Inledande kurs i matematik, avsnitt 3.2

3.2.1 Förenkla uttrycket $\dfrac{3^3}{\sqrt{3^5}}$.

Vi skriver om nämnaren i potensform,

$$\frac{3^3}{\sqrt{3^5}} = \frac{3^3}{\left(3^5\right)^{1/2}} = \frac{3^3}{3^{5/2}} = 3^{3-5/2} = 3^{1/2} = \sqrt{3}.$$

3.2.2 Förenkla uttrycket $2^{1/2}8^{1/2}$.

Vi använder att $8 = 2^3$ och får

$$2^{1/2}8^{1/2} = 2^{1/2} \cdot \left(2^3\right)^{1/2} = 2^{1/2} \cdot 2^{3/2} = 2^{1/2+3/2} = 2^2 = 4.$$

3.2.3 Förenkla uttrycket $\left(x^{-3}\right)^{-2}$.

Om vi antar att $x > 0$ ger potenslagarna att

$$\left(x^{-3}\right)^{-2} = x^{(-3)\cdot(-2)} = x^6.$$

3.2.4 Förenkla uttrycket $\left(\frac{1}{2}\right)^x 4^{x/2}$.

Vi har att $4 = 2^2$ och får därför att

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^x 4^{x/2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x (2^2)^{x/2} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x 2^{2\cdot x/2} = \tfrac{1^x}{2^x} \cdot 2^x = \tfrac{1}{2^x} \cdot 2^x = 1.$$

3.2.5 Förenkla utttrycket $\log_5 125$.

Vi har att $125 = 5^3$. Logaritmlagarna ger att $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \cdot \log_5 5 = 3 \cdot 1 = 3$.

3.2.6 Förenkla uttrycket $\log_4\left(\frac{1}{8}\right)$.

Vi har att $\frac{1}{8} = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{4}\,4} = \frac{1}{4^{3/2}}$. Alltså är

$$\log_4\left(\tfrac{1}{8}\right) = \log_4\left(\tfrac{1}{4^{3/2}}\right) = \log_4 4^{-3/2} = -\tfrac{3}{2} \cdot \log_4 4 = -\tfrac{3}{2} \cdot 1 = -\tfrac{3}{2}.$$

3.2.8 Förenkla uttrycket $2^{\log_4 8}$.

Från uppgift 3.2.6 vet vi att

$$\log_4 \tfrac{1}{8} = -\tfrac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \log_4 8 = \log_4\left(\tfrac{1}{8}\right)^{-1} = -\log_4 \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{2}.$$

Alltså är

$$2^{\log_4 8} = 2^{3/2} = 2^{1+1/2} = 2 \cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}.$$

3.2.9 Förenkla uttrycket $10^{-\log_{10}(1/x)}$.

Logaritm- och potenslagarna ger att $10^{-\log_{10}(1/x)} = 10^{\log_{10}(1/x)^{-1}} = 10^{\log_{10} x} = x$ om $x > 0$.

3.2.11 Förenkla uttrycket $(\log_a b)(\log_b a)$.

Basbytesformeln ger att

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

Alltså är

$$(\log_a b)(\log_b a) = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b a = 1.$$

3.2.12 Förenkla uttrycket $\log_x \bigl(x(\log_y y^2)\bigr)$.

Vi har att $\log_y y = 1$ varför

$$\log_x \bigl(x(\log_y y^2)\bigr) = \log_x (x \cdot 2) = \log_x x + \log_x 2 = 1 + \log_x 2.$$

3.2.15 Förenkla uttrycket $\log_6 9 + \log_6 4$.

Logaritmlagarna ger att

$$\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \cdot \log_6 6 = 2 \cdot 1 = 2.$$

3.2.16 Förenkla uttrycket $2\log_3 12 - 4\log_3 6$.

Logaritmlagarna ger att

$$\begin{aligned} 2\log_3 12 - 4\log_3 6 &= \log_3 12^2 - \log_3 6^4 = \log_3 \frac{12^2}{6^4} \\ &= \log_3 \frac{1}{3^2} = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

3.2.17 Förenkla uttrycket

$$\log_a (x^4 + 3x^2 + 2) + \log_a (x^4 + 5x^2 + 6) - 4 \log_a \sqrt{x^2 + 2}.$$

Den tredje termen kan vi skriva som

$$4 \log_a \sqrt{x^2 + 2} = \log_a \bigl(\sqrt{x^2 + 2}\,\bigr)^4 = \log_a (x^2 + 2)^2.$$

Logaritmlagarna ger att uttrycket i uppgiftstexten är lika med

$$\log_a \frac{(x^4 + 3x^2 + 2)(x^4 + 5x^2 + 6)}{(x^2 + 2)^2}.$$

Det kan nu vara så att det finns gemensamma faktorer i bråket ovan, och i sådant fall kan vi förenkla uttrycket ytterligare.

För att se om vi har gemensamma faktorer behöver vi faktorisera de två uttrycken i täljaren.

$x^4 + 3x^2 + 2:$ Eftersom x endast förekommer i potenser av x^2 sätter vi $t = x^2$ och skriver polynomet som

$$t^2 + 3t + 2. \tag{$*$}$$

Om a och b är nollställen till detta polynom, då har vi att

$$t^2 + 3t + 2 = (t - a)(t - b).$$

Nollställena till $(*)$ fås med sedvanliga formler och de är -1 och -2. Alltså är

$$t^2 + 3t + 2 = (t + 1)(t + 2),$$

eller uttryckt i x,

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2).$$

$x^4 + 5x^2 + 6:$ Vi sätter $t = x^2$ och får

$$t^2 + 5t + 6.$$

Detta andragradsuttrycket har nollställena -3 och -2, och därmed är

$$t^2 + 5t + 6 = (t+3)(t+2),$$

eller uttryckt i x,

$$(x^2+3)(x^2+2).$$

Uttrycket i uppgiftstexten kan alltså skrivas som

$$\begin{aligned} \log_a \frac{(x^2+1)(x^2+2)\cdot(x^2+3)(x^2+2)}{(x^2+2)^2} &= \log\bigl((x^2+1)(x^2+3)\bigr) \\ &= \log\bigl(x^4+4x^2+3\bigr). \end{aligned}$$

3.2.18 Förenkla uttrycket

$$\log_\pi(1-\cos x) + \log_\pi(1+\cos x) - 2\,\log_\pi \sin x.$$

Förutsatt att argumentet till den tredje logaritmen är positiv (de övriga två argumentet är positiva utom i enstaka punkter) så ger logaritmlagarna att

$$\begin{aligned} &\log_\pi(1-\cos x) + \log_\pi(1+\cos x) - 2\,\log_\pi \sin x \\ &\quad = \log\bigl((1-\cos x)(1+\cos x)\bigr) - \log_\pi \sin^2 x \\ &\quad = \log_\pi(1-\cos^2 x) - \log_\pi \sin^2 x = \log_\pi \sin^2 x - \log_\pi \sin^2 x = 0. \end{aligned}$$

3.2.29 Lös ekvationen $\log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) = \frac{1}{2}$.

Vi kan skriva högerledet som

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot\log_4 4 = \log_4 4^{1/2} = \log_4 2$$

och flytta över till vänsterledet. Vi får då att

$$0 = \log_4(x+4) - 2\log_4(x+1) - \log_4 2 = \log_4 \frac{x+4}{2(x+1)^2}.$$

Logaritmfunktionen antar värdet 0 endast då dess argument är 1, d.v.s. då

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{2(x+1)^2} = 1 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 2(x+1)^2 - (x+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad 2x^2 + 3x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Denna andragradare har lösningarna -2 och $-\frac{1}{2}$.

Ekvationen i uppgiftstexten har alltså lösningarna $x = -2$ och $x = \frac{1}{2}$.

3.2.30 Lös ekvationen $2\log_3 x + \log_9 x = 10$.

Enklast är att uttrycka alla termer som 3-logaritmer av något,

$$\begin{aligned} \log_9 x &= \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 x}{2} = \log_3 \sqrt{x}, \\ 10 &= \log_3(3^{10}). \end{aligned}$$

Ekvationen kan alltså skrivas (efter omflyttning av alla termer till ena ledet),

$$0 = \log_3 x^2 + \log_3 \sqrt{x} - \log_3(3^{10}) = \log_3\Bigl(\frac{x^2\sqrt{x}}{3^{10}}\Bigr).$$

Logaritmen antar värdet 0 endast då dess argument är 1, d.v.s.

$$\frac{x^2\sqrt{x}}{3^{10}} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^{5/2} = 3^{10} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = (3^{10})^{2/5} = 3^4 = 81.$$

Alltså har ekvationen i uppgiftstexten lösningen $x = 81$.