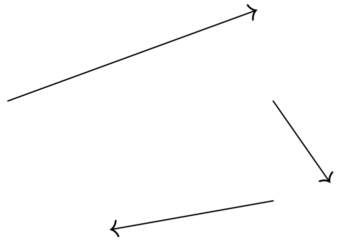
Vektorer

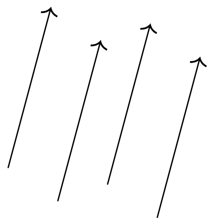
En vektor anger en riktning i rummet (eller planet) och en längd (belopp).

Vektorer brukar ritas som pilar,



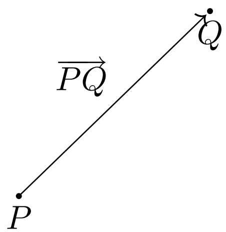
och betecknas med bokstäver i fet stil $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r}, \ldots$.

Notera att en vektor inte har någon förankringspunkt i rummet utan alla vektorer som pekar i samma riktning och är lika långa är samma vektor.



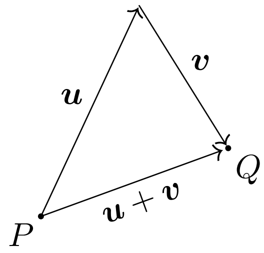
Längden av en vektor $\boldsymbol{v}$ betecknas $\|\boldsymbol{v}\|$. En vektor som har längd 1 kallas för en enhetsvektor.

Vektorn som när den placeras i punkten P får sin spets i punkten Q betecknas $\overrightarrow{PQ}$.



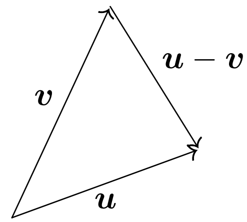
Vektoraddition

Summan av två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ får vi på följande vis: Placera $\boldsymbol{u}$ i punkten P och placera $\boldsymbol{v}$ i den punkt $\boldsymbol{u}$:s spets hamnar. Då har $\boldsymbol{v}$ sin spets i en punkt Q. Summan $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ är vektorn $\overrightarrow{PQ}$.



Vektorsubtraktion

Differensvektorn $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ är den vektor som när vi lägger till $\boldsymbol{v}$ får $\boldsymbol{u}$.

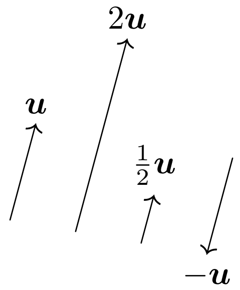


$$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$$

Multiplikation med skalär

Om $k > 0$ pekar vektorn $k\boldsymbol{u}$ i samma riktning som $\boldsymbol{u}$ men har längd k gånger $\boldsymbol{u}$:s längd.

Om $k < 0$ pekar vektorn $k\boldsymbol{u}$ i motsatt riktning som $\boldsymbol{u}$ och har längd $|k|$ gånger $\boldsymbol{u}$:s längd.



Polär uppdelning

En vektor $\boldsymbol{u}$ kan skrivas som

$$\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|\, \boldsymbol{e}_u,$$

där $\boldsymbol{e}_u$ är enhetsvektorn som pekar i $\boldsymbol{u}$-riktningen.

Detta är alltså en uppdelning av vektorn $\boldsymbol{u}$ i dess belopp (längd) $\|\boldsymbol{u}\|$ och dess riktning $\boldsymbol{e}_v$.

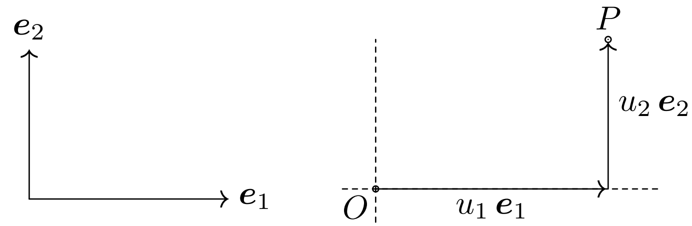
Räkneregler

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u} && \text{(Kommutativa lagen)}\\
\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} && \text{(Associativa lagen)}\\
k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v} && \text{(Distributiva lagen)}\\
(k+\ell)\boldsymbol{u} &= k\boldsymbol{u}+\ell\boldsymbol{u} && \text{(Distributiva lagen)}\\
k(\ell\boldsymbol{u}) &= (k\ell)\boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

Koordinatsystem

I planet

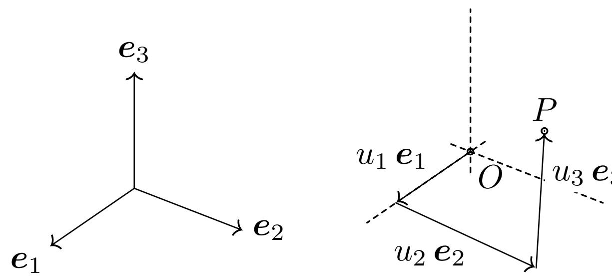
Om vi har givet två icke-parallella vektorer $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ i planet, då kan vi beskriva varje punkt P i planet på följande sätt: Utgående från en baspunkt O anger vi sträckor u_1 och u_2 vi ska gå i respektive vektorriktning $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ för att komma till punkten.



Talparet (u_1, u_2) kallas för punktens koordinater i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

I rummet

Med tre vektorer $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ i rummet som inte ligger i ett plan kan vi uttrycka varje punkt i rummet genom att ange en baspunkt O och tre sträckor i $\boldsymbol{e}_1$-, $\boldsymbol{e}_2$- respektive $\boldsymbol{e}_3$-riktningen som tar oss till punkten.

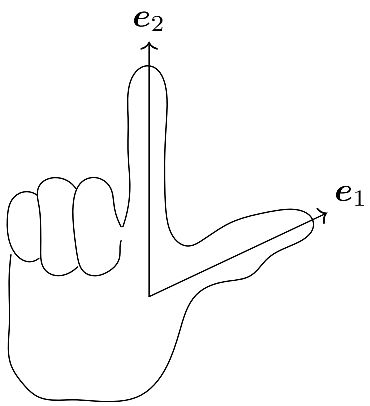


Taltrippeln (u_1, u_2, u_3) kallas för punktens koordinater i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

Orientering

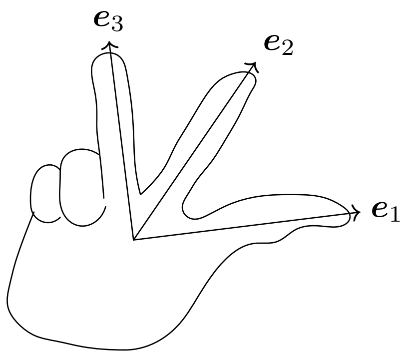
I planet

Ett koordinatsystem i planet är ett högerhandssystem om basvektorerna $\boldsymbol{e}_1$ och $\boldsymbol{e}_2$ har samma inbördes förhållande som högerhandens tumme och pekfinger.



I rummet

Ett koordinatsystem i rummet är ett högerhandssystem om basvektorerna $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ och $\boldsymbol{e}_3$ har samma inbördes förhållande som högerhandens tumme, pekfinger och långfinger.



Några begrepp

Komposant

Om $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i koordinatsystemet $O\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$, d.v.s.

$$\boldsymbol{u} = u_1\,\boldsymbol{e}_1 + u_2\,\boldsymbol{e}_2 + u_3\,\boldsymbol{e}_3,$$

då kallas $u_1\boldsymbol{e}_1$, $u_2\boldsymbol{e}_2$ och $u_3\boldsymbol{e}_3$ för $\boldsymbol{u}$:s komposanter i $\boldsymbol{e}_1$-, $\boldsymbol{e}_2$- och $\boldsymbol{e}_3$-riktningen.

Linjärkombination

En summa i formen

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m,$$

där $c_1, \ldots, c_m$ är tal, kallas för en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$.

Linjärt beroende/oberoende

Om någon av vektorerna i samlingen $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ kan uttryckas som en linjärkombination av de övriga vektorerna då sägs vektorerna vara linjärt beroende, annars linjärt oberoende.

I en linjärt beroende samling vektorer finns alltså fler vektorer än antalet riktningar de beskriver.

Sats Vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ är linjärt oberoende om följande implikation gäller

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0} \quad\Rightarrow\quad c_1 = \cdots = c_m = 0.$$

Bas

Om $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$ i planet är linjärt oberoende, då kan varje vektor i planet skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ kallas därför för en bas till planet.

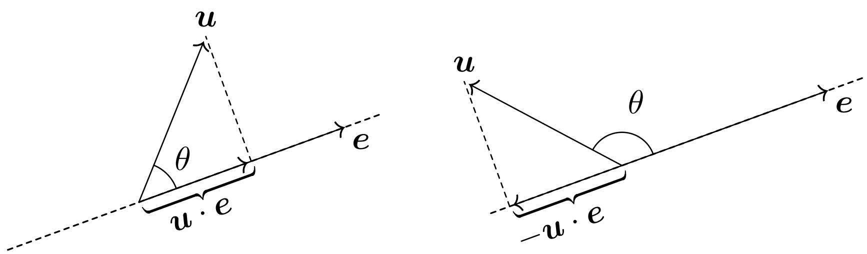
Om $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$ i rummet är linjärt oberoende, då kan varje vektor i rummet skrivas som en linjärkombination av $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ och $\boldsymbol{u}_3$. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ kallas för en bas till rummet.

ON-bas

Om basvektorerna i en bas är sinsemellan vinkelräta och har längd 1, då sägs basen vara en ON-bas (ortonormerad bas).

Skalärprodukt

Skalärprodukten $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}$ mellan en vektor $\boldsymbol{u}$ och en enhetsvektor $\boldsymbol{e}$ är längden av vektorn $\boldsymbol{u}$:s komposant i riktningen $\boldsymbol{e}$.



Pekar $\boldsymbol{u}$:s komposant och $\boldsymbol{e}$ i motsatta riktningar är skalärprodukten negativ.

Om θ är vinkeln mellan $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{e}$, då är

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e} = \|\boldsymbol{u}\| \cos\theta.$$

Skalärprodukten mellan två vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ definieras som

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \big(\|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{e}_v\big) = \|\boldsymbol{v}\|\,\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_v = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\cos\theta.$$

Sats $\quad \boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är vinkelräta $\quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$

Koordinatform

Om $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i ett ON-system, då är

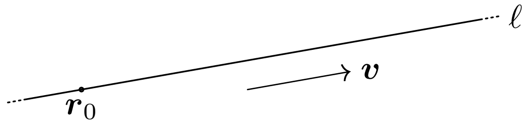
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Räkneregler

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} && \text{(Kommutativa lagen)} \\ \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} && \text{(Distributiva lagen)} \\ k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) &= (k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (k\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

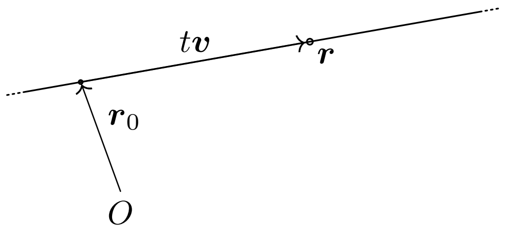
Linje

Låt ℓ vara linjen som går genom punkten $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och är parallell med riktningsvektorn $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$.



Parameterform

Varje punkts läge på linjen kan beskrivas som att vi först går till $\boldsymbol{r}_0$ och sen en viss sträcka utmed $\boldsymbol{v}$-riktningen,



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\,\boldsymbol{v}$$

Parametern t bestämmer punktens avstånd från punkten $\boldsymbol{r}_0$.

Utskrivet i koordinatform får vi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at, \\ y &= y_0 + bt, \\ z &= z_0 + ct. \end{aligned}$$

Ekvation

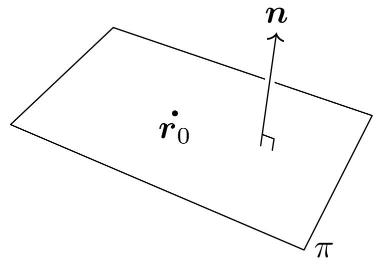
Linjen kan också beskrivas med ekvationen

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (\text{om } a, b, c \neq 0).$$

En punkt (x, y, z) ligger på linjen om den uppfyller ekvationen.

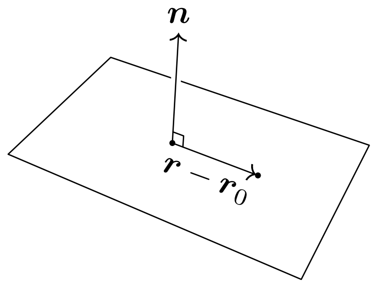
Plan

Ett plan π kan beskrivas genom att ange en punkt $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i planet och en vektor $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ som är vinkelrät mot planet, en s.k. normalvektor.



Ekvation

En punkt $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ ligger i planet om vektorn $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ (från $\boldsymbol{r}_0$ till $\boldsymbol{r}$) är parallell med planet, vilket är detsamma som att $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{n}$,



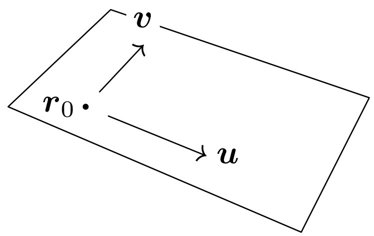
$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.$$

I koordinatform blir ekvationen

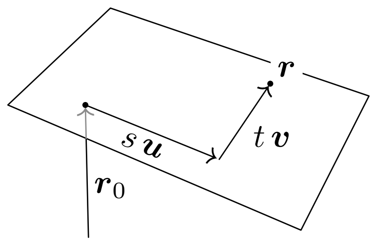
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Parameterform

Ett plan kan också beskrivas genom att ange en punkt $\boldsymbol{r}_0$ i planet och två linjärt oberoende vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som är parallella med planet.



Varje punkt i planet kan då beskrivas som att vi först går till $\boldsymbol{r}_0$ och sedan en viss sträcka i $\boldsymbol{u}$-riktningen följt av en viss sträcka i $\boldsymbol{v}$-riktningen,

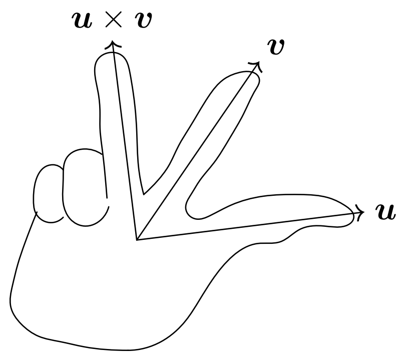


$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + s\,\boldsymbol{u} + t\,\boldsymbol{v}.$$

Parametrarna s och t anger den sträcka vi rör oss i respektive riktning.

Kryssprodukt

Kryssprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ av två icke-parallella vektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ definieras som den vektor som har en riktning som är vinkelrät mot $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ enligt högerhandsregeln,



och har beloppet

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\sin\theta.$$

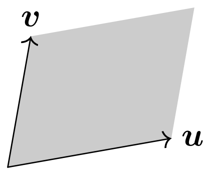
Koordinatform

Om $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ och $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i ett högerhänt ON-system, då är

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \bigl(u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1\bigr).$$

Geometrisk tolkning

Om vi tolkar $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ som kantvektorer i ett parallellogram,



då är

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \text{arean av parallellogrammet.}$$

Räkneregler

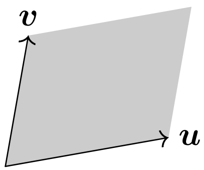
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} && \text{(Antikommutativa lagen)}\\
\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} && \text{(Distributiva lagar)}\\
(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} &&\\
k(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) &= (k\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (k\boldsymbol{v}) &&
\end{aligned}$$

Observera att $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \neq (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w}$ i allmänhet. Den associativa lagen gäller alltså inte.

Determinanter

2 × 2-determinanter

Två vektorer $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ och $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ i planet spänner upp ett parallellogram.



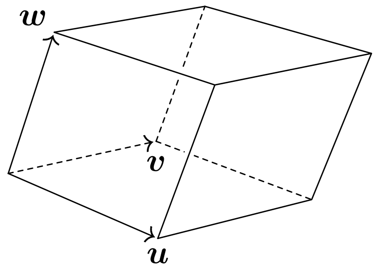
Arean av detta parallellogram är beloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & - \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Determinanten är alltså en area med tecken.

3 × 3-determinanter

Tre vektorer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$ i rummet spänner upp en parallellepiped.



Volymen av denna parallellepiped är beloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Kofaktorutveckling längs första raden

En 3 × 3-determinant kan beräknas med kofaktorutveckling längs första raden.

Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Varje element i första raden ger en term i kofaktorutvecklingen.

Vi börjar med det vänstra elementet och stryker den rad och den kolumn elementet befinner sig i.

$$\begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{10} \\ \cancel{5} & -2 & 3 \\ \cancel{1} & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Determinanten av de tal som återstår kallas för en minor. Den första termen i kofaktorutvecklingen är elementet gånger denna minor,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + \cdots$$

När vi går vidare till nästa element i första raden strycker vi på samma sätt den rad och den kolumn elementet befinner sig i,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Den andra termen i utvecklingen är elementet gånger den nya minor vi får av de icke strukna talen. Denna term har dock ett minustecken framför sig,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \cdots$$

För det sista elementet i raden stryker vi raden och kolumnen elementet befinner sig i,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Den sista termen i utvecklingen blir elementet gånger motsvarande minor (med plustecken),

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 10 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Detta är kofaktorutvecklingen av determinanten längs första raden. 2×2-minorerna i utvecklingen räknar man sen ut med den vanliga formeln.

Determinantformel för kryssprodukten

Kryssprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ kan beräknas med följande formel

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

där determinanten beräknas med kofaktorutveckling längs första raden,

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Skalär trippelprodukt

Den skalära trippelprodukten definieras som

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

Sats $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ är linjärt beroende $\quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 0.$

Bevis Vektorerna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ är linjärt beroende omm (om och endast om) de ligger i ett plan, vilket är detsamma som att parallellepipeden de spänner upp har volym noll, d.v.s. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = 0$.

Avståndsproblem

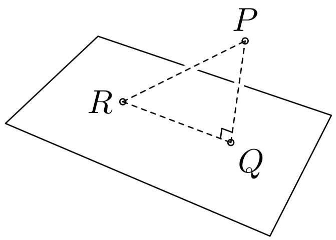
Problem

Bestäm det kortaste avståndet mellan en punkt/linje/plan och en punkt/linje/plan.

Gemensamt för alla dessa avståndsproblem är att det kortaste avståndet ges av det vinkelräta avståndet.

Låt oss visa detta för avståndsproblemet mellan en punkt P och ett plan.

Låt Q vara den punkt i planet som gör att vektorn $\overrightarrow{PQ}$ är vinkelrät mot planet och låt R vara någon punkt i planet.



PQR bildar då en rätvinklig triangel och Pythagoras sats ger att

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QR}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PQ}\|^2.$$

Detta visar att $\|\overrightarrow{PR}\| \geq \|\overrightarrow{PQ}\|$, d.v.s. att $\|\overrightarrow{PQ}\|$ är det kortaste avståndet.

De möjliga avståndsproblemen är

Avstånd mellan	punkt	linje	plan
punkt	1	2	3
linje		4	5
plan			6

Vi visar nu hur man löser varje typproblem.

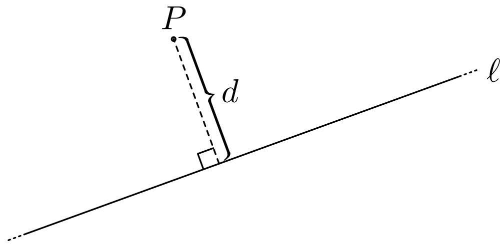
1. Punkt-punkt

Avståndet mellan punkterna $P = (p_1, p_2, p_3)$ och $Q = (q_1, q_2, q_3)$ ges av avståndsformeln

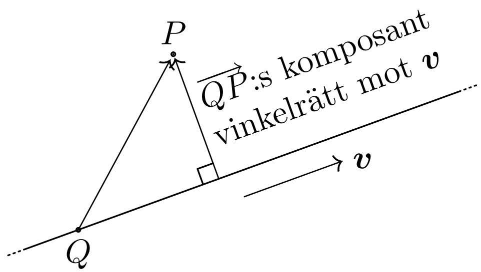
$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

2. Punkt-linje

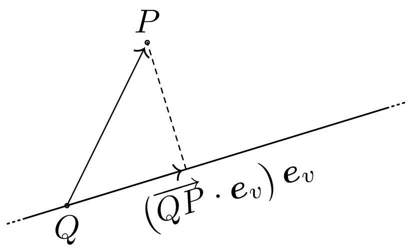
Avståndet mellan punkten P och linjen ℓ ges av det vinkelräta avståndet.



Tag en punkt Q på ℓ. Då ges avståndet av längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant vinkelrätt mot linjens riktning $\boldsymbol{v}$.



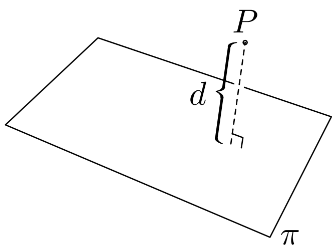
Vi får denna komposant som differensen mellan $\overrightarrow{QP}$ och $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{v}$-riktningen,



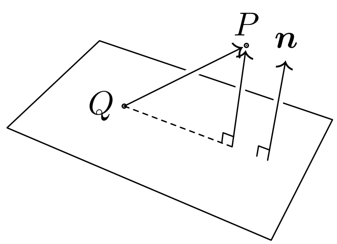
$$d = \|\overrightarrow{QP} - (\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_v)\boldsymbol{e}_v\|.$$

3. Punkt-plan

Avståndet mellan punkten P och planet π ges av det vinkelräta avståndet.



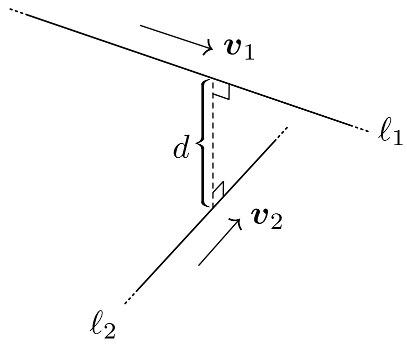
Tag en punkt Q på π. Då ges avståndet d av längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i planets normalriktning $\boldsymbol{n}$.



$$d = \|(\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n|.$$

4. Linje-linje

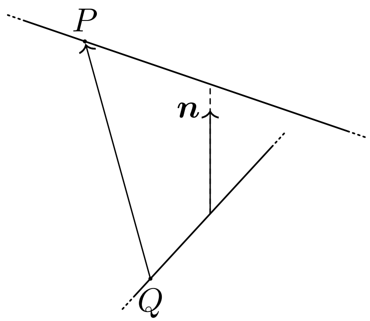
Avståndet mellan linjen ℓ_1 och linjen ℓ_2 ges av det vinkelräta avståndet.



Avståndsvektorn är parallell med vektorn

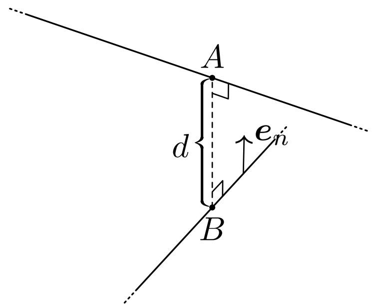
$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2,$$

som just är vinkelrät mot linjernas riktningar $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$. Tag en punkt P på ℓ_1 och en punkt Q på ℓ_2. Då ges avståndet d av längden av vektorn $\overrightarrow{QP}$:s komposant i $\boldsymbol{n}$-riktningen.

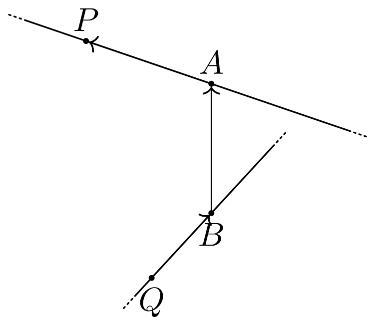


$$d = \|(\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n\| = |\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n|$$

Vi kan inse detta med följande resonemang. Låt A och B vara de punkter på respektive linje som ger det kortaste avståndet.



Då är $d = \|\overrightarrow{BA}\| = |\overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n|$. Dela upp vektorn $\overrightarrow{QP}$ genom att gå via B och A.



$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$$

Vi har nu att

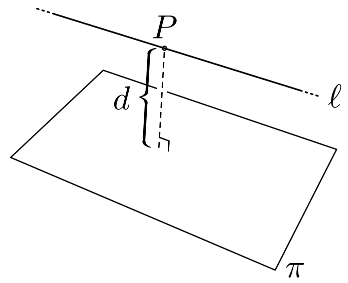
$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{QP} \cdot \boldsymbol{e}_n| &= |(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \boldsymbol{e}_n| \\
&= \big|\, \overrightarrow{QB} \cdot \boldsymbol{e}_n + \overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n + \overrightarrow{AP} \cdot \boldsymbol{e}_n \,\big|
\end{aligned}$$

De gråfärgade termerna blir noll eftersom $\overrightarrow{QB}$ och $\overrightarrow{AP}$ är parallella med respektive linje och därmed vinkelrät mot $\boldsymbol{e}_n$.

$$= |0 + \overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n + 0| = |\overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{e}_n| = \|\overrightarrow{BA}\| = d.$$

5. Linje-plan

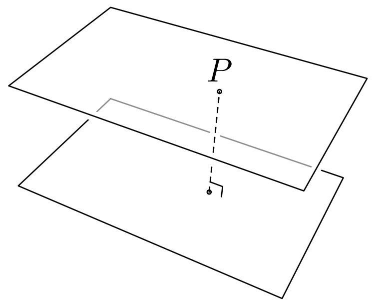
Linjen ℓ och planet π måste vara parallella för att problemet ska vara meningsfullt (annars skär de varandra och avståndet är noll). Tag en punkt P på linjen.



Då är avståndet mellan linjen och planet lika med avståndet mellan punkten P och planet. Detta är ett punkt-plan-problem (se fall 3).

6. Plan-plan

De två planen måste vara parallella för att problemet ska vara meningsfullt (annars skär de varandra och avståndet är noll). Tag en punkt P i det en planet.



Då är avståndet mellan planen lika med avståndet mellan punkten P och det andra planet. Detta är ett punkt-plan-problem (se fall 3).