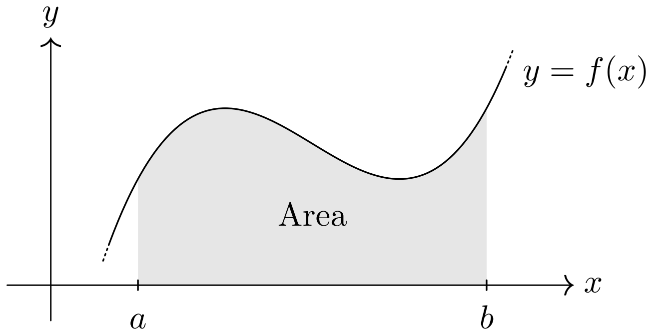
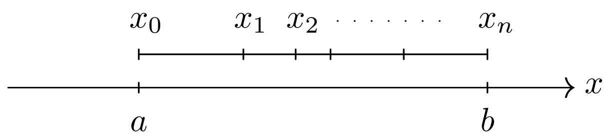
# Integralens definition

Problem

Bestäm arean under kurvan $y = f(x)$ mellan $x = a$ och $x = b$.




Dela upp intervallet $[a, b]$ i $n$ delintervall $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$ upp till $[x_{n-1}, x_n]$.

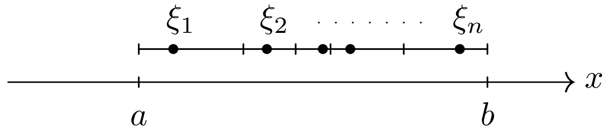



Delintervallens ändpunkter

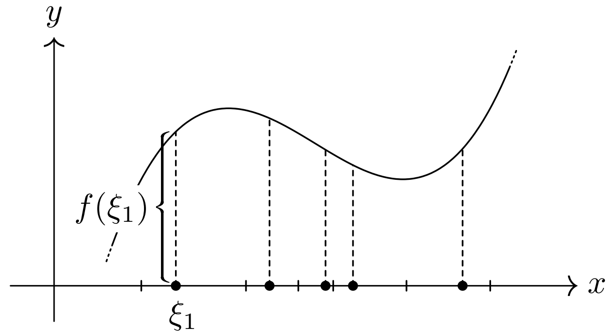
$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

kallas för en partition av $[a, b]$. Längden av det längsta delintervallet kallas för partitionens diameter $\|P\|$.

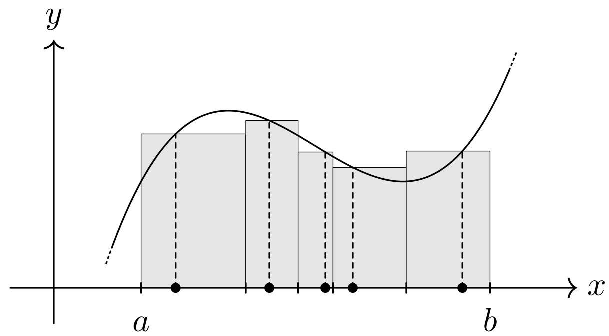
I varje delintervall väljer vi en $\xi$-punkt.




För varje $\xi$-punkt räknar vi ut funktionsvärdet.




Vi approximerar arean inom delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ med en rektangel vars höjd är $f(\xi_i)$.




En delrektangel har arean

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = \Delta x_i \cdot f(\xi_i),$$

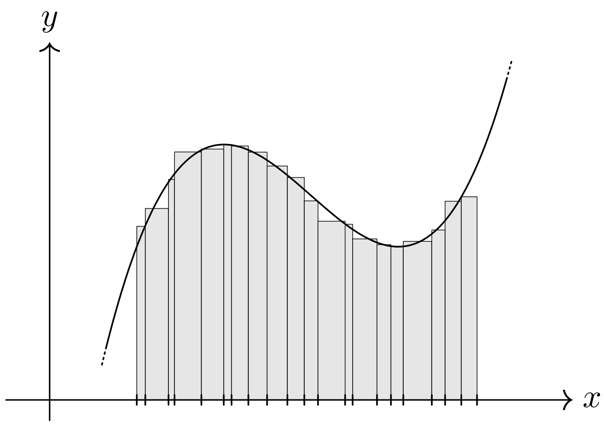
där $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Den totala arean approximeras av delrektanglarnas sammanlagda area,

$$\text{Area} \approx S(f, a, b, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ovanstående summa kallas för en Riemannsumma.

Om vi väljer allt finare partition av $[a, b]$ (d.v.s. allt mindre partitionsdiameter) så borde Riemannsummorna konvergera mot den sanna arean,

$$\text{Area} = \lim_{\|P\|\to 0} S(f, a, b, P, \xi_P).$$




## Definition

Antag att funktionen $f$ är definierad i intervallet $[a, b]$. Om det gäller att för varje följd $\{P_1, P_2, \dots\}$ av partitioner med diameter som går mot noll, $\|P_n\| \to 0$ då $n \to \infty$, så konvergerar motsvarande Riemannsummor $S_n$, då säger vi att $f$ är integrabel på intervallet $[a, b]$ och Riemannsummornas gränsvärde betecknas

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

och kallas för den bestämda integralen av $f$ över intervallet $[a, b]$.

## Egenskaper hos integraler

Antag att $a \le b \le c$ och att $A$, $B$ är konstanter. Då gäller att

- $\displaystyle\int_a^b = -\int_b^a$ (teckenkonvention)
- $\displaystyle\int \bigl(Af + Bg\bigr) = A\int f + B\int g$ (linjäritet)
- $\displaystyle\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ (additivitet)
- $\displaystyle f \le g \quad \Rightarrow \quad \int f \le \int g$ (monotonicitet)
- $\displaystyle\left|\int f\right| \le \int |f|$ (triangelolikheten)

## Integralkalkylens huvudsats

En funktion $F$ kallas för en primitiv funktion till funktionen $f$ på intervallet $[a, b]$ om $F$ är deriverbar och

$$F'(x) = f(x) \quad \text{för alla } x \in [a, b].$$

(Tag vänster- och högerderivata i respektive ändpunkt.)

**Sats** Om $f$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och $F$ är en primitiv funktion till $f$, då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Bigl[\,F(x)\,\Bigr]_a^b = F(b) - F(a).$$

## Tabell över primitiva funktioner

| Funktion | En primitiv funktion |
|---|---|
| $x^\alpha$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \text{om } \alpha \neq -1$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\log\lvert x\rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}, \quad \text{om } a > 0$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $1+\tan^2 x$ | $\tan x$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\,\right\rvert$ |
| $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ | $\ln\lvert f(x)\rvert$ |

## Variabelsubstitution

Antag att $u = u(x)$ är deriverbar på $[a, b]$ och att $f$ är kontinuerlig i $u$:s värdemängd. Då är

$$\int_a^b f\big(u(x)\big)u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

## Partiell integration

Om $f$ är kontinuerlig och $g$ är kontinuerligt deriverbar, då gäller att

$$\int f \cdot g\,dx = F \cdot g - \int F \cdot g'\,dx,$$

där $F$ är en primitiv funktion till $f$.

## Inverssubstitution

Antag att $x = g(t)$ är deriverbar och strängt monoton på $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ och att $f$ är kontinuerlig på $[a, b]$. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big\{x = g(t);\ dx = g'(t)\,dt,\ t\colon g^{-1}(a) \to g^{-1}(b)\Big\}$$
$$= \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt.$$

## Rationell integrand

En rationell funktion är en funktion med utseendet

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n}.$$

Vi ska nu beskriva en algoritm för hur man integrerar rationella funktioner.

**Steg 1** (Polynomdivision)

Om täljaren har högre eller samma gradtal som nämnaren kan vi med en polynomdivision skriva kvoten som

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_{m-n} x^{m-n} + \frac{d_0 + d_1 x + \cdots + d_{n-1} x^{n-1}}{b_0 + b_1 x + \cdots b_n x^n}.$$

De första polynomtermerna är enkla att integrera så vi koncentrerar oss på bråket.

**Steg 2** (Faktorisering av nämnaren)

Eftersom nämnaren är ett reellt polynom har den reella rötter $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ och komplexkonjugerade rötter $\beta_1 \pm i\gamma_1, \ldots, \beta_j \pm i\gamma_j$. Enligt faktorsatsen kan kvoten skrivas som

$$\frac{\text{täljare}}{(x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_i)^{m_i} \big((x-\beta_1)^2 + \gamma_1^2\big)^{n_1} \cdots \big((x-\beta_j)^2 + \gamma_j^2\big)^{n_j}},$$

där $m_1, \ldots, m_i$ och $n_1, \ldots, n_j$ är rötternas multipliciteter.

**Steg 3** (Partialbråkuppdelning)

Den rationella funktionen ovan kan nu delas upp i en summa av enklare kvoter, en s.k. partialbråkuppdelning. Antag för enkelhets skull att bråket har utseendet

$$\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2}.$$

Varje faktor i nämnaren kommer ge upphov till termer i partialbråkuppdelningen.

Vi börjar med den vänstra enkla faktorn $(x-3)$. Den ger oss en term i uppdelningen

$$\frac{\text{täljare}}{(x-3)\,(x+2)^3\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-3} + \cdots$$

Talet $A$ är en konstant som senare måste bestämmas.

Den andra faktorn $(x+2)^3$ har exponenten 3 och det ger oss tre termer i uppdelningen där vi stegvis minskar exponenten till 1,

$$\frac{\text{täljare}}{(x-3)\,(x+2)^3\,\big((x+1)^2+1\big)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x+2)^3} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} + \cdots$$

Den tredje faktorn $\bigl((x+1)^2+1\bigr)$ svarar mot två enkla komplexkonjugerade rötter $(-1\pm i)$. Denna faktor ger oss en term i uppdelningen. Denna gång har vi inte en konstant i täljaren utan ett förstagradsuttryck,

$$\begin{aligned}
&\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\boxed{\bigl((x+1)^2+1\bigr)}(x^2+4)^2}\\
&\qquad = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+2)^3}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}+\cdots\\
&\qquad\quad + \boxed{\frac{Ex+F}{(x+1)^2+1}}+\cdots
\end{aligned}$$

Den sista faktorn $(x^2+4)^2$ svarar mot två multipla (dubbla) komplexkonjugerade rötter $(\pm 2i)$ och ger upphov till två termer där vi stegvis minskar exponenten från 2 till 1 (på motsvarande sätt som vi gjorde för faktor nummer två),

$$\begin{aligned}
&\frac{\text{täljare}}{(x-3)(x+2)^3\bigl((x+1)^2+1\bigr)\boxed{(x^2+4)^2}}\\
&\qquad = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x+2)^3}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}+\cdots\\
&\qquad\quad + \frac{Ex+F}{(x+1)^2+1}+\boxed{\frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}+\frac{Ix+J}{x^2+4}}.
\end{aligned}$$

Detta är uttryckets partialbråkuppdelning.

**Steg 4** (Integrering av termerna)

Om vi skjuter upp frågan hur vi bestämmer konstanterna som dyker upp i partialbråkuppdelningen så återstår bara att integrera de enskilda termerna i partialbråkuppdelningen. För detta behöver vi kunna behandla följande integraltyper

**$\alpha$)** $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m},$

**$\beta$)** $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-\beta)^2+\gamma^2},$

**$\gamma$)** $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{\bigl((x-\beta)^2+\gamma^2\bigr)^m}\,dx,$ där $m>1$.

**Typ $\alpha$**

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{m+1}\,\frac{1}{(x-\alpha)^{m+1}}+C$$

**Typ $\beta$**

Vi skriver om integrandens täljare så att dess första term blir nämnarens derivata

$$\frac{Ax+B}{(x-\beta)^2+\gamma^2} = D\,\frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2+\gamma^2}+E\,\frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}.$$

Den första termen har då en logaritmisk primitiv funktion,

$$\int \frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \ln\bigl|(x-\beta)^2+\gamma^2\bigr|+C.$$

Den andra termen ger en arctan-integral,

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^2+\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x-\beta}{\gamma}\right)^2+1} = \left\{ s = \frac{x-\beta}{\gamma} \right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\int \frac{ds}{s^2+1} = \frac{1}{\gamma}\arctan s + C = \frac{1}{\gamma}\arctan\frac{x-\beta}{\gamma} + C.$$

**Typ $\gamma$**

Denna typ undviker man med Hermites metod (ingår inte i kursen).

## Bestämning av konstanterna

**Metod 1** (Identifikation av koefficienter)

Vi illustrerar med ett exempel. Säg att vi har partialbråkuppdelningen

$$\frac{x^2-7x+8}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Vi skriver högerledet med gemensam nämnare,

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x-1) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (2A+B)x + (A-B-C)}{(x-1)(x+1)^2}.$$

Eftersom täljarna i båda led ska vara identiska måste koefficienterna vara lika,

$$\begin{aligned} 1 &= A + C \\ -7 &= 2A + B \\ 8 &= A - B - C \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1/2, \\ B &= -8, \\ C &= 1/2. \end{aligned}$$

**Metod 2** (Handpåläggning)

Denna metod fungerar på termer med enkla nämnare och termer med multipel nämnare av maximal grad. I partialbråkuppdelningen

$$\frac{x^4}{(x-1)\big((x+1)^2+1\big)(x+3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2+1} + \frac{D}{(x+3)^2} + \frac{E}{x+3}$$

kan vi bestämma $A$ och $D$ med handpåläggning. För att bestämma $A$ täcker vi över den faktor som i vänsterledet svarar mot $A$,

$$\frac{x^4}{\quad\big((x+1)^2+1\big)(x+3)^2},$$

och stoppar istället för $x$ in det $x$-värde som gör den övertäckta faktorn noll, d.v.s. $x = 1$,

$$A = \frac{1^4}{\quad\big((1+1)^2+1\big)(1+3)^2} = \frac{1}{80}.$$

Konstanten $D$ bestäms på motsvarande sätt

$$D = \frac{(-3)^4}{(-3-1)\big((-3+1)^2+1\big)\quad} = -\frac{81}{20}.$$

Övriga konstanter bestäms t.ex. med metod 1.

## Generaliserade integraler

Det finns två typer av generaliserade integraler,

- Integrationsområdet obegränsat,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx,$$
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^a f(x)\,dx.$$

- Integranden obegränsad. Om $|f(x)| \to \infty$ då $x \to a^+$ då definieras

$$\int_a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon} f(x)\,dx,$$
$$\int^a f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int^{a-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

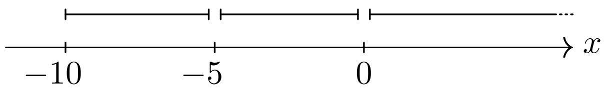
Om det finns flera typer av singulariteter i en generaliserad integral delas integrationsområdet upp i delintervall så att varje del endast har singulariteter i ändpunkterna.

Exempel

Integralen

$$\int_{-10}^\infty \frac{dx}{x|x+5|^{1/3}}$$

delas upp i nedanstående intervall.




## Majorantprincipen

Om $0 \le f(x) \le g(x)$ i en omgivning av $a$. Då är

- $\int^a g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow$ $\int^a f(x)\,dx$ konvergent.
- $\int^a f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow$ $\int^a g(x)\,dx$ divergent.

## Jämförelseprincipen

Om $f(x)$ och $g(x) > 0$ i en omgivning av $a$ och

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A \ne 0,$$

då konvergerar och divergerar integralerna

$$\int^a f(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int^a g(x)\,dx$$

samtidigt.

### *p*-integraler

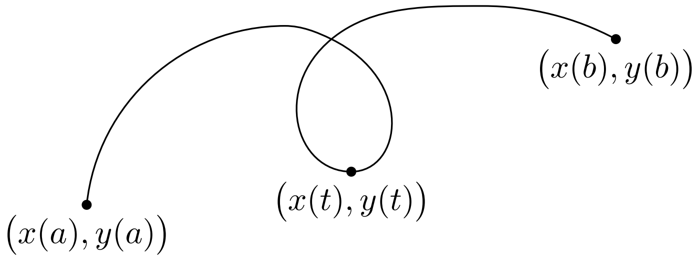
**Sats**
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\text{konvergent,} & \text{om } p > 1,\\ \text{divergent,} & \text{om } p \le 1.\end{cases}$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases}\text{konvergent,} & \text{om } p < 1,\\ \text{divergent,} & \text{om } p \ge 1.\end{cases}$$

## Parameterkurvor

Uttrycket

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned} \qquad (a \leq t \leq b), \tag{$*$}$$

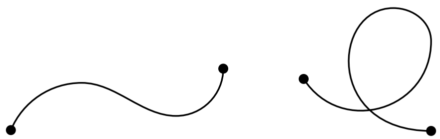
definierar en kurva i planet. För varje $t$-värde ger $(*)$ en punkt $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$ på kurvan.




När $t$ går från $a$ till $b$ så genomlöper punkten kurvan från startpunkten $\big(x(a), y(a)\big)$ till slutpunkten $\big(x(b), y(b)\big)$.

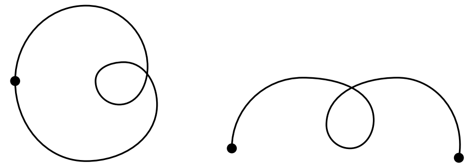
## Några begrepp

Enkel — En kurva är enkel om kurvan inte skär sig själv.



enkel ej enkel

Sluten — En kurva är sluten om startpunkten och slutpunkten sammanfaller.



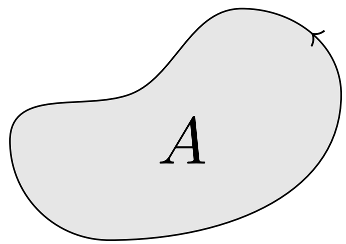
sluten ej sluten

Positivt led — En sluten kurva som genomlöps moturs sägs vara genomlöpt i positivt led.

## Areaformeln

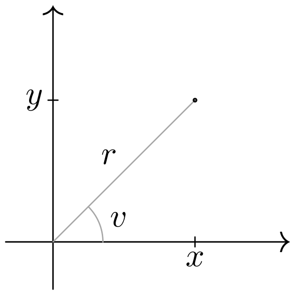
Om $\big(x(t), y(t)\big)$, $a \leq t \leq b$, är en enkel sluten kurva som genomlöps i positivt led, då ges arean som kurvan innesluter av

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt \\ &= \int_a^b x\dot{y}\,dt = -\int_a^b \dot{x}y\,dt. \end{aligned}$$



## Polära koordinater

En punkts läge i planet kan anges av dess avstånd $r$ till origo och den vinkel $v$ som punkten bildar med $x$-axeln.



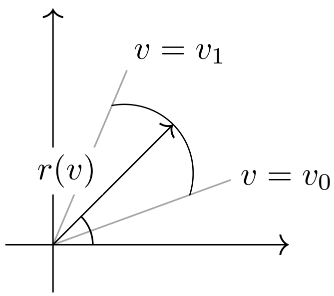

Talparet $(r, v)$ kallas för punktens polära koordinater.

## Kurvor givna i polär form

Om vi till varje vinkel $v$ i ett vinkelområde $v_1 \leq v \leq v_2$ ordnar en radie

$$r = r(v),$$

så kommer detta att beskriva en kurva i planet.




Om $r(v) < 0$ hamnar kurvan på den motsatta sidan om vinkel $v$.

## Areaformeln

Arean av området som innesluts av vinkellinjerna $v = v_1$ och $v = v_2$ samt kurvan $r = r(v)$, $(v_1 \leq v \leq v_2)$, ges av

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} r(v)^2 \, dv.$$