Matriser

En matris är en rektangulär tabell av tal,

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 17 \\ -4 & -3 & 2 \\ 14 & 4 & 0 \\ 6 & 100 & -2 \end{pmatrix}$$

Om matrisen har m rader och n kolumner så säger vi att matrisen har storlek $m \times n$.

Index

Vi indexerar elementen i matrisen genom att införa matrisen i ett koordinatsystem.

kolumn

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 17 \\ -4 & -3 & 2 \\ 14 & 4 & 0 \\ 6 & 100 & -2 \end{pmatrix}$$

rad

(i, j)-elementet är talet på rad i och kolumn j.

Matrisalgebra

Addition

Vi definierar summan av två matriser med samma storlek genom att summera matriserna komponentvis,

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 & -3+(-4) \\ -1+0 & 7+5 \\ 0+1 & 5+1 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion

Differensen av två lika stora matriser är den komponentvisa differensen,

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 & -3-(-4) \\ -1-0 & 7-5 \\ 0-1 & 5-1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation med skalär

När vi multiplicerar en matris med ett tal multiplicerar vi varje element i matrisen med talet,

$$3\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix}.$$

Räkneregler

Eftersom vi definierat räkneoperationerna komponentvis ärver vi samma räkneregler från de reella talen.

Om A, B är matriser och a, b är skalärer, då gäller att

Kommutativa lagen $\quad A + B = B + A$

Associativa lagen $\quad A + (B + C) = (A + B) + C$

Distributiva lagar
$$\begin{aligned} a(A+B) &= aA + aB \\ (a+b)A &= aA + bA \\ a(bA) &= (ab)A \\ a(AB) &= (aA)B = A(aB) \end{aligned}$$

Matrismultiplikation

Produkt av en rad med en kolumn

Vi ska införa en speciell produkt för uttryck av typen

$$ax + by + cz,$$

genom att definiera

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z.$$

Med denna produkt separerar vi naturligt koefficienterna a, b, c och variablerna x, y, z i två faktorer.

För uttryck av typen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

inför vi motsvarande produkt

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Produkt av rader med en kolumn

Ofta har vi, t.ex. i ekvationssystem, flera uttryck med samma variabler men olika koefficienter,

$$\begin{aligned} &ax + by + cz, \\ &dx + ey + fz. \end{aligned}$$

Genom att vi i den tidigare produkten skrev koefficienterna som en rad kan vi införa ett kompakt beteckningssätt för ovanstående uttryck genom att stapla koefficienterna på höjden,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \\ d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z \end{pmatrix}$$

I denna utvidgade produkt verkar alltså raderna i den vänstra matrisfaktorn oberoende av varandra.

Mer allmänt låter vi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

betyda

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Produkt av rader med kolumner

Det förekommer också att koefficienterna är desamma, men att variablerna är olika. Exempelvis gäller detta när vi har samma ekvationssystem men olika högerled,

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= g \\ dx + ey + fz &= h \end{aligned} \quad \text{och} \quad \begin{aligned} au + bv + cw &= i \\ du + ev + fw &= j \end{aligned}$$

Ekvationerna kan då skrivas som

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}.$$

Ett sådant system av ekvationssystem kan vi sammanfatta genom att i sidled rada upp kolumnerna,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & i \\ h & j \end{pmatrix},$$

och med detta skrivsätt mena att raderna i den vänstra matrisen multipliceras med kolumnerna i den högra matrisfaktorn,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz & au + bv + cw \\ dx + ey + fz & du + ev + fw \end{pmatrix}.$$

Räkneregler

Om A, B, C är matriser och a är en skalär, då gäller att

Associativa lagen $\quad A(BC) = (AB)C$

Distributiva lagar
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

Potenser
$$A^n = A \cdot A \cdots A \quad (n \text{ faktorer})$$
$$A^{m+n} = A^m A^n$$
$$(A^m)^n = A^{mn}$$

Obs! $AB \neq BA$ i allmänhet!

Transponat

Transponatet A^t av en matris A är den matris vi får när vi i matrisen A låter rader bli kolumner

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Om matrisen A har storleken $m \times n$ så har alltså A^t storleken $n \times m$.

Räkneregler

Om A, B är matriser och a är en skalär, då gäller att

$$A^{tt} = A$$
$$(A + B)^t = A^t + B^t$$
$$(aA)^t = aA^t$$
$$(AB)^t = B^t A^t$$

Några speciella matriser

Nollmatris

Nollmatrisen som bara består av nollor,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

fungerar som 0:a i matrisalgebran,

$$A + O = A.$$

Enhetsmatrisen

Enhetsmatrisen med ettor på diagonalen och nollor annars,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

fungerar som 1:a i matrisalgebran,

$$EA = AE = A.$$

Inversmatris

Inversen till en matris A är en matris B som uppfyller

$$AB = BA = E,$$

och betecknas A^{-1}.

Inverser finns bara till kvadratiska matriser, men inte till alla kvadratiska matriser.

Triangulär matris

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Övertriangulär, eller högertriangulär

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Undertriangulär, eller vänstertriangulär

Diagonalmatris

En kvadratisk matris med nollelement utanför diagonalen,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kallas för en diagonalmatris.

Symmetrisk matris

En kvadratisk matris är symmetrisk om spegelbilderna av elementen i diagonalen är lika

$$\begin{pmatrix} 3 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 4 & -1 \\ \boxed{0} & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \end{pmatrix}$$

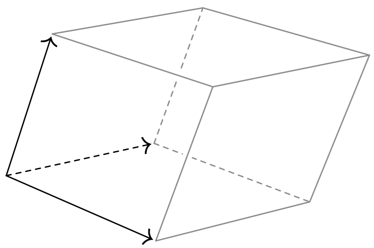
Matematiskt uttryckt är en matris A symmetrisk om $A^t = A$.

Determinant av ordning n

Vektorerna

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),\\
\boldsymbol{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}),\\
&\ \ \vdots\\
\boldsymbol{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}),
\end{aligned}$$

spänner upp en hyperparallellepiped i rummet $\boldsymbol{R}^n$.



Exempel när $n = 3$

Volymen av denna parallellepiped är beloppet av determinanten

$$\begin{vmatrix} \text{———} & \boldsymbol{a}_1 & \text{———} \\ \text{———} & \boldsymbol{a}_2 & \text{———} \\ & \vdots & \\ \text{———} & \boldsymbol{a}_n & \text{———} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vi ska inte gå in på hur man egentligen definierar volym i $\boldsymbol{R}^n$.

Sarrus regel

Sarrus regel är en minnesregel för beräkning av 3×3-determinanter.

Vi placerar de två första kolumnerna till höger om determinanten

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{array}\right.$$

och ritar ut höger- och vänsterdiagonaler,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \end{array}$$

Determinantens värde får vi genom att lägga ihop högerdiagonalprodukterna och dra ifrån vänsterdiagonalprodukterna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 3 & 6 \\ - & - & -\ + & + & + \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 \\ &\quad - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

Observera att denna regel endast gäller för 3×3-determinanter.

Kofaktorutveckling

Vi kan beräkna en determinant genom kofaktorutveckling längs en rad eller en kolumn. Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Utveckling längs en rad

Vi väljer en rad i determinanten (vilken som helst), t.ex. rad 3,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

Varje element i raden ger upphov till en term i utvecklingen.

Termen som svarar mot det första elementet -1 får vi som elementet gånger motsvarande minor, d.v.s. determinanten av de tal som återstår när vi stryker den rad och kolumn elementet befinner sig i.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Termen har också ett tecken som ges av motsvarande element i följande teckenmatris

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Alternerande teckenmatris

Nästa term i utvecklingen bildas på motsvarande sätt

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

där vi nu har ett minustecken i teckenmatrisen

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

De andra två elementen på raden ger de två sista termerna i utvecklingen

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= +(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & -14 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 9\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+\ 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & -14 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

Utveckling längs en kolumn

Kofaktorutveckling längs en kolumn går till på samma sätt som för en rad. Vi väljer en kolumn i matrisen, t.ex. kolumn 2,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Varje element i kolumnen ger en term i utvecklingen.

Den första termen är det första elementet gånger motsvarande minor. Tecknet framför termen får vi från motsvarande element i teckenmatrisen

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Den första termen är alltså

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -\, 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} + \cdots$$

Övriga element i kolumnen ger resten av termerna,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & -14 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &+ 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Elementära radoperationer

Det finns tre elementära radoperationer.

1. Multiplicera en rad med en nollskild konstant.

Före: $\begin{pmatrix} \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \\ \end{pmatrix} 2$

Efter: $\begin{pmatrix} \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & 2\cdot 5 \\ \\ \end{pmatrix}$

2. Addera en multipel av en rad till en annan rad.

Före: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{-2}$

Efter: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6-2\cdot 2 & 7-2\cdot 3 & 8-2\cdot 4 & 9-2\cdot 5 \end{pmatrix}$

3. Byta plats på två rader.

Före: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Efter: $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Determinantberäkning med radoperationer

Om vi utför en elementär radoperation på en matris så ändras dess determinants värde enligt följande regler:

1. $|A| = |A|$,
2. $|A| = \frac{1}{a}|A|, \quad (\text{där } a \neq 0)$,
3. $|A| = -|A|$.

Strategin är att vi med radoperationer omvandlar matrisen till en matris vars determinant är enkel att beräkna, t.ex. en triangulär matris.

Sats
$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}.$$

Bevis Kofaktorutveckla hela tiden första kolumnen,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & t_{nn} \end{vmatrix} &= t_{11}\begin{vmatrix} t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \cdots + 0 \\ &= t_{11}t_{22}\begin{vmatrix} t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & t_{nn} \end{vmatrix} + 0 + \cdots + 0 \\ &= \quad \text{o.s.v.} \quad = t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}. \end{aligned}$$

Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix}.$$

Först byter vi plats på rad 1 och 2 för att få ett nollskilt tal i position $(1,1)$. Detta steg gör att determinanten byter tecken,

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix}.$$

Sedan vill vi ha nollor under $(1,1)$-elementet, och det får vi genom att addera 1 gånger första raden till tredje raden,

$$-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & -9 & -13 \end{vmatrix} \textcircled{+} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3+3 & -9+1 & -13+(-2) \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Denna radoperation ändrade inte determinantens värde.

Sen flyttar vi uppmärksamheten till diagonalelementet $(2,2)$. För att få en nolla under 4:an adderar vi 2 gånger andra raden till tredje raden,

$$-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -8 & -15 \end{vmatrix} \textcircled{2} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0+2\cdot 0 & -8+2\cdot 4 & -15+2\cdot 7 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Notera att eftersom vi hade en 0:a i andra radens första kolumn så påverkade inte denna radoperation den första kolumnen. Vi lyckades alltså behålla den kolumnen intakt.

Vi har nu en triangulär determinant vars värde är produkten av diagonalelementen,

$$-\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\cdot 4\cdot(-1) = 12.$$

Determinantregler

Om A och B är $n \times n$-matriser, och a är en skalär, då gäller att

1. $\det(aA) = a^n \det A$,
2. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,
3. $\det(A^t) = \det A$,
4. $\det(A^{-1}) = \big(\det A\big)^{-1}$.

Eftersom radoperationer blir kolumnoperationer när vi transponerar en matris ger $\det A = \det A^t$ följande regler för kolumnoperationer

- $|A| = |A_{\circ\curvearrowright}|$,
- $|A| = \frac{1}{a}|A_{\textcircled{a}\curvearrowright}|$,
- $|A| = -|A_{\curvearrowleft\curvearrowright}|$.

Adjunktformeln

Vi ska härleda en allmän formel för inversen till en matris A. Denna formel kallas för adjunktformeln.

3×3-fallet

Kofaktorutveckla determinanten av matrisen A längs första kolumnen,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= +a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Detta uttryck kan vi se som en produkt av en rad och en kolumn,

$$= \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Betrakta nu determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

som har värdet noll eftersom de två första kolumnerna är lika. Kofaktorutveckling längs första kolumnen ger

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= +a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Detta uttryck kan vi skriva som

$$= \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Notera att vi har samma radvektor som i (1).

Betrakta sen nolldeterminanten

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(första och tredje kolumnen lika) och kofaktorutveckla första kolumnen

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&\qquad = +a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&\qquad = \left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right) \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Eftersom vi har samma radvektor i (1), (2) och (3) kan vi rada upp kolumnvektorerna och sammanfatta de tre sambanden som

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Om vi istället kofaktorutvecklar $\det A$ längs den andra kolumnen och genomför ett liknande resonemang får vi sambanden

$$\begin{aligned}
&\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} 0 & \det A & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Kofaktorutveckling av $\det A$ längs den tredje kolumnen ger slutligen följande tre samband

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Vad (4), (5) och (6) har gemensamt är den andra faktorn A i vänsterledet. Med matrisprodukten kan vi sammanfatta alla dessa samband genom att stapla radvektorerna på varandra,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Genom att stuva om detta uttryck något och införa följande beteckning för minorerna

$$\begin{aligned} M_{ij} = {} & \text{determinanten av } A \text{ med rad } i \\ & \text{och kolumn } j \text{ borttagna.} \end{aligned}$$

har vi att

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & E & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Genomför vi sen hela detta resonemang med med radutveckling istället så fås

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{21} & +M_{31} \\ -M_{12} & +M_{22} & -M_{32} \\ +M_{13} & -M_{23} & +M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & E & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Matrisen av minorer (även kallad adjunktmatrisen) delat med $\det A$ är alltså inversmatrisen till A. Lite mer minnesvänligt brukar man skriva

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Allmänt fall

För en $n \times n$-matris A med $\det A \neq 0$ ges inversen av formeln

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} +M_{11} & \cdots & (-1)^{n+1} M_{1n} \\ -M_{21} & \cdots & (-1)^{n+2} M_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} M_{n1} & \cdots & (-1)^{n+n} M_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Sats $\quad A$ inverterbar $\quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0$.

Bevis $\Rightarrow$ Om A är inverterbar ger determinantreglerna att

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad \det A \neq 0.$$

$\Leftarrow$ Om $\det A \neq 0$ så ger adjunktformeln A^{-1}, som därmed existerar.

Linjära ekvationssystem

Ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{aligned} 3x - 4y + 7z - 3u &= 3, \\ 2x + y \phantom{{}+7z} + 4u &= 2, \end{aligned}$$

kan vi med matrisprodukten skriva som

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eller mer symboliskt

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vi ska presentera tre metoder för att lösa linjära ekvationssystem varav de två första bara fungerar om koefficientmatrisen A är kvadratisk och inverterbar.

Inversmultiplikation

Vi vänstermultiplicerar ekvationen $Ax = b$ med A^{-1},

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad &\Leftrightarrow \quad Ex = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Inversen A^{-1} får vi från adjunktformeln.

Cramers regel

Systemet $Ax = b$, där A inverterbar, har lösningen

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad \text{för } i = 1, 2, \ldots, n,$$

där A_i är matrisen A med kolumn i ersatt med högerledet b.

Bevis

$$x_i \cdot \det A$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{1i}x_i & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{2i}x_i & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & a_{ni}x_i & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$x_1 \qquad x_{i-1} \qquad x_{i+1} \qquad x_n$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A_i$$

Gausselimination

Vi ska använda elementära radoperationer och stegvis förenkla ekvationssystemet tills vi direkt kan avläsa lösningen. Den viktiga observation som ligger bakom denna metod är att en radoperation inte ändrar systemets lösningsmängd.

Strategin vid gausselimination liknar den vi använde vid determinantberäkning med radoperationer. Vi illustrerar med ett exempel,

$$\begin{aligned} 2y + 2z &= 8, \\ x + 6y - 2z &= 27, \\ -2x - 13y + 4z &= -57. \end{aligned}$$

För att uträkningen ska bli kompaktare och tydligare brukar man skriva systemet som en matris

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & -2 & 27 \\ -2 & -13 & 4 & -57 \end{array}\right)$$

I matrisen har vi rensat bort all överflödig information och bara behållt variabelkoefficienterna och högerledet.

Först ser vi till att få en 1:a i övre vänstra hörnet, t.ex. genom att byta plats på första och andra raden.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 6 & -2 & 27 \\ -2 & -13 & 4 & -57 \end{array}\right)$$

Sedan ser vi till att vi får nollor under denna 1:a genom att addera 2 gånger första raden till tredje raden (i den andra raden har vi redan en nolla).

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ -2 & -13 & 4 & -57 \end{array}\right) 2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ -2+2\cdot 1 & -13+2\cdot 6 & 4+2\cdot(-2) & -57+2\cdot 27 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vi går sedan vidare till nästa diagonalelement $(2,2)$. Vi multiplicerar raden med $\frac{1}{2}$ för att få en 1:a,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) \tfrac{1}{2} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vi adderar andra raden till tredje raden och adderar -6 gånger andra raden till första raden för att få nollor över och under 1:an.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 6 & -2 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{array}\right) + \; -6 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Det sista steget är att vi ser till att få nollor ovanför det tredje diagonalelementet.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) - \; 8 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Nu är det bara att avläsa lösningen från sluttablån

$$x = 11, \quad y = 3, \quad \text{och} \quad z = 1.$$

Jacobis metod för matrisinvers

Sats $(A \cdot B)\,\circlearrowright = (A\,\circlearrowright) \cdot B$
$(A \cdot B)\,@ = (A\,@) \cdot B$
$(A \cdot B)\,\rightleftarrows = (A\,\rightleftarrows) \cdot B$

Antag att A är inverterbar. Utför radoperationer som tar A till enhetsmatrisen E,

$$A\,\circlearrowright\circ\rightleftarrows\cdots\circlearrowright = E.$$

Utför samma radoperationer på E,

$$\begin{aligned} E\,\circlearrowright\circ\rightleftarrows\cdots\circlearrowright &= (A \cdot A^{-1})\circlearrowright\circ\rightleftarrows\cdots\circlearrowright \\ &= (A\,\circlearrowright\circ\rightleftarrows\cdots\circlearrowright) \cdot A^{-1} \\ &= E \cdot A^{-1} = A^{-1}. \end{aligned}$$

Ställer vi alltså upp A och E bredvid varandra och utför samma radoperationer på båda matriserna har vi räkneschemat

$$(A \mid E\,) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}).$$

Om matrisen A inte är inverterbar går den inte att radreducera till E.

Andra räkneschema

$$\begin{gathered} (A \mid B\,) \sim \cdots \sim (E \mid A^{-1}B\,) \\ (A^t \mid B^t\,) \sim \cdots \sim \big(E \mid (BA^{-1})^t\big) \end{gathered}$$