att sedan kunna sammansätta med g får vi inte ha några värden i V_f mindre än 1 (i de punkterna är g inte definierad). Vi måste alltså ta bort de punkter i D_f som avbildas till värden mindre än 1, d.v.s. alla x sådana att

$$f(x) = \frac{1}{1-x} < 1.$$

Vi löser denna olikhet på samma sätt som i uppgift P.1.19 och får intervallen $(-\infty, 0)$ och $(1, \infty)$.

Alltså måste vi undanta alla punkter utom de mellan 0 och 1.

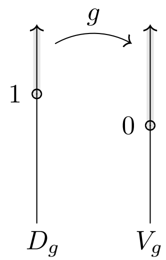


Definitionsmängden till $g \circ f$ är alltså $[0, 1)$.

Det analytiska uttrycket för $g \circ f$ blir

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \sqrt{\frac{1}{1-x} - 1} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

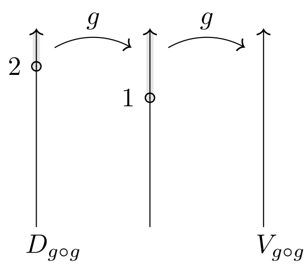
d) Funktionen g avbildar punkter enligt



För att vi ska kunna använda g igen krävs att inga värden i V_g är mindre än 1, d.v.s. vi måste plocka bort de punkter i D_g som avbildas på värden mindre än 1. Vi ska alltså ta bort de x som uppfyller

$$g(x) = \sqrt{x-1} < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < 2.$$

Vi har därmed



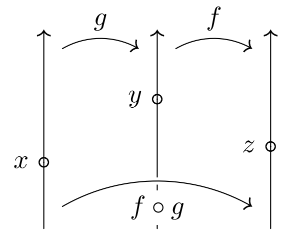
Definitionsmängden till $g \circ g$ är alltså $[2, \infty)$. Det analytiska uttrycket för $g \circ g$ blir

$$g \circ g(x) = g\big(g(x)\big) = g\big(\sqrt{x-1}\,\big) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}.$$

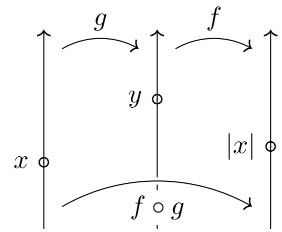
P.5.13 Bestäm vad som ska stå i den gråa luckan

$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
$\sqrt{x}$		$\lvert x\rvert$

Vi ritar upp hur de olika funktionerna avbildar en punkt.



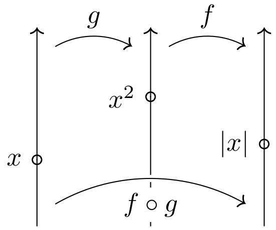
Eftersom vi vet att $f \circ g(x) = |x|$ så är $z = |x|$, och vi har förljande figur.



Vilket värde måste y har för att $f(y) = |x|$?

$$f(y) = \sqrt{y} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y = x^2.$$

Alltså har vi figuren

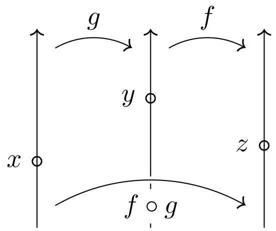


Nu ser vi att $g(x) = x^2$.

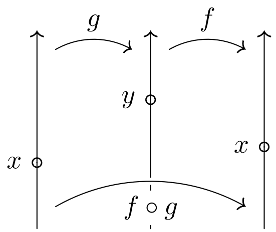
P.5.15 Bestäm vad som ska stå i den gråa luckan.

$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
$(x+1)/x$		x

Vi ritar upp hur f och $f \circ g$ avbildar en punkt x.



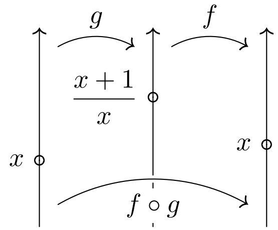
Eftersom $f \circ g(x) = x$ har vi att $z = x$.



Vad ska nu y vara för att $f(y) = x$?

$$f(y) = \frac{y+1}{y} = x \qquad \Leftrightarrow \qquad y + 1 = xy \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{1}{y-1}.$$

y ska alltså vara lika med $1/(y-1)$. Vi får figuren



Nu ser vi att $g(x) = 1/(x-1)$.

P.5.16 Bestäm vad som ska stå i den gråa luckan.

$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
	$x-1$	$1/x^2$

Vi vet att

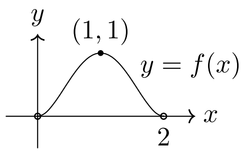
$$f \circ g(x) = 1/x^2 \quad \text{och} \quad f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-1).$$

Om vi kallar $y = x - 1$ så är $x = y + 1$ och

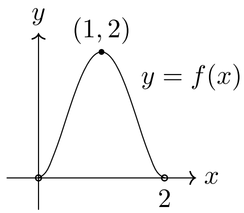
$$f(y) = \frac{1}{(y+1)^2}.$$

P.5.19 Funktionen f har definitionsmängden $[0, 2]$ och värdemängden $[0, 1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto 2f(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.



Genom att multiplicera $f(x)$ med 2 expanderar vi grafen med en faktor 2 i y-led.



Funktionen $x \mapsto 2f(x)$ är definierad överallt där f är definierad, d.v.s. definitionsmängden till $x \mapsto 2f(x)$ är $[0, 2]$.

Eftersom vi har att

$$0 \le f(x) \le 1 \qquad \text{för } 0 \le x \le 2,$$

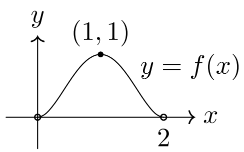
så är

$$0 \le 2f(x) \le 2 \qquad \text{för } 0 \le x \le 2.$$

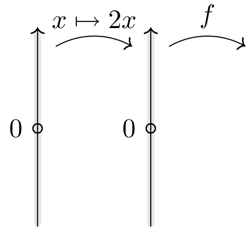
Funktionen $x \mapsto 2f(x)$ har alltså värdemängden $[0, 2]$.

P.5.21 Funktionen f har definitionsmängden $[0, 2]$ och värdemängden $[0, 1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto f(2x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

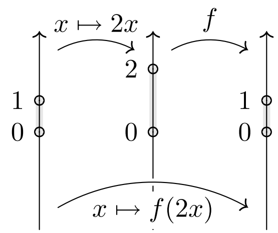


Funktionen $x \mapsto f(2x)$ kan ses som sammansatt av två funktioner, dels $x \mapsto 2x$ och dels $x \mapsto f(x)$,



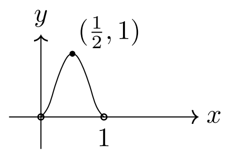
men för att vi ska kunna använda f i det sista steget får vi inte ha värden utanför intervallet $[0, 2]$ efter funktionen $x \mapsto 2x$. Vi måste alltså ta bort alla punkter som avbildas med $x \mapsto 2x$ utanför $[0, 2]$. Vi ska alltså bara behålla de x som uppfyller

$$0 \le 2x \le 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \le x \le 1.$$



Funktionen $x \mapsto f(2x)$ har alltså definitionsmängden $[0, 1]$ och värdemängden $[0, 1]$.

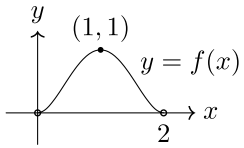
Den första funktionen $x \mapsto 2x$ innebär att vi expanderar intervallet $[0, 1]$ till $[0, 2]$ och sedan använder f. Grafen till $x \mapsto f(2x)$ blir alltså ihoptryckt till intervallet $[0, 1]$ på x-axeln.



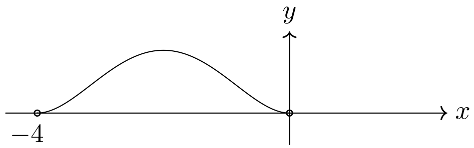
Anm. Denna lösning är kanske lite väl omständig, men lösningen illustrerar iallafall hur man kan dela upp en funktion i enklare delar och analysera dessa.

P.5.23 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto 1 + f(-x/2)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

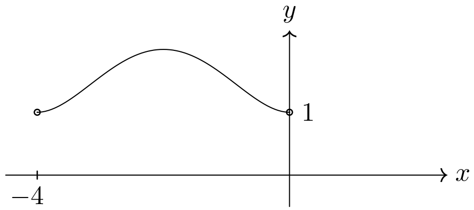


När vi ersätter x med $-x/2$ i $y = f(x)$ så förlängs grafen i x-led med en faktor 2 och minustecknet speglar grafen i y-axeln.



$x \mapsto f(-x/2)$

När vi sedan adderar 1 till $x \mapsto f(-x/2)$ så förskjuts grafen en enhet uppåt.



$x \mapsto 1 + f(-x/2)$

Funktionen är definierad för

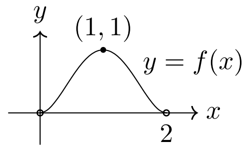
$$0 \le -x/2 \le 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad -4 \le x \le 0,$$

d.v.s. definitionsmängden är $[-4,0]$.

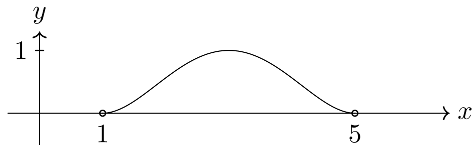
Eftersom vi vet att $0 \le f(\cdots) \le 1$ är $1 \le 1 + f(-x/2) \le 2$. Värdemängden är alltså $[1,2]$.

P.5.24 Funktionen f har definitionsmängden $[0,2]$ och värdemängden $[0,1]$, samt grafen till höger.

Skissera funktionen $x \mapsto 2f\big((x-1)/2\big)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

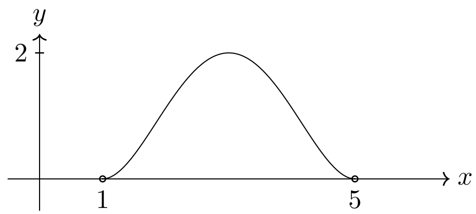


När vi ersätter x med $(x-1)/2$ expanderas grafen med en faktor 2 i x-led och sedan en förskjutning med en enhet åt höger.



$x \mapsto f\big((x-1)/2\big)$

Multiplikationen med 2 gör att grafen förlängs i y-led med en faktor 2.



$x \mapsto 2\,f\big((x-1)/2\big)$

Funktionen $x \mapsto 2f\big((x-1)/2\big)$ är definierad då

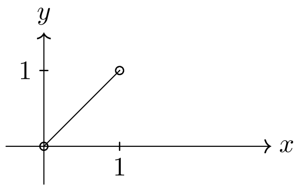
$$0 \le \frac{x-1}{2} \le 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \le x \le 5.$$

Definitionsmängden är alltså $[1,5]$.

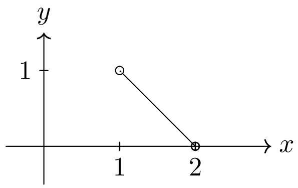
Eftersom vi vet att $0 \le f(\cdots) \le 1$ så är $0 \le 2f\big((x-1)/2\big) \le 2$. Värdemängden är $[0,2]$.

P.5.25 Skissera grafen till $f(x) = \begin{cases} x & \text{om } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x & \text{om } 1 < x \le 2. \end{cases}$

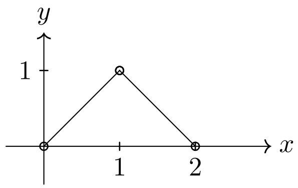
Funktionen f är lika med x i intervallet $[0, 1]$.



I intervallet $(1, 2]$ är f lika med $2 - x$.



Över hela definitionsmängden $[0, 2]$ har alltså f grafen.



Notera att f visserligen ges av två olika uttryck på olika delar av definitionsmängden men f är *en* funktion.

P.5.27 Bestäm alla reella konstanter A och B för vilka funktionen $F(x) = Ax + B$ uppfyller

a) $F \circ F(x) = F(x)$ för alla x,

b) $F \circ F(x) = x$ för alla x.

a) Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL} &= F \circ F(x) = F\big(F(x)\big) = F(Ax + B) \\ &= A(Ax + B) + B = A^2x + AB + B, \\ \text{HL} &= Ax + B. \end{aligned}$$

Eftersom VL ska vara lika med HL för alla x måste koefficienten framför x i båda led vara lika. Samma sak gäller konstanttermerna,

$$\begin{aligned} A^2 &= A \\ AB + B &= B \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{eller} \quad A = 0.$$

Vi har alltså två typer av lösningar $\{A = 1, B = 0\}$ och $\{A = 0, B \text{ godtycklig}\}$.

b) Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \{\,\text{se a-uppgiften}\,\} = A^2x + AB + B, \\ \text{HL} &= x. \end{aligned}$$

VL = HL för alla x ger att

$$\begin{aligned} A^2 &= 1 \\ AB + B &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{och} \quad A = -1.$$

Det finns alltså två typer av lösningar $\{A = 1, B = 0\}$ och $\{A = 1, B \text{ godtycklig}\}$.

P.5.33 Antag att f är en jämn funktion, g är en udda funktion, och att både f och g är definierade på hela reella tallinjen $\boldsymbol{R}$.

Undersök om följande funktioner är jämna, udda eller ingetdera.

$$f+g,\quad f\cdot g,\quad f/g,\quad g/f,\quad f^2=f\cdot f,\quad g^2=g\cdot g,$$
$$f\circ g,\quad g\circ f,\quad f\circ f,\quad g\circ g.$$

Att f är jämn betyder att

$$f(-x)=f(x)\quad \text{för alla } x. \tag{$*$}$$

Att g är udda betyder att

$$g(-x)=-g(x)\quad \text{för alla } x. \tag{$\dagger$}$$

Vi ska nu undersöka om funktionerna i uppgiften är jämna, udda eller ingetdera.

Som en första grov såll kan vi ta två konkreta exempel på f och g, t.ex.

$$f(x)=x^2\quad \text{och}\quad g(x)=x,$$

och något x-värde, t.ex. $x=7$. Om någon av kombinationerna i uppgiftstexten inte uppfyller $(*)$ eller $(\dagger)$ för dessa speciella f, g och x, då kan kombinationen inte vara jämn respektive udda (eftersom då krävs ju att $(*)$ respektive $(\dagger)$ är uppfylld för alla f, g och x).

$f+g$: Vi har att

$$\begin{aligned} f(-x)+g(-x)&=(-7)^2+(-7)=42,\\ \pm\bigl(f(x)+g(x)\bigr)&=\pm\bigl(7^2+7\bigr)=\pm 56.\end{aligned}$$

Alltså kan $f+g$ varken vara jämn eller udda.

$f\cdot g$: Vi har att

$$\begin{aligned} f(-x)\cdot g(-x)&=(-7)^2\cdot(-7)=-343,\\ \pm f(x)\cdot g(x)&=\pm 7^2\cdot 7=\pm 343.\end{aligned}$$

$f\cdot g$ skulle kunna vara udda, men det kan ju också vara en slump. Däremot kan $f\cdot g$ inte vara jämn.

f/g: Vi har att

$$\begin{aligned} f(-x)/g(-x)&=(-7)^2/(-7)=-7,\\ \pm f(x)/g(x)&=\pm 7^2/7=\pm 7.\end{aligned}$$

f/g skulle kunna vara udda, men inte jämn.

g/f: Vi har att

$$\begin{aligned} g(-x)/f(-x)&=(-7)/(-7)^2=-\tfrac{1}{7},\\ \pm g(x)/f(x)&=\pm 7/7^2=\pm\tfrac{1}{7}.\end{aligned}$$

g/f skulle kunna vara udda, men inte jämn.

$f\cdot f$: Vi har att

$$\begin{aligned} f(-x)\cdot f(-x)&=(-7)^2\cdot(-7)^2=2401,\\ \pm f(x)\cdot f(x)&=\pm 7^2\cdot 7^2=\pm 2401.\end{aligned}$$

$f\cdot f$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$g\cdot g$: Vi har att

$$\begin{aligned} g(-x)\cdot g(-x)&=(-7)\cdot(-7)=49,\\ \pm g(x)\cdot g(x)&=\pm 7\cdot 7=\pm 49.\end{aligned}$$

$g\cdot g$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$f\circ g$: Vi har att

$$\begin{aligned} f\circ g(-x)&=f\bigl(g(-7)\bigr)=f(-7)=(-7)^2=49,\\ \pm f\circ g(x)&=\pm f\bigl(g(7)\bigr)=\pm f(7)=\pm 7^2=\pm 49.\end{aligned}$$

$f\circ g$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$g\circ f$: Vi har att

$$\begin{aligned} g\circ f(-x)&=g\bigl(f(-7)\bigr)=g(49)=49,\\ \pm g\circ f(x)&=\pm g\bigl(f(7)\bigr)=\pm g(49)=\pm 49.\end{aligned}$$

$g\circ f$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$f \circ f:$ Vi har att

$$f \circ f(-x) = f\big(f(-7)\big) = f(49) = 49^2 = 2401,$$
$$\pm f \circ f(x) = \pm f\big(f(-7)\big) = \pm f(49) = \pm 49^2 = \pm 2401.$$

$f \circ f$ skulle kunna vara jämn, men inte udda.

$g \circ g:$ Vi har att

$$g \circ g(-x) = g\big(g(-7)\big) = g(-7) = -7,$$
$$\pm g \circ g(x) = \pm g\big(g(7)\big) = \pm g(7) = \pm 7.$$

$g \circ g$ skulle kunna vara udda, men inte jämn.

Vi har nu sållat bort några omöjliga fall. Nästa steg är att vi försöker bevisa de fall som inte kunde uteslutas ovan (de är troligtvis sanna).

$f \cdot g:$ Vi vet: (1) $f(-x) = f(x)$ för alla x,
(2) $g(-x) = -g(x)$ för alla x.
Vill visa: $(*)$ $f \cdot g$ udda, d.v.s. $f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$.
Vi har

$$\text{VL av } (*) = f(-x) \cdot g(-x) = \{\,(1),(2)\,\} = f(x) \cdot \big(-g(x)\big)$$
$$= -f(x) \cdot g(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \cdot g$ udda.

I de följande fallen kan vi vara lite mer kortfattade.

$f/g:$ Vill visa: $(*)$ $f(-x)/g(-x) = -f(x)/g(x)$

$$\text{VL av } (*) = f(-x)/g(-x) = -f(x)/g(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är f/g udda.

$g/f:$ Vill visa: $(*)$ $g(-x)/f(-x) = -g(x)/f(x)$

$$\text{VL av } (*) = g(-x)/f(-x) = -g(x)/f(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är g/f udda.

$f \cdot f:$ Vill visa: $(*)$ $f(-x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot f(x)$

$$\text{VL av } (*) = f(-x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot f(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \cdot f$ jämn.

$g \cdot g:$ Vill visa: $(*)$ $g(-x) \cdot g(-x) = g(x) \cdot g(x)$

$$\text{VL av } (*) = g(-x) \cdot g(-x) = \big(-g(x)\big) \cdot \big(-g(x)\big)$$
$$= g(x) \cdot g(x) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $g \cdot g$ jämn.

$f \circ g:$ Vill visa: $(*)$ $f \circ g(-x) = f \circ g(x)$

$$\text{VL av } (*) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \circ g$ jämn.

$g \circ f:$ Vill visa: $(*)$ $g \circ f(-x) = g \circ f(x)$

$$\text{VL av } (*) = g\big(f(-x)\big) = g\big(f(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $g \circ f$ jämn.

$f \circ f:$ Vill visa: $(*)$ $f \circ f(-x) = f \circ f(x)$

$$\text{VL av } (*) = f\big(f(-x)\big) = f\big(f(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $f \circ f$ jämn.

$g \circ g:$ Vill visa: $(*)$ $g \circ g(-x) = -g \circ g(x)$

$$\text{VL av } (*) = g\big(g(-x)\big) = g\big(-g(x)\big) = -g\big(g(x)\big) = \text{HL av } (*).$$

Alltså är $g \circ g$ udda.

P.5.35a Låt f vara en funktion med ett origosymmetriskt definitionsområde. Visa att f är en summa av en jämn och en udda funktion

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

där E är en jämn funktion (even) och O är en udda funktion (odd).

Tips: Låt $E(x) = \big(f(x) + f(-x)\big)/2$. Visa att $E(-x) = E(x)$, varför E är jämn. Visa sedan att $O(x) = f(x) - E(x)$ är udda.

Vi låter

$$\begin{aligned} E(x) &= \big(f(x) + f(-x)\big)/2, \\ O(x) &= f(x) - E(x) = f(x) - \big(f(x) + f(-x)\big)/2 \\ &= \big(f(x) - f(-x)\big)/2. \end{aligned}$$

Då är

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

och vi visar att

E jämn : Vi ska visa att

$$E(-x) = -E(x). \qquad (*)$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL av } (*) &= E(-x) = \big(f(-x) + f\big(-(-x)\big)\big)/2 \\ &= \big(f(x) + f(-x)\big)/2 = \text{HL av } (*) \end{aligned}$$

Alltså är E jämn.

O udda : Vi ska visa att

$$O(-x) = -O(x). \qquad (*)$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \text{VL av } (*) &= O(-x) = \big(f(-x) - f\big(-(-x)\big)\big)/2 \\ &= -\big(f(x) - f(-x)\big)/2 = \text{HL av } (*) \end{aligned}$$

Alltså är O udda.