Avsnitt 7, Optimering

701 Bestäm Maclaurinpolynomet av andra graden till funktionen

a) $f(x,y) = \ln(1+x+y^2)$,

b) $f(x,y) = e^{xy}\cos(x+y)$.

a) Vi löser uppgiften med två metoder. I praktiska räkningar är metod 2 enklare, men var uppmärksam på att det är nödvändigt att använda Taylorpolynomens entydighetssats i det fallet.

Metod 1 (Taylors formel)

Taylors formel ger

$$f(0+h_1, 0+h_2) = f(0,0) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + O(r^3),$$

där r är en förkortning för $\|(x,y)\|$ och där vi i origo har

$$f(0,0) = \ln(1+0+0^2) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\ln(1+x+y^2)\Big|_{x=y=0} = \frac{1}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\ln(1+x+y^2)\Big|_{x=y=0} = \frac{2y}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = -\frac{1}{(1+x+y^2)^2}\Big|_{x=y=0} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = -\frac{2y}{(1+x+y^2)^2}\Big|_{x=y=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{1+x+y^2}\Big|_{x=y=0} = \frac{2\cdot(1+x+y^2) - 2y\cdot 2y}{(1+x+y^2)^2}\Big|_{x=y=0} = 2.$$

Vi får alltså att

$$\begin{aligned} f(0+h_1, 0+h_2) &= 0 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + O\big(\|(h_1,h_2)\|\big)^3 \\ &= h_1 - \tfrac{1}{2}h_1^2 + h_2^2 + O\big(\|(h_1,h_2)\|\big)^3, \end{aligned}$$

eller om vi vill använda x och y som variabelnamn

$$f(x,y) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + O\big(\|(x,y)\|\big)^3.$$

Metod 2 (Substitution)

Maclaurinutvecklingen av $\ln(1+t)$ lyder

$$\ln(1+t) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3).$$

I närheten av origo är uttrycket $x+y^2$ litet så om vi ersätter t med $x+y^2$ i utvecklingen ovan fås

$$\ln(1+x+y^2) = (x+y^2) - \tfrac{1}{2}(x+y^2)^2 + O\big((x+y^2)^3\big).$$

Polynomuttrycket i ordotermen har grad 3 så vi kan ersätta ordotermen med $O(r^3)$, där $r = \|(x,y)\|$. Termer utanför ordotermen med grad 3 eller högre kan vi baka in i ordo,

$$\begin{aligned} &= x + y^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy^2 - \tfrac{1}{2}y^4 + O(r^3) \\ &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + O(r^3). \end{aligned}$$

Enligt Taylorutvecklingens entydighetssats måste

$$\ln(1+x+y^2) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + O(r^3)$$

vara funktionens Maclaurinutveckling av grad 2.

b) Funktionen kan delas upp i två faktorer e^{xy} och $\cos(x+y)$. Vi ska Maclaurinutveckla faktorerna var för sig och sen på slutet slå ihop dem till en Maclaurinutveckling av produkten.

e^{xy}: Vi börjar med Maclaurinutvecklingen av e^t,

$$e^t = 1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3),$$

och eftersom xy går mot noll i origo så kan vi ersätta t med xy och få

$$e^{xy} = 1 + xy + \tfrac{1}{2}x^2y^2 + O(x^3y^3) = 1 + xy + O(r^3).$$

Vi nöjer oss med att Maclaurinutveckla till grad 2 eftersom svaret ändå bara ska vara upp till grad 2.

$\cos(x+y)$: Vi Maclaurinutvecklar $\cos t$,

$$\cos t = 1 - \tfrac{1}{2}t^2 + O(t^3),$$

och substituerar $t = x + y$,

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= 1 - \tfrac{1}{2}(x+y)^2 + O\bigl((x+y)^3\bigr)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2 + O(r^3).\end{aligned}$$

Vi får nu att produkten av e^{xy} och $\cos(x+y)$ blir

$$\begin{aligned}e^{xy}\cos(x+y) &= \bigl(1 + xy + O(r^3)\bigr)\bigl(1 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2 + O(r^3)\bigr)\\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - xy - \tfrac{1}{2}y^2 + xy - \tfrac{1}{2}x^3y - x^2y^2 - \tfrac{1}{2}xy^3 + O(r^3),\end{aligned}$$

där vi använt räknereglerna

$$\begin{aligned}x^m y^n O(r^k) &= O(r^k),\\ O(r^m)O(r^n) &= O(r^{m+n}),\\ O(r^m) + O(r^n) &= O(r^m), \quad \text{om } m \le n.\end{aligned}$$

Vi förenklar nu uttrycket genom att baka in termer av grad 3 eller högre i ordotermen,

$$e^{xy}\cos(x+y) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 + O(r^3).$$

Enligt Taylorpolynomens entydighetssats är detta andra ordningens Maclaurinutveckling av funktionen.

702 Bestäm Taylorpolynomet av andra graden till funktionen

a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ i punkten $(1,0)$,

b) $f(x,y) = \ln(x+y^2)$ i punkten $(1,1)$.

a) Vi ska alltså utveckla funktionen så att den kan skrivas som

$$f(x,y) = p_2(x,y) + O(r^3),$$

där p_2 är ett polynom av grad 2 och r är en förkortning för $\|(x-1,y)\|$.

Vad vi först observerar är att funktionen är en produkt av två enklare funktioner

$$(x+y)\cdot\frac{1}{x-y},$$

så vi utvecklar faktorerna var för sig och multiplicerar ihop allt på slutet.

$x+y$: Faktorn $x+y$ är redan ett polynom så den har en enkel Taylorutveckling kring $(1,0)$,

$$x + y = 1 + (x-1) + y = 1 + (x-1) + y + O(r^3).$$

$\dfrac{1}{x-y}$: Om vi skriver om faktorn som

$$\frac{1}{1 + (x-1-y)}$$

så ser vi att den gråa termen går mot noll när $(x,y)\to(1,0)$. Vi Maclaurinutvecklar därför

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + O(t^3)$$

och substituerar sen $t = x - 1 - y$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+(x-1-y)} &= 1 - \bigl((x-1) - y\bigr) + \bigl((x-1)+y\bigr)^2 + O(r^3)\\ &= 1 - (x-1) + y + (x-1)^2 - 2(x-1)y + y^2 + O(r^3).\end{aligned}$$

Ihopmultiplicerat får vi

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x+y)\cdot\frac{1}{x-y}\\
&= \bigl(1+(x-1)+y+O(r^3)\bigr)\cdot\bigl(1-(x-1)+y+(x-1)^2\\
&\quad -2(x-1)y+y^2+O(r^3)\bigr)\\
&= 1-(x-1)+y+(x-1)^2-2(x-1)y+y^2+O(r^3)\\
&\quad +(x-1)-(x-1)^2+(x-1)y+O(r^3)\\
&\quad +y-(x-1)y+y^2+O(r^3)\\
&= 1+2y-2(x-1)y+2y^2+O(r^3).
\end{aligned}$$

Enligt Taylorpolynomens entydighetssats är detta Taylorutvecklingen av funktionen i punkten $(1,0)$.

b) Eftersom vi ska Taylorutveckla funktionen kring $(x,y)=(1,1)$ börjar vi med att uttrycka funktionen i variablerna $x-1$ och $y-1$. Vi har då att

$$\begin{aligned}
x &= 1+(x-1),\\
y^2 &= (y-1)^2+2y-1 = (y-1)^2+2(y-1)+1.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\ln(x+y^2) = \ln\bigl(2+(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2\bigr).$$

Den gråa termen är noll i $(1,1)$ så vi Maclaurinutvecklar

$$\begin{aligned}
\ln(2+t) &= \ln\bigl(2(1+\tfrac{1}{2}t)\bigr) = \ln 2+\ln(1+\tfrac{1}{2}t)\\
&= \ln 2+\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}\bigl(\tfrac{1}{2}t\bigr)^2+O(t^3)
\end{aligned}$$

och substituerar $t=(x-1)+2(y-1)+(y-1)^2$,

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \ln 2+\tfrac{1}{2}\bigl((x-1)+2(y-1)+(y-1)^2\bigr)\\
&\quad -\tfrac{1}{8}\bigl((x-1)+2(y-1)+(y-1)^2\bigr)^2+O(r^3)\\
&= \ln 2+\tfrac{1}{2}(x-1)+(y-1)+\tfrac{1}{2}(y-1)^2-\tfrac{1}{8}(x-1)^2\\
&\quad -\tfrac{1}{2}(x-1)(y-1)-\tfrac{1}{2}(y-1)^2+O(r^3)\\
&= \ln 2+\tfrac{1}{2}(x-1)+(y-1)-\tfrac{1}{8}(x-1)^2\\
&\quad -\tfrac{1}{2}(x-1)(y-1)+O(r^3),
\end{aligned}$$

där $r=\|(x-1,y-1)\|$. Enligt Taylorutvecklingens entydighetssats är detta Taylorutvecklingen av funktionen f av andra ordningen i punkten $(1,1)$.

704a Ange det största värdet på n, så att $f(x,y,z)=O(r^n)$, där $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ och

$$f(x,y,z) = \sin x\,\sin y\,\sin z-\sin(x+y+z).$$

Om vi Maclaurinutvecklar funktionen så kan den skrivas som

$$f(x,y,z) = (\text{konstantterm})+(\text{linjära termer})+(\text{kvadratiska termer})+\cdots.$$

Den första nollskilda termens gradtal n i utvecklingen har storleksordningen $O(r^n)$ där exponenten inte kan väljas större. Detta visar att

$$f(x,y,z) = O(r^n).$$

Alla argument till sinus-funktionerna i funktionen f går mot noll, så vi kan utnyttja Maclaurinutvecklingen av $\sin t$,

$$\sin t = t-\tfrac{1}{3!}t^3+\tfrac{1}{5!}t^5+O(t^7)$$

och substituera $t=x$, $t=y$, $t=z$ respektive $t=x+y+z$,

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \bigl(x-\tfrac{1}{6}x^3+\tfrac{1}{120}x^5+O(x^7)\bigr)\cdot\bigl(y-\tfrac{1}{6}y^3+\tfrac{1}{120}y^5+O(y^7)\bigr)\\
&\quad\cdot\bigl(z-\tfrac{1}{6}z^3+\tfrac{1}{120}z^5+O(r^7)\bigr)-\bigl((x+y+z)-\tfrac{1}{6}(x+y+z)^3\\
&\quad +\tfrac{1}{120}(x+y+z)^5+O(r^7)\bigr)\\
&= -x-y-z+O(r^2) = O(r^1).
\end{aligned}$$

Vi måste alltså välja $n=1$.

801b Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Funktionen kan anta lokala extremvärden i följande typer av punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Eftersom f är ett polynom är den differentierbar överallt och dess definitionsmängd är alla (x,y) och saknar därmed rand.

De enda punkter där f kan anta lokala extremvärden är alltså i kritiska punkter, d.v.s. i punkten där

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0). \qquad (*)$$

Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x,$$

så $(*)$ ger ekvationssystemet

$$x^2 - y = 0, \qquad (1)$$
$$y^2 - x = 0. \qquad (2)$$

Löser vi ut y från (1) och stoppar in i (2) fås

$$x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0$$

som har de reella rötterna $x = 0$ och $x = 1$. Med (1) får vi då att de kritiska punkterna till f är $(0,0)$ och $(1,1)$.

Om vi Taylorutvecklar f kring en av de kritiska punkterna får vi

$$\begin{aligned} f &= \text{konstant} + \underbrace{\text{linjära termer}}_{=0} + \text{kvadratiska termer} + O(r^3) \\ &= \text{konstant} + \text{kvadratiska termer} + O(r^3). \end{aligned}$$

Lokalt kring den kritiska punkten har alltså f utseendet

$$f \approx \text{konstant} + \text{kvadratiska termer},$$

så punktens karaktär avgörs av de kvadratiska termerna.

Enligt Taylors formel ges de kvadratiska termerna av

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

där

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Om denna kvadratiska form är

- positiv, då har f ett lokalt minimum i punkten,
- negativ, då har f ett lokalt maximum i punkten,
- både och, då har f en sadelpunkt i punkten.

Vi undersöker nu de kritiska punkterna var för sig.

$(0,0)$: Den kvadratiska formen blir i detta fall

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen är symmetrisk (vilket Hessianen alltid är) så finns det en egenvektorbas där den kvadratiska formen har utseendet

$$\begin{pmatrix} h_1' & h_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1' \\ h_2' \end{pmatrix} = \lambda_1 (h_1')^2 + \lambda_2 (h_2')^2.$$

Notera att bara existensen av en egenvektorbas, som spektralsatsen garanterar, räcker för oss. Vi är inte så intresserade av i vilka riktningar den kvadratiska formen har sina huvudaxlar utan formens tecken är det enda som är intressant.

Från sekularekvationen får vi egenvärdena

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = -3 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = +3.$$

Den kvadratiska formen har alltså utseendet

$$-3(h_1')^2 + 3(h_2')^2$$

i egenvektorbasen. Här ser vi att den kvadratiska formen antar både positiva och negativa värden (positiva värden längs h_2'-riktningen och negativa värden längs h_1'-riktningen).

Den kritiska punkten är alltså en sadelpunkt.

$(1,1)$: Den kvadratiska formen blir

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Precis som för den kritiska punkten i origo bestämmer vi Hessianens egenvärden och därmed dess kanoniska form i egenvektorbasen.

Sekularekvationen ger

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 3 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = 9.$$

Den kanoniska formen blir

$$3(h_1')^2 + 9(h_2')^2,$$

som är positiv vilket betyder att den kritiska punkten är en lokal minimipunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimumvärde $f(1,1) = -1$ i punkten $(1,1)$.

801d Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2.$$

Lokala extremvärden kan antas i någon av följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Funktionen f är ett polynon så fall 2 och 3 ger inga punkter. I kritiska punkter gäller att

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (3x^2 + 4x + y, x + 2y) = (0,0)$$

d.v.s.

$$3x^2 + 4x + y = 0, \tag{1}$$
$$x + 2y = 0. \tag{2}$$

Från (2) får vi $x = -2y$. Detta insatt i (1) ger

$$12y^2 - 8y + y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 0, \quad y = \tfrac{7}{12},$$

och motsvarande x-värden får vi från (2)

$$x = -2 \cdot 0 = 0 \quad \text{respektive} \quad x = -2 \cdot \tfrac{7}{12} = -\tfrac{7}{6}.$$

De kritiska punkterna är alltså $(0,0)$ och $(-\frac{7}{6}, \frac{7}{12})$.

Vi undersöker de kritiska punkternas karaktär genom att bestämma tecknen hos Hessianens egenvärden. Hessianen ges av

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(0,0)$: I punkten $(x,y) = (0,0)$ är Hessianen

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena får vi från sekularekvationen

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 3-\sqrt{2} \quad \text{eller} \quad \lambda_2 = 3+\sqrt{2}.$$

Eftersom båda egenvärdena är positiva är $(0,0)$ en lokal minimipunkt.

$(-\frac{7}{6},\frac{7}{12})$: När $(x,y)=(-\frac{7}{6},\frac{7}{12})$ är Hessianen

$$H_f(-\tfrac{7}{6},\tfrac{7}{12}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{29}, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{29}.$$

Ett egenvärde är negativt (λ_1) och ett egenvärde är positivt (λ_2), vilket betyder att punkten är en sadelpunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimivärde $f(0,0)=0$ i origo.

801h Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - xy - y.$$

Vi har tre typer av punkter att undersöka

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar,
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Vi undersöker de tre fallen

1. Gradienten lika med noll ger

   $$\nabla f = (3x^2 - y, 2y - x - 1) = (0,0)$$

   d.v.s.

   $$3x^2 - y = 0, \qquad (1)$$
   $$2y - x - 1 = 0. \qquad (2)$$

   Från (1) får vi $y = 3x^2$. Detta insatt i (2) ger

   $$6x^2 - x - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -\tfrac{1}{3} \quad \text{eller} \quad x = \tfrac{1}{2}.$$

   Ekvation (1) ger motsvarande y-värden $y=\frac{1}{3}$ respektive $y=\frac{3}{4}$. Vi får de kritiska punkterna $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ och $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$.

2. f är ett polynom och därför differentierbar överallt.
3. f är definierad överallt och saknar därmed randpunkter.

Hessianen till f är

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi kan avgöra de kritiska punkternas karaktär genom tecknen hos Hessianens egenvärden.

$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: I denna punkt är Hessianen

$$H_f\big(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\big) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena är

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = -\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = +\sqrt{5}.$$

Punkten är alltså en sadelpunkt eftersom $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$: Hessianen har värdet

$$H_f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena får vi från sekularekvationen

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Eftersom λ_1 och λ_2 är positiva är punkten en lokal minimipunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimivärde $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = -\frac{7}{16}$ i punkten $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

801k Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x).$$

Ett lokalt extremvärde kan antas i följande typer av punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Eftersom f är ett polynom så ger fall 2 och 3 inga punkter. Vi undersöker därför endast de kritiska punkterna.

Sätter vi gradienten lika med noll fås

$$\begin{aligned} \nabla f &= \big(-2x(y-2x) - 2(y-x^2), 1\cdot(y-2x) + 1\cdot(y-x^2)\big) \\ &= \big(6x^2 - 2xy - 2y, -x^2 - 2x + 2y\big) = (0,0) \end{aligned}$$

d.v.s.

$$6x^2 - 2xy - 2y = 0, \tag{1}$$
$$-x^2 - 2x + 2y = 0. \tag{2}$$

Vi löser ut y från (2),

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + x \tag{3}$$

och vi stoppar in i (1),

$$\begin{aligned} &6x^2 - 2x\big(\tfrac{1}{2}x^2 + x\big) - 2\big(\tfrac{1}{2}x^2 + x\big) = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad & x = 0, \quad x = 1 \quad \text{eller} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Med (3) får vi motsvarande y-värden

$$y = 0, \quad y = \tfrac{3}{2} \quad \text{respektive} \quad y = 4.$$

Det finns alltså tre kritiska punkter $(0,0)$, $(1, \frac{3}{2})$ och $(2,4)$.

Vi bestämmer dessa punkters karaktär med Hessianen

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x - 2y & -2x - 2 \\ -2x - 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$(0,0)$: Hessianen har värdet

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 1-\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 1+\sqrt{5}.$$

Eftersom $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 > 0$ är $(0,0)$ en sadelpunkt.

$(1,\frac{3}{2})$: Hessianen har värdet

$$H_f(1,\tfrac{3}{2}) = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\bigl(11-\sqrt{117}\bigr), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}\bigl(11+\sqrt{117}\bigr).$$

Eftersom $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 > 0$ är $(1,\frac{3}{2})$ en lokal minimipunkt.

$(2,4)$: Hessianen har egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 16-\lambda & -6 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 18\lambda - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 9-\sqrt{85}, \quad \lambda_2 = 9+\sqrt{85}.$$

Eftersom $\lambda_1 < 0$ och $\lambda_2 > 0$ är $(2,4)$ en sadelpunkt.

Funktionen har alltså ett lokalt minimivärde $f(1,\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ i punkten $(1,\frac{3}{2})$.

801m Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + x + y \quad \text{då } xy \neq 0.$$

Lokala extrempunkter finns bland följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsmängden.

Vi kontrollerar de tre fallen.

1. Sätter vi gradienten lika med noll fås

$$\nabla f = \Bigl(-\frac{1}{x^2y} + 1, -\frac{1}{xy^2} + 1\Bigr) = (0,0)$$

d.v.s.

$$x^2y - 1 = 0, \tag{1}$$
$$xy^2 - 1 = 0. \tag{2}$$

Vi kan lösa ut y från (1) (kom ihåg $x \neq 0$)

$$y = \frac{1}{x^2}. \tag{3}$$

Instoppat i (2) fås

$$x \cdot \frac{1}{x^4} - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 - 1 = 0$$

som har den (reella) roten $x = 1$. Motsvarande y-värde får vi från (3), $y = 1$. Funktionen har en kritisk punkt i $(1,1)$.

2. Funktionen f ges av ett elementärt uttryck (rationell funktion) så f är differentierbar överallt där den är definierad.

3. f är definierad överallt utom på x- och y-axeln så dessa punkter är randpunkter. Men eftersom de inte tillhör definitionsmängden kan de inte vara lokala extrempunkter.

Vi undersöker den kritiska punkten genom att beräkna Hessianen,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{x^3y} & \dfrac{1}{x^2y^2} \\ \dfrac{1}{x^2y^2} & \dfrac{2}{xy^3} \end{pmatrix}.$$

I punkten $(1,1)$ har den värdet

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Hessianen har alltså två positiva egenvärden och den kritiska punkten är därmed en lokal minimipunkt.

Svaret är alltså att funktionen har ett lokalt minimivärde $f(1,1) = 3$ i punkten $(1,1)$.

801p Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = \frac{x^3+y^3+8}{xy}.$$

Lokala extrempunkter hittar vi bland

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör definitionsområdet.

Vi undersöker dessa tre fall

1. Kritiska punkter uppfyller

$$\begin{aligned} \nabla f &= \Big(\frac{3x^2\cdot xy - (x^3+y^3+8)\cdot y}{(xy)^2}, \frac{3y^2\cdot xy - (x^3+y^3+8)\cdot x}{(xy)^2}\Big) \\ &= \Big(\frac{2x^3-y^3-8}{x^2y}, \frac{2y^3-x^3-8}{xy^2}\Big) = (0,0) \end{aligned}$$

d.v.s.

$$\begin{aligned} 2x^3 - y^3 &= 8, & (1) \\ -x^3 + 2y^3 &= 8. & (2) \end{aligned}$$

Om vi behandlar x^3 och y^3 som obekanta är (1) och (2) ett linjärt ekvationssystem och Cramers regel ger att

$$x^3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{8\cdot 2 - (-1)\cdot 8}{2\cdot 2 - (-1)\cdot(-1)} = 8,$$

$$y^3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 8 - 8\cdot(-1)}{2\cdot 2 - (-1)\cdot(-1)} = 8,$$

vilket betyder att $x = 2$ och $y = 2$. Punkten $(2,2)$ är den enda kritiska punkten.

2. f ges av ett elementärt uttryck och därför differentierbar överallt där den är definierad.

3. f är definierad överallt utom då $xy \neq 0$, så x- och y-axeln blir randpunkten, men de tillhör inte definitionsmängden.

Vi ska nu bestämma den kritiska punktens karaktär med Hessianens egenvärden. Hessianen är

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

där

$$f''_{xx} = \frac{6x^2 \cdot x^2y - (2x^3 - y^3 - 8) \cdot 2xy}{(x^2y)^2} = \frac{2x^3 + 2y^3 + 16}{x^3y},$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{-3x^2 \cdot xy^2 - (2y^3 - x^3 - 8) \cdot y^2}{(xy^2)^2} = \frac{-2x^3 - 2y^3 + 8}{x^2y^2},$$

$$f''_{yy} = \frac{6y^2 \cdot xy^2 - (2y^3 - x^3 - 8) \cdot 2xy}{(xy^2)^2} = \frac{2x^3 + 2y^3 + 16}{xy^3}.$$

I punkten $(2,2)$ har Hessianen värdet

$$H_f(2,2) = \begin{pmatrix} \frac{2\cdot 2^3+2\cdot 2^3+16}{2^3\cdot 2} & \frac{-2\cdot 2^3-2\cdot 2^3+8}{2^2\cdot 2^2} \\ \frac{-2\cdot 2^3-2\cdot 2^3+8}{2^2\cdot 2^2} & \frac{2\cdot 2^3+2\cdot 2^3+16}{2\cdot 2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

och egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + \tfrac{25}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 3 - \tfrac{1}{2}\sqrt{11}, \quad \lambda_2 = 3 + \tfrac{1}{2}\sqrt{11}.$$

Båda egenvärdena är positiva så den kritiska punkten är en lokal minimipunkt.

Funktionen antar alltså det lokala minimivärdet $f(2,2) = 6$ i punkten $(2,2)$.

802b Bestäm lokala extremvärden till

$$f(x,y) = y^2 - 2y - (x-y)^4.$$

Vi ser direkt att f är definierad och differentierbar överallt. Lokala extrempunkter måste alltså vara kritiska punkter.

Sätter vi gradienten lika med noll fås

$$\nabla f = \big(4(x-y)^3, 2y - 2 - 4(x-y)^3 \cdot (-1)\big) = (0,0),$$

d.v.s.

$$4(x-y)^3 = 0, \tag{1}$$

$$2y - 2 + 4(x-y)^3 = 0. \tag{2}$$

Från (1) får vi att $x = y$. detta insatt i (2) ger

$$2y - 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = 1.$$

Punkten $(1,1)$ är alltså den enda kritiska punkten.

Vi undersöker Hessianens egenvärden i den kritiska punkten. Vi har

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 2 - 12(x-y)^2 \end{pmatrix}$$

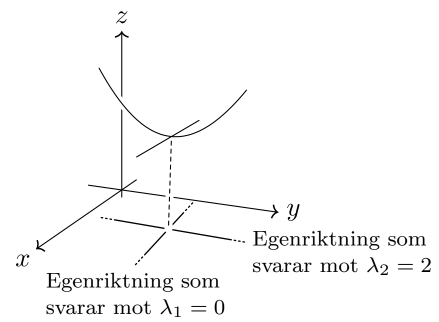
och i punkten $(1,1)$,

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena är

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2.$$

Eftersom ett egenvärde är noll och det andra egenvärdet positivt är den kvadratiska formen s.k. positivt semidefinit. I den riktning egenvärdet är noll ger andra ordningens termer (d.v.s. Hessianen) i Taylorutvecklingen ingen information om funktionens variation kring punkten. Kring punkten $(1,1)$ har alltså funktionen upp till andra ordningen en graf med utseendet



I egenriktningen som svarar mot egenvärdet $\lambda_1 = 0$ måste vi titta på högre ordningars termer i Taylorutvecklingen för att bestämma punktens karaktär.

Egenriktningen med egenvärdet $\lambda_1 = 0$ ges av lösningarna till $H_f(1,1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \textcircled{\tfrac{1}{2}} \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenriktningen är alltså

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nu är funktionen ett polynom så det är enkelt att bestämma Taylorutvecklingen i punkten $(1,1)$ genom att skriva om polynomet i termer av $x-1$ och $y-1$. Vi har

$$\begin{aligned} y^2 - 2y &= (y-1)^2 - 1, \\ (x-y)^4 &= \bigl((x-1)-(y-1)\bigr)^4, \end{aligned}$$

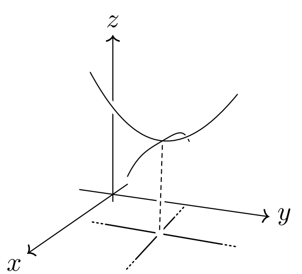
och funktionen är

$$f(x,y) = -1 + (y-1)^2 - \bigl((x-1)-(y-1)\bigr)^4.$$

I riktningen $(x-1, y-1) = t(1,0)$ är funktionen

$$f(1+t,1) = -1 - t^4 < -1 \quad \text{för } t \neq 0.$$

I egenriktningen $(1,0)$ ger alltså högre ordningars termer ett negativt bidrag till funktionen, så funktionen har alltså en graf med utseendet.



Den kritiska punkten är därmed en sadelpunkt.

Svaret blir att funktionen saknar lokala extremvärden.

812 Vilka av följande kvadratiska former är definita, indefinita eller semidefinita?

b) $Q(h,k,\ell) = h^2 + k^2 + k\ell$,

d) $Q(h,k,\ell) = 2h^2 + k^2 + \ell^2 + 2hk + k\ell$,

e) $Q(h,k,\ell) = h^2 + 2k^2 + \ell^2 - 2hk - 2k\ell$.

Den kvadratiska formen är

- definit, om den är >0 eller <0 för alla $(h,k,\ell) \neq (0,0,0)$,
- indefinit, om den är >0 i en riktning och <0 i en annan riktning, och
- semidefinit, om den är ≥ 0 eller ≤ 0 för alla $(h,k,\ell) \neq (0,0,0)$ med likhet i åtminstone en riktning.

b) Metod 1 (Egenvärden)

Vi skriver först den kvadratiska formen med en matris

$$Q(h,k,\ell) = \begin{pmatrix} h & k & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ \ell \end{pmatrix}.$$

Om vi nu uttrycker den kvadratiska formen i matrisens egenvektorbas fås

$$Q(h',k',\ell') = \begin{pmatrix} h' & k' & \ell' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ k' \\ \ell' \end{pmatrix},$$

där (h',k',ℓ') betecknar koordinater i egenvektorbasen och $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är matrisens egenvärden.

I denna form är Q enkel att analysera. Vi ser nämligen att

$$Q(h',k',\ell') = \lambda_1(h')^2 + \lambda_2(k')^2 + \lambda_3(\ell')^2$$

är

- definit, om $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ eller $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$,
- indefinit, om det finns två egenvärden med olika tecken,
- semidefinit, om $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ eller $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 0$ där åtminstone en av egenvärdena är noll.

Egenvärdena får vi från matrisens sekularekvation

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\bigl(\lambda^2 - \lambda - \tfrac{1}{4}\bigr) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} < 0, \quad \lambda_2 = 1 > 0, \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\sqrt{2}} > 0.$$

Den kvadratiska formen är alltså indefinit.

Metod 2 (Kvadratkomplettering)

Vi kvadratkompletterar en variabel i taget. Eftersom h endast förekommer som en rent kvadratisk term i Q behöver vi inte kvadratkomplettera med avseende på h. När vi kvadratkompletterar nästa variabel k fås

$$Q(h,k,\ell) = h^2 + (k + \tfrac{1}{2}\ell)^2 - \bigl(\tfrac{1}{2}\ell\bigr)^2.$$

Den sista variabeln ℓ förekommer också som en rent kvadratisk term så ingen kvadratkomplettering är nödvändig.

Om vi låter h variera och håller $k + \frac{1}{2}\ell$ och $\frac{1}{2}\ell$ fixa så är Q positiv. Om vi låter ℓ variera och håller h och $k + \frac{1}{2}\ell$ fixa så är Q negativ.

Den kvadratiska formen är alltså indefinit.

Vi måste dock vara försiktiga när vi kvadratkompletterar. T.ex. är den kvadratiska formen

$$Q(h,k,\ell) = h^2 + 2h\ell + 2k^2 + \ell^2$$

lika med

$$Q(h,k,\ell) = (h+k+\ell)^2 + (h-k-\ell)^2 - (h+k)^2,$$

vilket antyder att Q skulle vara indefinit, men det är den inte. Uttrycken $h + k + \ell$, $h - k - \ell$ och $h + k$ är nämligen linjärt beroende och det gör att vi inte kan variera $h + k$ och samtidigt hålla $h + k + \ell$, $h - k - \ell$ fixa. En "korrekt" kvadratkomplettering

$$Q(h,k,\ell) = (h+\ell)^2 + 2k^2$$

avslöjar att Q är (positivt) semidefinit (*inte* definit; vi får inte glömma den tredje kvadrattermen som är noll). (Detta exempel är hämtat från [Kristoferson, Algebra och Geometri II, Stockholm 1974]).

Det är alltså viktigt att kvadratkomplettera en variabel i taget för att få linjärt oberoende basuttryck.

d) Vi kvadratkompletterar en variabel i taget

$$\begin{aligned} Q(h,k,\ell) &= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 - \tfrac{1}{2}k^2 + k^2 + \ell^2 + k\ell \\ &= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 + \tfrac{1}{2}k^2 + \ell^2 + k\ell \\ &= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 + \tfrac{1}{2}(k+\ell)^2 - \tfrac{1}{2}\ell^2 + \ell^2 \\ &= 2\bigl(h + \tfrac{1}{2}k\bigr)^2 + \tfrac{1}{2}(k+\ell)^2 + \tfrac{1}{2}\ell^2 \end{aligned}$$

så får vi en summa av kvadrater. Den kvadratiska formen är alltså (positivt) definit.

e) Vi sätter igång och kvadratkompletterar,

$$\begin{aligned} Q(h,k,\ell) &= h^2 + 2k^2 + \ell^2 - 2hk - 2k\ell \\ &= (h-k)^2 - k^2 + 2k^2 + \ell^2 - 2k\ell \\ &= (h-k)^2 + k^2 + \ell^2 - 2k\ell \\ &= (h-k)^2 + (k-\ell)^2 - \ell^2 + \ell^2 \\ &= (h-k)^2 + (k-\ell)^2 + 0 \cdot \ell^2. \end{aligned}$$

Den kvadratiska formen är alltså (positivt) semidefinit.

815 Sök det största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$.

Om vi sätter $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ kan problemet formuleras som

$$\begin{aligned}&\max/\min\ f(x,y)\\ &\text{då } g(x,y) = 0.\end{aligned}$$

För problem av denna typ (max/min-problem med likhetsvillkor) där bivillkoret $g(x,y) = 0$ definerar en begränsad kurva (enhetscirkeln i detta fall) antas största och minsta värdet i en av följande punkter

1. kritiska punkter till f på kurvan $g = 0$,
2. singulära punkter på kurvan $g = 0$, d.v.s. punkter där $\nabla g = \mathbf{0}$,
3. punkter där f eller g inte är differentierbara.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. f har en kritisk punkt på kurvan $g = 0$ när

$$\nabla f \quad \text{är parallell med} \quad \nabla g.$$

Ett sätt att formulera detta villkor är att det finns en skalär λ så att

$$\nabla f = \lambda \nabla g. \tag{$*$}$$

Vi har att

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - 1, &\qquad \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y,\\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 2x, &\qquad \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y.\end{aligned}$$

Villkoret $(*)$ blir alltså

$$(2x-1, 4y) = \lambda(2x, 2y).$$

Detta villkor tillsammans med bivillkoret ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 2\lambda x, &(1)\\ 4y &= 2\lambda y, &(2)\\ x^2 + y^2 &= 1. &(3)\end{aligned}$$

Från ekvation (2) får vi två fall.

$y = 0$: Då ger (3) att

$$x^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Från (1) får vi att

$$\lambda = \frac{2x-1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x} = 1 \mp \tfrac{1}{2}.$$

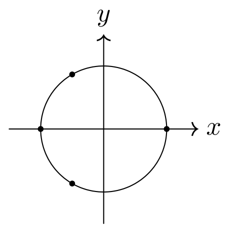
Detta fall ger oss alltså två kritiska punkter $(1,0)$ och $(-1,0)$.

$y \neq 0$: I ekvation (2) kan vi förkorta bort y och får $\lambda = 2$. Detta insatt i (1) ger $x = -\frac{1}{2}$. Ekvation (3) ger

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Vi får alltså två kritiska punkter $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ och $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Totalt har vi följande kritiska punkter $(1,0)$, $(-1,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ och $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.



2. Singulära punkter på kurvan $g = 0$ uppfyller

$$\nabla g = (2x, 2y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 0,$$

men $(0,0)$ är inte en punkt på kurvan (uppfyller inte $g = 0$).

3. Både f och g är polynom och differentierbara överallt.

Funktionen f antar alltså sitt största respektive minsta värde i en av de kritiska punkterna. Vi behöver alltså bara räkna ut f:s värde i dessa punkter för att bestämma största respektive minsta värdet

$$\begin{aligned} f(1,0) &= 0, &\quad &\text{(minsta värde)}\\ f(-1,0) &= 2,\\ f\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) &= \tfrac{9}{4}, & &\text{(största värde)}\\ f\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) &= \tfrac{9}{4}.\end{aligned}$$

816 Vilka värden kan funktionen f antaga om

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ då $2x^2 + y^2 = 1$,

c) $f(x,y) = xy^2$ då $5x^2 + y^2 = 15$.

Om A är minsta värdet f antar på kurvan och B är f:s största värde på kurvan, då antar f alla värden mellan A och B enligt satsen om mellanliggande värden eftersom f är kontinuerlig och kurvan är sammanhängande. Värdemängden är alltså $[A, B]$.

a) Sätter vi $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$, då ska vi alltså bestämma

$$\begin{aligned}&\max/\min \ \ f(x,y)\\ &\text{då} \ \ g(x,y) = 0.\end{aligned}$$

Målfunktionen f antar sitt största/minsta värde på den kompakta ellipsen $g = 0$ i en av följande punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$), och
3. punkter där f eller g inte är differentierbar.

Vi undersöker dessa tre fall.

1. Ett sätt att formulera villkoret att ∇f är parallell med ∇g är att det ska finnas en skalär λ så att

$$\nabla f = \lambda \nabla g.$$

Ett annat sätt är att placera ∇f och ∇g som rader i en determinant. Determinanten är noll när ∇f och ∇g är parallella,

$$\begin{vmatrix} \text{—}\nabla f\text{—} \\ \text{—}\nabla g\text{—} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4y \\ 4x & 2y \end{vmatrix} = -12xy = 0.$$

Vi får två fall

$x = 0$: Bivillkoret ger då att

$$2 \cdot 0^2 + y^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm 1.$$

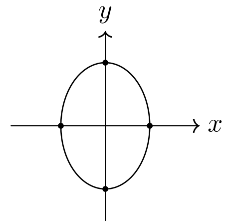
Vi får alltså två punkter $(0,1)$ och $(0,-1)$.

$y = 0$: Vi får från bivillkoret

$$2x^2 + 0^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

vilket ger två punkter $\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr)$ och $\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr)$.

De kritiska punkterna är alltså $(0,1)$, $(0,-1)$, $\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr)$ och $\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr)$.



2. Villkoret $\nabla g = \mathbf{0}$ ger

$$\nabla g = (4x, 2y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 0.$$

Punkten $(0,0)$ ligger dock inte på kurvan $\bigl(g(0,0) = -1 \neq 0\bigr)$.

3. f och g är differentierbara överallt eftersom de är polynom.

Det största och minsta värdet av f finns bland följande värden

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 2, && \text{största värde}\\ f(0,-1) &= 2,\\ f\bigl(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr) &= \tfrac{1}{2}, && \text{minsta värde}\\ f\bigl(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\bigr) &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Värdemängden till f på kurvan $g = 0$ är alltså $\bigl[\tfrac{1}{2}, 2\bigr]$.

c) Vi sätter $g(x,y) = 5x^2 + y^2 - 15$. Problemet

$$\begin{aligned}&\max/\min \ \ f(x,y)\\ &\text{då} \ \ g(x,y) = 0.\end{aligned}$$

antar sina lokala kritiska punkter i följande typer av punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan ($\nabla g = \mathbf{0}$), och

3. punkter där f eller g inte är differentierbara.

Vi tar och undersöker dess punkter.

1. I en kritisk punkt är ∇f parallell med ∇g. Om vi placerar dem som rader i en determinant är de parallella omm determinanten är noll,

$$\begin{vmatrix} -\nabla f- \\ -\nabla g- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 & 2xy \\ 10x & 2y \end{vmatrix} = 2y^3 - 20x^2y$$
$$= 2y(y^2-10x^2) = 2y(y-\sqrt{10}x)(y+\sqrt{10}x) = 0.$$

Detta bivillkor ger oss tre fall.

$y=0$: Bivillkoret ger då att

$$5x^2 + 0^2 = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt{3},$$

d.v.s. två punkter $(\sqrt{3},0)$ och $(-\sqrt{3},0)$.

$y=\sqrt{10}\,x$: Från bivillkoret får vi

$$5x^2 + 10x^2 = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=-1 \quad \text{eller} \quad x=+1,$$

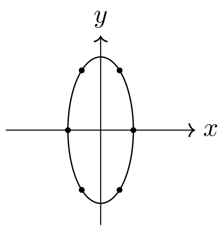
och motsvarande y-värden är $y=-\sqrt{10}$ respektive $y=\sqrt{10}$. Detta fall ger oss två punkter $(-1,-\sqrt{10}\,)$ och $(1,\sqrt{10}\,)$.

$y=-\sqrt{10}\,x$: Bivillkoret ger att

$$5x^2 + 10x^2 = 15 \qquad \Leftrightarrow \qquad x=-1 \quad \text{eller} \quad x=1.$$

Motsvarande y-värden är $y=\sqrt{10}$ respektive $y=-\sqrt{10}$. Vi får två punkter $(-1,\sqrt{10}\,)$ och $(1,-\sqrt{10}\,)$.

Sammanlagt har vi följande kritiska punkter $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$, $(-1,-\sqrt{10}\,)$, $(1,\sqrt{10}\,)$, $(-1,\sqrt{10}\,)$ och $(1,-\sqrt{10}\,)$.



2. Kurvan $g=0$, är singulär i punkter där

$$\nabla g = (10x, 2y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x=y=0,$$

men $(0,0)$ ligger inte på kurvan $(g(0,0) = -15 \neq 0)$.

3. f och g är polynom varför de är differentierbara överallt.

Funktionens största och minsta värde på kurvan $g=0$ är bland följande värden

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3},0) &= 0, \\ f(-\sqrt{3},0) &= 0, \\ f(-1,-\sqrt{10}) &= -10, \quad \text{minsta värde} \\ f(1,\sqrt{10}) &= 10, \quad \text{största värde} \\ f(-1,\sqrt{10}) &= -10, \\ f(1,-\sqrt{10}) &= 10. \end{aligned}$$

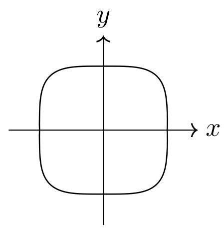
Värdemängden till f på kurvan $g=0$ är därmed $[-10,10]$.

819a Bestäm värdemängden till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2$$

om $x^4 + y^4 = 17$.

Eftersom funktionen f är kontinuerlig och $x^4 + y^4 = 17$ definierar en sammanhängande kurva,



ger satsen om mellanliggande värden att f antar alla värden mellan sitt minsta och största värde.

Sätt $g(x,y) = x^4 + y^4 - 17$. Vi ska alltså lösa följande problem

$$\begin{aligned} &\max/\min \;\; f(x,y) \\ &\text{då} \;\; g(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Vi har då att undersöka följande punkter.

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$), och
3. punkter där f eller g inte är differentierbara.

Vi undersöker.

1. I de kritiska punkterna är ∇f parallell med ∇g, vilket är detsamma som att

$$\begin{vmatrix} \text{---}\,\nabla f\,\text{---} \\ \text{---}\,\nabla g\,\text{---} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 8y \\ 4x^3 & 4y^3 \end{vmatrix} = 8xy^3 - 32x^3y$$
$$= 8xy(y^2 - 4x^2) = 8xy(y-2x)(y+2x) = 0.$$

Denna ekvation är uppfylld när en av dess faktorer är noll.

$x = 0$: Bivillkoret ger då att

$$0^4 + y^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm\sqrt[4]{17},$$

och vi får punkterna $(0, \sqrt[4]{17})$ och $(0, -\sqrt[4]{17})$.

$y = 0$: Bivillkoret ger att

$$x^4 + 0^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm\sqrt[4]{17},$$

och vi får punkterna $(\sqrt[4]{17}, 0)$ och $(-\sqrt[4]{17}, 0)$.

$y = 2x$: Bivillkoret ger att

$$x^4 + 16x^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

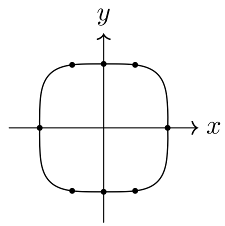
Motsvarande y-värden är $y = \pm 2$. Vi får alltså punkterna $(1,2)$ och $(-1,-2)$.

$y = -2x$: Bivillkoret ger att

$$x^4 + 16x^4 = 17 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \pm 1.$$

Motsvarande y-värden är $y = \mp 2$. Vi får alltså punkterna $(1,-2)$ och $(-1,2)$.

Kritiska punkter är således $(0, \sqrt[4]{17})$, $(0, -\sqrt[4]{17})$, $(\sqrt[4]{17}, 0)$, $(-\sqrt[4]{17}, 0)$, $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(1,-2)$ och $(-1,2)$.



2. Singulära punkter på kurvan $g = 0$ ges av

$$\nabla g = (4x^3, 4y^3) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = 0$$

som inte tillhör kurvan.

3. Både f och g är differentierbara överallt i och med att de är polynom.

f:s största och minsta värde har vi att söka bland följande värden

$$\begin{aligned} f(0, \sqrt[4]{17}\,) &= 4\sqrt{17}, \\ f(0, -\sqrt[4]{17}\,) &= 4\sqrt{17}, \\ f(\sqrt[4]{17}, 0) &= \sqrt{17}, \qquad \text{minsta värde} \\ f(\sqrt[4]{17}, 0) &= \sqrt{17}, \\ f(1,2) &= 17, \qquad \text{största värde} \\ f(-1,-2) &= 17, \\ f(1,-2) &= 17, \\ f(-1,2) &= 17. \end{aligned}$$

Värdemängden är alltså $[\sqrt{17}, 17]$.

822a Vilken är den maximala produkten av tre positiva tal med summan 6?

KAlla de tre talen för x, y och z. Då ska vi alltså maximera produkten xyz när $x+y+z=6$ och x,y,z är positiva. Problemet kan därmed formuleras som

$$\begin{array}{ll} \max & xyz \\ \text{då} & \begin{cases} x+y+z=6 \\ x,y,z>0 \end{cases} \end{array}$$

Om vi sätter $f(x,y,z)=xyz$ och $g(x,y,z)=x+y+z-6$ så antar f sitt största värde på ytan $g=0$ i en av följande punkter:

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på ytan $g=0$ (d.v.s. $\nabla g=\mathbf{0}$), och
3. punkter där f eller g inte är differentierbar.

Notera att tilläggsvillkoren $x,y,z>0$ inte introducerar några nya randpunkter eftersom villkoren är öppna '$>$' och inte '$\geq$' vilket gör att eventuellt nya randpunkter inte tillhör mängden av tillåtna punkter.

Vi undersöker nu de tre fallen.

1. Att ∇f och ∇g ska vara parallella kan vi skriva som

$$\nabla f = \lambda\,\nabla g,$$

för någon skalär λ. Detta ger

$$(yz,xz,xy)=\lambda\,(1,1,1),$$

d.v.s. $yz=xz=xy=\lambda$. Dessa villkor tillsammans med bivillkoret ger ekvationssystemet

$$\begin{aligned} yz &= xz, && (1)\\ xz &= xy, && (2)\\ x+y+z &= 6. && (3) \end{aligned}$$

Eftersom $x,y,z>0$ ger (1) och (2) att

$$y=x,\quad z=y \qquad\Leftrightarrow\qquad x=y=z.$$

Detta insatt i (3) ger

$$3x=6 \qquad\Leftrightarrow\qquad x=2.$$

Punkten $(x,y,z,)=(2,2,2)$ är alltså den enda kritiska punkten.

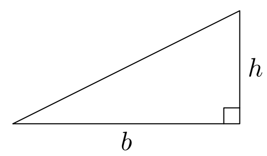
2. Vi har att $\nabla g=(1,1,1)\neq(0,0,0)$.
3. f och g är differentierbara överallt.

Det största värdet f antar är alltså $f(2,2,2)=8$.

Anm. f antar faktiskt inget minsta värde i området utan $f>0$ överallt men $f\to 0$ när x, y eller $z\to 0$.

822b Vilken är den maximala arean en rätvinklig triangel med omkretsen 2?

Låt oss kalla triangelns bas för b och dess höjd för h.



Hypotenusan blir då $\sqrt{b^2+h^2}$ enligt Pythagoras sats, och triangelns omkrets blir

$$b+h+\sqrt{b^2+h^2}.$$

Vi ska alltså bestämma det största värdet arean $\frac{1}{2}bh$ kan anta då omkretsen uppfyller

$$b+h+\sqrt{b^2+h^2}=2.$$

Lite mer kortfattat lyder problemet

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{1}{2}bh \\ \text{då} & b+h+\sqrt{b^2+h^2}=2 \end{array}$$

under förutsättning att $b,h\geq 0$. Det största värdet $f(b,h)=\frac{1}{2}bh$ kan anta under bivillkoret $g(b,h)=b+h+\sqrt{b^2+h^2}-2=0$ görs i en av följande punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på kurvan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
3. punkter där f eller g inte är differentierbar, och
4. ändpunkter till kurvan $g = 0$.

Vi har fått ytterligare ett fall att undersöka p.g.a. att villkoren $b, h \geq 0$ ”hugger av” kurvan $g = 0$ och ger ändpunkter som kan vara extrempunkter. Vi undersöker dessa fall.

1. Parallellvillkoret mellan ∇f och ∇g kan vi skriva som

$$\begin{vmatrix} \text{—}\nabla f\text{—} \\ \text{—}\nabla g\text{—} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{2}h & \tfrac{1}{2}b \\ 1 - \dfrac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} & 1 - \dfrac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} \end{vmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{2}h - \frac{h^2}{2\sqrt{b^2+h^2}} - \tfrac{1}{2}b + \frac{b^2}{2\sqrt{b^2+h^2}}$$
$$= \tfrac{1}{2}(h-b)\Bigl(1 + \frac{h+b}{\sqrt{b^2+h^2}}\Bigr) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad h = b \quad \text{eller} \quad 1 + \frac{h+b}{\sqrt{b^2+h^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad h = b \quad \text{eller} \quad \sqrt{b^2+h^2} + h + b = 0.$$

Detta ger att $h = b$. Den andra möjligheten strider nämligen mot omkretsvillkoret.

Bivillkoret ger då att

$$b + b + \sqrt{b^2+b^2} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad (2+\sqrt{2}\,)b = 2$$
$$\Leftrightarrow \qquad b = \frac{2}{2+\sqrt{2}}.$$

Kritisk punkt är $(b,h) = \bigl(\frac{2}{2+\sqrt{2}}, \frac{2}{2+\sqrt{2}}\bigr)$.

2. Singulära punkter måste uppfylla

$$\nabla g = \Bigl(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}, 1 - \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}\Bigr) = (0,0)$$

d.v.s.

$$1 - \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}} = 0, \qquad (1)$$
$$1 - \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}} = 0. \qquad (2)$$

Detta ger $b = h = \sqrt{b^2+h^2}$ vilket betyder att $b = h = 0$ men detta strider mot bivillkoret.

3. f är differentierbar överallt medan g är differentierbar överallt utom i $(b,h) = (0,0)$, men den punkten ligger inte på kurvan $g = 0$.

4. Kurvan $g = 0$ får ändpunkter där någon av olikheterna $b, h \geq 0$ är uppfylld med likhet.

$b = 0$: Bivillkoret ger då att $h = 1$, d.v.s. vi får punkten $(0,1)$.

$h - 0$: Bivillkoret ger att $b = 1$, d.v.s. vi får punkten $(1,0)$.

Maximal area är alltså det största av följande värden

$$f\bigl(\tfrac{2}{2+\sqrt{2}}, \tfrac{2}{2+\sqrt{2}}\bigr) = \tfrac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}, \quad \text{störst värde}$$
$$f(0,1) = 0,$$
$$f(1,0) = 0.$$

824 Kan summan av tre positiva tal vara 5 om deras produkt är 8?

Om vi inför beteckningarna x, y och z för de tre talen så ska vi undersöka om uttrycket $x + y + z$ kan anta värdet 5 om vi har bivillkoret $xyz = 8$. Mera matematiskt ska vi alltså undersöka om talet 5 ingår i värdemängden till funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$ på ytan $g(x,y,z) = xyz - 8$.

Funktionen f är kontinuerlig och ytan $g = 0$ är sammanhängande i första oktanten så värdemängden till f på $g = 0$ är alla värden mellan f:s minsta och största värde på $g = 0$. Vi får alltså reda på svaret genom att lösa problemet

$$\begin{aligned} &\text{max/min} \quad f(x,y,z) \\ &\text{då} \quad \begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ x,y,z \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Denna typ av problem har sina lokala extrempunkter bland följande punkter

1. kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
2. singulära punkter på ytan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
3. punkter där f eller g inte är differentierbar, och
4. randpunkter till ytan $g = 0$.

Vi undersöker dessa fyra fall.

1. Vi kan uttrycka villkoret att ∇f och ∇g är parallella med determinantvillkoret

$$\begin{vmatrix} \text{---}\,\nabla f\,\text{---} \\ \text{---}\,\nabla g\,\text{---} \\ a \quad b \quad c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

som måste gälla för alla (a,b,c) eftersom de två översta raderna är linjärt beroende om de är parallella. Kofaktorutvecklingen längs tredje raden ger

$$a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ xz & xy \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xy \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xz \end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom a, b och c kan väljas fritt måste de tre minorerna vara noll,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ xz & xy \end{vmatrix} = xy - xz = x(y-z) = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xy \end{vmatrix} = xy - yz = y(x-z) = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xz \end{vmatrix} = xz - yz = z(x-y) = 0.$$

Tillsammans med bivillkoret ger detta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x(y-z) &= 0, && (1) \\ y(x-z) &= 0, && (2) \\ z(x-y) &= 0, && (3) \\ xyz &= 8. && (4) \end{aligned}$$

Ekvation (4) ger att ingen av x, y eller z är noll. Då ger (1), (2) och (3) att $x = y = z$ och (4) att

$$x^3 = 8 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 2.$$

Vi har alltså en kritisk punkt $(2,2,2)$.

2. I en singulär punkt ska gälla att

$$\nabla g = (yz, xz, xy) = (0,0,0)$$

som tillsammans med bivillkoret ger

$$\begin{aligned} yz &= 0, && (5) \\ xz &= 0, && (6) \\ xy &= 0, && (7) \\ xyz &= 8. && (8) \end{aligned}$$

Detta system saknar lösning eftersom t.ex. (7) och (8) inte kan vara uppfyllda samtidigt.

3. f är differentierbar överallt.

4. Ytan $g = 0$ begränsas av olikheterna $x,y,z \geq 0$, men notera att ytan $g = 0$ inte har några punkter med $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$, så tilläggsvillkoren $x,y,z \geq 0$ introducerar inga randpunkter (utan sorterar bara bort komponenter av ytan $g = 0$ i de andra oktanterna).

Funktionen f har alltså ett lokalt extremvärde

$$f(2,2,2) = 2 + 2 + 2 = 6$$

på ytan $g = 0$. Eftersom ytan $g = 0$ inte är kompakt (inte begränsad) måste vi även undersöka f:s gränsvärde när x, y eller $z \to \infty$. Vi ser direkt att om detta inträffar så går $f \to \infty$. Värdemängden till f på $g = 0$ är alltså $[6, \infty)$ och eftersom talet 5 inte ingår i denna mängd blir svaret nekande.

838a Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

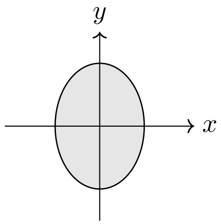
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

då $2x^2 + y^2 \leq 1$.

Om vi skriver om bivillkoret något

$$\left(\frac{x}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 \leq 1$$

så ser vi att det område som bivillkoret definierar är insidan och randen av en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och 1.



Detta område är en kompakt mängd (sluten och begränsad) så funktionen f har ett största och minsta värde i mängden. Dessa två värden antas i en lokal extrempunkt, d.v.s. i en av följande punkter

1. kritiska punkter (i en inre punkt),
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör området.

Vi undersöker de tre fallen.

1. I en kritisk punkt är gradienten till f noll,

   $$\nabla f = (2x, 4y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

   och denna punkt ligger inom mängden (bivillkoret uppfyllt).

2. f är differentierbar överallt.

3. På randen av området är bivillkoret uppfyllt med likhet, så vi har alltså problemet

   $$\begin{aligned} &\max/\min \;\; f(x,y),\\ &\text{då} \;\; g(x,y) = 0, \end{aligned}$$

   där $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$. Detta problem har vi faktiskt redan löst i uppgift 816a och kom fram till följande möjliga lokala extrempunkter $(0,1)$, $(0,-1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ och $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$.

Det största och minsta värdet till f i området är alltså bland följande värden

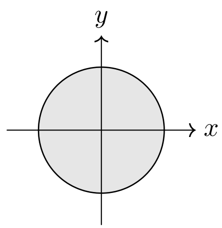
$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0, &&\text{minsta värdet}\\ f(0,1) &= 2, &&\text{största värdet}\\ f(0,-1) &= 2,\\ f(\tfrac{1}{\sqrt{2}},0) &= \tfrac{1}{2},\\ f(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},0) &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

838b Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - x$$

då $x^2 + y^2 \leq 1$.

Bivillkoret definierar området innanför enhetscirkeln och med randcirkeln inkluderad.



Eftersom detta område är kompakt kan vi garantera att f verkligen antar ett största och minsta värde i området.

De punkter där f är störst respektive minst är lokala extrempunkter och finns med bland följande punkter

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter som tillhör området.

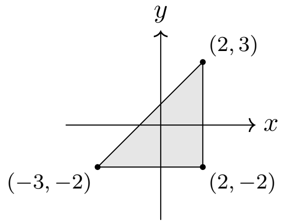
Vi bestämmer dessa punkter.

1. Gradienten av f lika med noll ger
$$\nabla f = (2x-1, 4y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (\tfrac{1}{2}, 0).$$
2. f är ett polynom och därför differentierbar överallt.
3. Randpunkterna till området uppfyller bivillkoret med likhet. På randen har vi alltså problemet
$$\begin{aligned} &\max/\min \;\; f(x,y),\\ &\text{då} \;\; x^2+y^2=1. \end{aligned}$$
Detta problem löste vi i uppgift 815 och fick kandidatpunkterna $(1,0)$, $(-1,0)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\,)$ och $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,)$.

Det största respektive minsta värdet är alltså en av följande värden
$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{2},0) &= -\tfrac{1}{4} && \text{minsta värde}\\ f(1,0) &= \;0, \\ f(-1,0) &= \;2, \\ f(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,) &= \tfrac{9}{4} && \text{största värde}\\ f(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,) &= \tfrac{9}{4}. \end{aligned}$$

838f Bestäm det största och minsta värdet av funktionen
$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$$
i den slutna triangeln med hörn i punkterna $(2,-1)$, $(2,3)$ och $(-3,-2)$.

Om vi ritar upp triangeln



så kan vi relativt enkelt bestämma kantlinjerna till

i. $\quad (x,y) = (-3,-2) + t(5,0), \qquad (0 \le t \le 1)$,

ii. $\quad (x,y) = (2,-2) + t(0,5), \qquad (0 \le t \le 1)$, och

iii. $\quad (x,y) = (-3,-2) + t(5,5), \qquad (0 \le t \le 1)$.

Den slutna triangeln är en kompakt mängd så den kontinuerliga målfunktionen f har verkligen ett största och minsta värde i triangeln.

Vi undersöker nu de tre typer av punkter där f kan ha lokala extrempunkter.

1. Kritiska punkter.

   Sätter vi gradienten till f lika med noll fås
$$\nabla f = (2x-2y, -2x+4y-2) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} 2x-2y &= 0,\\ -2x+4y &= 2, \end{aligned}$$
   och detta linjära ekvationssystem har lösningen $(x,y) = (1,1)$ som ligger inom triangeln.

2. Ej differentierbara punkter.

   f är differentierbar överallt.

3. Randpunkter.

   Randen består av tre kantlinjer och vi undersöker f på dessa linjer.

i. På linjen $(x,y)=(-3,-2)+(5,0)=(-3+5t,-2)$, $(0\le t\le 1)$, är f lika med

$$\begin{aligned} g(t) = f(x,y) &= (-3+5t)^2 - 2(-3+5t)\cdot(-2) \\ &\quad + 2\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2) \\ &= 9-30t+25t^2-12+20t+8+4 \\ &= 25t^2-10t+9. \end{aligned}$$

Funktionen g antar max och min bland följande punkter

(a) kritiska punkter $g'(t)=50t-10=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{1}{5}$,

(b) icke-deriverbara punkter, som det inte finns några av, och

(c) ändpunkterna $t=0$ och $t=1$.

Dessa punkter svarar mot $(-2,-2)$, $(-3,-2)$ och $(2,-2)$.

ii. På linjen $(x,y)=(2,-2)+t(0,5)$, $0\le t\le 1$, är f lika med

$$\begin{aligned} g(t) = f(2,-2+5t) &= 2^2 - 2\cdot 2\cdot(-2+5t) \\ &\quad + 2\cdot(-2+5t)^2 - 2\cdot(-2+5t) \\ &= 4+8-20t+8-20t+50t^2+4-10t \\ &= 50t^2-50t+24. \end{aligned}$$

Funktionen g antar max och min bland följande punkter

(a) kritiska punkter $g'(t)=100t-50=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{1}{2}$,

(b) icke-deriverbara punkter, existerar inte,

(c) ändpunkterna $t=0$ och $t=1$.

Dessa punkter svarar mot $(2,-2)$, $(2,\frac{1}{2})$ och $(2,3)$.

iii. På linjen $(x,y)=(-3,-2)+t(5,5)$, $0\le t\le 1$, är f lika med

$$\begin{aligned} g(t) &= f(-3+5t,-2+5t) \\ &= (-3+5t)^2 - 2\cdot(-3+5t)(-2+5t) \\ &\quad + 2(-2+5t)^2 - 2\cdot(-2+5t) \\ &= 25t^2-30t+9. \end{aligned}$$

Funktionen g antar max och min bland följande punkter

(a) kritiska punkter $g'(t)=50t-30=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{3}{5}$,

(b) icke-deriverbara punkter, saknas,

(c) ändpunkterna $t=0$ och $t=1$.

Dessa punkter svarar mot $(-3,-2)$, $(0,1)$ och $(2,3)$.

Funktionens största och minsta värde i triangeln är alltså det största respektive minsta värdet bland följande värden

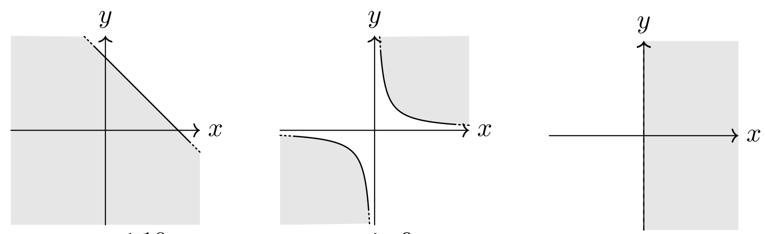
$$\begin{aligned} f(1,1) &= -1, \quad \text{minsta värde} \\ f(-2,-2) &= 8, \\ f(-3,-2) &= 9, \\ f(2,-2) &= 24, \\ f(2,\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{3}{2}, \\ f(2,3) &= 4, \\ f(0,1) &= 0. \end{aligned}$$

838h Bestäm det största och minsta värdet av funktionen

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

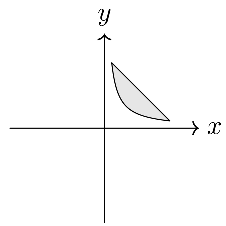
då $x+y\le 10$, $xy\ge 9$ och $x>0$.

Området består av alla punkter (x,y) som uppfyller de tre olikheterna,



$x+y\le 10$ $\qquad$ $xy\ge 9$ $\qquad$ $x>0$

d.v.s. området blir följande slutna mängd



som begränsas av kurvorna $x + y = 10$ och $xy = 9$.

Funktionen f antar största och minsta värde i en av följande punkter.

1. kritiska punkter,
2. punkter där f inte är differentierbar, och
3. randpunkter.

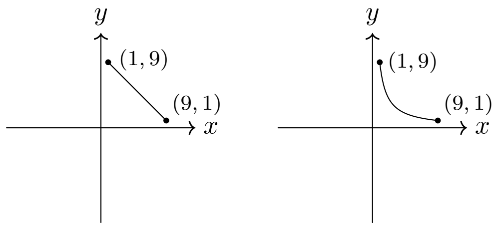
1. Gradienten lika med noll ger den kritiska punkten

$$\nabla f = (2x, 2y) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

som inte tillhör området.

2. f är differentierbar överallt.
3. Området begränsas av två randkurvor $x + y = 10$ och $xy = 9$, så vi ska bestämma max/min av f på de två kurvavsnitt som ligger mellan skärningspunkterna

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 9 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (1,9) \quad \text{eller} \quad (x,y) = (9,1).$$



Vi ska alltså lösa de två problemen

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{l} \max \ \ f(x,y), \\ \text{då} \ \ x + y = 10, \end{array} \qquad \text{och} \qquad \text{(II)} \quad \begin{array}{l} \max \ \ f(x,y), \\ \text{då} \ \ xy = 9. \end{array}$$

I Med $g(x,y) = x + y - 10$ blir bivillkoret $g(x,y) = 0$. Lokala extrempunkter kan finnas bland följande punkter

(a) kritiska punkter (∇f parallell med ∇g),
(b) singulära punkter på kurvan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
(c) punkter där f eller g inte är differentierbar, och
(d) ändpunkter till kurvan.

Vi undersöker dessa fall

(a) I en kritisk punkt är ∇f parallell med ∇g vilket är detsamma som att

$$\begin{vmatrix} \text{—}\nabla f\text{—} \\ \text{—}\nabla g\text{—} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y.$$

Bivillkoret ger då att

$$x + x = 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 5.$$

Kritisk punkt är alltså $(5,5)$.

(b) Kurvan är singulär där

$$\nabla g = (1,1) = (0,0)$$

vilket inte inträffar i någon punkt.

(c) f och g är differentierbara överallt.
(d) Ändpunkter till kurvan är $(1,9)$ och $(9,1)$.

II Nu sätter vi $g(x,y) = xy - 9$ och bivillkoret blir $g(x,y) = 0$. På denna kurva har f lokala extrempunkter bland

(a) kritiska punkter (∇f parallella med ∇g),
(b) singulära punkter på kurvan $g = 0$ ($\nabla g = \mathbf{0}$),
(c) punkter där f eller g inte är differentierbar, och
(d) ändpunkter till kurvan.

Vi undersöker dessa fall

(a) ∇f är parallell med ∇g omm

$$\begin{vmatrix} \text{—}\nabla f\text{—} \\ \text{—}\nabla g\text{—} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x+y)(x-y) = 0$$

vilket ger två fall

$x+y=0$: Då är $y=-x<-0$ vilket strider mot bivillkoret $xy = 9$.

$x-y=0$: Då är $x=y$ och bivillkoret ger

$$x^2 = 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 3.$$

Detta ger den kritiska punkten $(3,3)$.

(b) Kurvan är singulär där

$$\nabla g = (y,x) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (x,y) = (0,0)$$

som inte ligger på kurvan.

(c) f och g är differentierbara överallt.

(d) Ändpunkterna är $(1,9)$ och $(9,1)$.

Funktionen f:s största och minsta värde finns alltså bland följande värden

$$\begin{aligned} &f(5,5) = 50, \\ &f(3,3) = 18, \quad \text{minsta värde} \\ &f(1,9) = 82, \quad \text{största värde} \\ &f(9,1) = 82. \end{aligned}$$

MKV 1.1e & 1.3e Skriv upp normalekvationen till systemet

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

och ange minstakvadratlösningen.

Vi får normalekvationen genom att multiplicera båda led med koefficientmatrisens transponat

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

vilket ger systemet

$$14x = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \tfrac{2}{7}$$

vilket är MKV-lösningen.

MKV 1.1h & 1.3h Skriv upp normalekvationen till systemet

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

och ange minstakvadratlösningen.

Normalekvationen fås genom att multiplicera båda led med koefficientmatrisens transponat

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

vilket ger systemet

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Vi kan direkt avläsa MKV-lösningen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$.

MKV 1.9 Bestäm ekvationen för den räta linje $y = kx + \ell$ som i minstakvadratmening bästa anpassar till punkterna $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ och $(3,8)$. Bestäm också medelfelet.

Vi ställer upp det ekvationssystem vi skulle ha om alla fyra punkter låg på linjen

$$\begin{aligned} k\cdot 0+\ell &= 0\\ k\cdot 1+\ell &= 1\\ k\cdot 2+\ell &= 1\\ k\cdot 3+\ell &= 8 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\8\end{pmatrix}.$$

Minstakvadratlösningen får vi genom att lösa normalekvationen. Multiplicera båda led med koefficientmatrisens transponant

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\8\end{pmatrix}$$

och vi får normalekvationen

$$\begin{pmatrix}14&6\\6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\ \ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27\\10\end{pmatrix}.$$

Detta ekvationssystem har lösningen $k=\frac{12}{5}$ och $\ell=-\frac{11}{10}$. MKV-linjen är alltså

$$y=\tfrac{12}{5}x-\tfrac{11}{10}.$$