ICKE-LINJÄRA DYNAMISKA SYSTEM OCH DERAS TILLÄMPNINGAR INOM POPULATIONSDYNAMIK

HANS THUNBERG

Ett *dynamiskt system* består av en eller flera variabler som förändrar sig över tiden på ett lagbundet sätt. Ett omtalat exempel är de modeller som används vid beräkning av långtidsprognoser för vädret. Detta är ett system med tusentals tidsberoende variabler (temperatur, lufttryck, vindhastighet m.m. på olika mätpunkter), som ger en beskrivning av vädret. Hela idéen med väderprognoser är ju att vi utifrån vädersituationen (=värdet på dessa variabler) just nu, kan göra en prognos om vädret längre fram. Detta faktum uttrycks med ett antal ekvationer som utifrån de uppmätta värdena på variablerna *beräknar* nya värden som förmodas beskriva vädret om, säg, en timme. För att göra längre prognoser tar man nu och matar in de framräknade värdena (de som förmodas beskriva vädret om en timme) i ekvationerna igen, och får åter nya värden på variablerna, en prognos för vädret om två timmar. Genom att *iterera* (=upprepa) denna procedur kan vi i princip stega fram prognosen så långt fram i tiden som vi önskar. Men, och detta är ett stort ”men”, osäkerheten blir naturligtvis större ju flera steg vi tar. Av speciellt intresse är hur prognosen beror på intialvärdena (=de uppmätta värdena). Dessa är med nödvändihget behäftade med mätfel. I vissa fall växer dessa fel exponentiellt snabbt när vi itererar vår model, felet kan t.ex. fördubblas i varje steg. Man säger att modellen är *kaotisk*. Långa prognoser blir då principiellt omöjliga, trots att vi har antagit att utvecklingen är helt deterministisk. Minsta mätfel kommer förvrida prognosen enligt principen ”liten tuva stjälper stort lass”. Även om vi kraftig minskar osäkerheten i mätvärdena, kommer detta att ha en mycket liten effekt på hur långa prognoser vi kan göra med bibehållen tillförlitlighet.

Den typ av vädermodeller som nämns ovan är alltför komplicerade för att man skall kunna analysera dem fullständigt. Matematisk forskning kring dynamiska system behandlar idag betydligt enklare system, en del hämtade från tillämpningar, andra enkla matematiska prototypmodeller. Vi betraktar här fallet med en variabel $x(t)$ som tar värden vid diskreta tidpunkter $t = 0, t = 1, t = 2, \dots$ enligt en ekvation

$$x(t+1) = f\left[x(t)\right],$$

dvs. variabelns värde vid tid $t+1$ beror deterministiskt, via en funktion f, på dess värde vid föregående tidpunkt t. $t = 0$ tas som starttid, så $x(0)$ är systemets initiala tillstånd. Ett välstuderat fall är när f är ett 2:a grads-polynom, t.ex.

$$x(t+1) = 1 - 2\,[x(t)]^2 .$$

Dynamiska system används som nämnts för att modellera olika fenomen i vår omvärld. En-variabel modeller liknande den ovanstående används t.ex. för att beskriva storleken av en population av ett-åriga insekter vid tid (år) t. Modellen $x(t+1) = f\,[x(t)]$ säger då att populationsstorleken ett visst år endast beror på poulationens storlek föregående år.

Man vill förstå hur sådana här system beter sig i *det långa loppet*, efter många iterationer. Ofta kan man visa att det finns ett typiskt långtids-beteende, som är detsamma för de flesta initialvärden $x(0)$. Men hur ser det ut? Kommer följden $x(t)$ att stabilisera sig mot ett visst värde (ett jåmviktstillstånd), kommer den att oscillera periodiskt, eller kom den att bete sig på ett oförutsebart, icke-periodiskt sätt? Det senare fallet är ofta associerat med *kaotisk dynamik*: följden $x(t)$ är extremt känslig för små förändringar i startvärdet $x(0)$. Som redan sagts, gör detta att om $x(0)$ är ett värde behäftat med ett aldrig så litet mätfel, så kommer långtids-prognoser av värdet på $x(t)$ att vara omöjliga! (Däremot är ofta det *genomsnittliga* beteendet hos följden $x(t)$ nästan oberoende av startvärdet $x(0)$.

Ofta låter man systemet innehålla en kontrollparameter a, t.ex.

$$x(t+1) = f_a\,[x(t)] = 1 - a\,[x(t)]^2 .$$

Vid modellering av verkliga fenomen ger detta en möjlighet att finstämma modellen.

Detta forskningsprojekt behandlar bl.a. följande frågeställningar:

— Hur beror det typiska långtidsbeteendet på systemets kontrollparameter? I vissa fall, nära kaotiska system, vet vi att systemet kan ändras drastiskt vid små störningar i parametern.

— Är det vanligt med kaotiska system? Ja, i den meningen att om man väljer kontroll-parametern slumpmässigt, är det inte osannolikt att hamna på ett kaotiskt system. Detta har visats för ”typiska” en-parameter system av bl.a. de svenska matematikerna Michael Benedicks och Lennart Carleson. Som en generalisrering av deras arbete har jag visat detta i ett specialfall, nämligen för vissa en-dimensionella system som har s.k. flat kritisk punkt. Dessa system vill jag fortsätta att studera, bl.a. med avseende på deras *korrelationsavtagande*, ett slags mått på *hur* kaotiskt systemet är.

— I populations-ekologi använder man ibland denna typ av modeller. Ett syfte med detta projekt är att undersöka sådana populationsmodeller med hjälp av modern matematisk teori, för att kunna dra slutsatser om dessa populationsmodellers egenskaper. Hur ser populationsutveckling ut på lång sikt? Kan det förekomma kaotiskt oscillerande förlopp? Kan vi relatera denna deterministiska modell till de stokastiska (sannolikhets-) modeller som också används?

IMa, Mälardalens Högskola, Box 325, 631 05 ESKILSTUNA
E-mail address: hans.thunberg@mdh.se