Lösningsförslag till tentamen 18 dec 2003
Diff.-Int för D1

1. Funktionen ges av formel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ om } x \in (-\infty, -1] \text{ eller } x \in [1, +\infty) \\ 1 - x^2, \text{ om } x \in (-1, 1)\ . \end{cases}$$

Då derivatan blir $2x$ på intervaler $(-\infty, -1)$ och $(1, +\infty)$ och $-2x$ på intervall $(-1, 1)$. Derivatan existerar inte i punkter -1 och 1. Vänsterderivatan i punkt -1 är

$$\lim_{h \to 0-0} \frac{\big((-1+h)^2 - 1\big) - \big((-1)^2 - 1\big)}{h} = \lim_{h \to 0-0} \frac{-2h + h^2}{h} = -2$$

och högerderivatan är

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{\big(1 - (-1+h)^2\big) - \big(1 - (-1)^2\big)}{h} = \lim_{h \to -1+0} \frac{2h - h^2}{h} = 2.$$

Analogt vänsterderivatan i 1 blir -2 och högerderivatan i 1 blir 2.

2. Ekvationen har form

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

där $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ enligt uppgiften och $y'(x_0)$ är derivatan av funktionen $y(x)$ i punkt $x_0 = 0$. För att hitta $y'(0)$, tillämpar vi implicit derivering. Derivering av ekvationen för $y(x)$ ger

$$2y' = e^y + xy'e^y + y'e^x + ye^x$$

vilket ger oss

$$y' = \frac{e^y + ye^x}{2 - xe^y - e^x}.$$

Insättning av värden $x_0 = 0$ och $y_0 = 1$ ger oss $y'(0) = e + 1$. Alltså tangent linje har ekvationen

$$y = 1 + (e + 1)x.$$

3. Vi undersöker funktionen med hjälp av derivatan. Derivering ger

$$f'(x) = -x^{-4/3} + x^{-2} = x^{-2}\left(1 - x^{2/3}\right)$$

som är uppenbart positiv på intervall $x \in (0, 1)$ och negativ på intervall $x \in (1, +\infty)$. Alltså får vi att $x = 1$ är en global maximumpunkt. För att hitta värdesmängden, skall man undersöka funktionens beteende på gränserna av definitionsmängd. Vi har

$$\lim_{x \to 0+0} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0+0} \frac{3x^{2/3} - 1}{x} = -\infty$$

och

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Vi avgör då att värdesmängden är intervall $(-\infty, f(1)]$ som är $(-\infty, 2]$.

4. Vi har enligt allmän formel

$$p_2(x) = f(\pi/2) + f'(\pi/2)(x-\pi/2) + \frac{1}{2}f''(\pi/2)(x-\pi/2)^2.$$

Nu räknar vi första och andra derivator:

$$f'(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

och

$$f''(x) = \frac{3 - 2\sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^3}.$$

Insättningen av $x = \pi/2$ ger

$$f(\pi/2) = 1; \quad f'(\pi/2) = 1 \quad \text{och} \quad f''(\pi/2) = 3.$$

Alltså Taylorpolynomet är

$$p_2(x) = 1 + (x-\pi/2) + \frac{3}{2}(x-\pi/2)^2.$$

Resttermen är t ex $o((x-\pi/2)^2)$.

5. Efter byte av variabel $\sqrt{x+1} = t$ vilket ger $x = t^2 - 1$ och $dx = 2tdt$ får vi integralen

$$\int_1^{\sqrt{3}} 2t \arctan t \, dt = \int_1^{\sqrt{3}} \arctan t \, d(t^2) = t^2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+1} dt =$$

$$= 3\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = \frac{3\pi}{4} - (t - \arctan t)\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{3\pi}{4} - \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{6} + 1 - \sqrt{3}.$$

6. Vi börjar med att hitta partielbråkuppdelningen av funktionen:

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-1/5}{x+2} + \frac{1/5x + 3/5}{x^2+1}.$$

Då den allmänna primitiva functionen är

$$F(x) = \int \left(\frac{-1/5}{x+2} + \frac{1/5x+3/5}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln(x+2) + \frac{1}{10}\int \frac{dx^2}{x^2+1} + \frac{3}{5}\arctan x = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+2)^2}\right) + \frac{3}{5}\arctan x + C,$$

där C är en godtycklig konstant. För att välja lämpligt värde av C, söker vi gränsvärde av F:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+2)^2}\right)\right) + \frac{3}{5}\cdot\frac{\pi}{2} + C = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)\right) + \frac{3\pi}{10} + C = \frac{3\pi}{10} + C.$$

Det innebär att man skall välja $C = -\dfrac{3\pi}{10}$ och vi får svar

$$F(x) = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^2+1}{(x+2)^2}\right) + \frac{3}{5}\arctan x - \frac{3\pi}{10}.$$

7. Enligt formel för rotationsvolym kring $y-$axeln, blir rotationsvolymen under kurvan $y = \cos x$

$$V_1 = 2\pi \int_0^{\pi/4} x \cos x \, dx$$

och rotationsvolymen under kurvan $y = \sin x$

$$V_2 = 2\pi \int_0^{\pi/4} x \sin x \, dx.$$

Den volymen som vi söker är alltså

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi \int_0^{\pi/4} x(\cos x - \sin x) \, dx = 2\pi \int_0^{\pi/4} x \, d(\sin x + \cos x) =$$

$$= 2\pi x(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} - 2\pi \int_0^{\pi/4} (\sin x + \cos x) \, dx = \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\pi.$$

8. Vi tillämpar kvotkriterium och vi får

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+2}}{2^{n+1} + (n+1)^2} \cdot \frac{2^n + n^2}{|x|^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{2 + \frac{(n+1)^2}{2^n}} = \frac{|x|}{2}.$$

Enligt kvotkriterium konvergerar serien för $|x| < 2$ och divergerar för $|x| > 2$. Konvergensradie är 2.

9. Det är en homogen ekvation med konstanta koefficienter. Den karakteristiska ekvationen är

$$\lambda^2 + 4\lambda + a = 0.$$

Den har rötter

$$\lambda_1 = -2 - \sqrt{4-a} \quad \text{och} \quad \lambda_2 = -2 + \sqrt{4-a}.$$

Nu kan man betrakta olika fall för a.

1. Om $a > 4$, får vi komplexa rötter. Då den allmänna lösningen till differentialekvationen är

$$y(x) = e^{-2x} \left(C_1 \cos(\sqrt{a-4}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{a-4}\, x) \right).$$

Denna funktion är begränsade på $x \in [0, +\infty)$ eftersom $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

2. Om $a = 4$, har vi en dubbelrot $\lambda = -2$. Motsvarande allmänna lösningen är

$$y(x) = e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x \right).$$

Den är begränsad på $[0, +\infty)$ precis som tidigare.

3. Om $a < 4$ då både λ_1 och λ_2 är reella och den allmänna lösningen är

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Om både λ_1 och λ_2 är negativa eller en är negativ och andra är 0, då igen alla lösningar $y(x)$ är begränsade. Men om λ_2 är positiv, då får vi $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ om $C_2 \neq 0$. Alltså villkor för att alla lösningar vara begränsade är $\lambda_2 \leq 0$ vilket ger $a \geq 0$.

Sammanlagt, svar blir $a \geq 0$.

10. Vi skall undersöka funktionen

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{(x-1)^4}$$

på hela reela axeln. Funktionen har först följande egenskaper:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1; \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = +\infty.$$

Derivatan till $f(x)$ är

$$f'(x) = -4\frac{x^3+1}{(x-1)^5}.$$

Den är negativ på intervaller $(-\infty,-1)$ och $(1,+\infty)$ och den är positiv på intervall $(-1,1)$. Tillsammans med information om beteende av funktionen på gränser, kan vi avgöra att

(1)$f(x)$ antar alla värden mellan $f(-1)$ (inklusiv) och 1 (exklusiv) på intervall $(-\infty,-1]$ och är strängt avtagande där;

(2) $f(x)$ antar alla värden mellan $f(-1)$ (inklusiv) och $+\infty$ på intervall $[-1,1)$ och är strängt växande där;

(3) $f(x)$ antar alla värden mellan 1 (exklusiv) och $+\infty$ på intervall $(1,+\infty)$ och är strängt avtagande där.

Om vi tar alla denna information sammalagt, avgör vi att det enda möjligheter att funktionen antar något värde b bara en gång är att $b = f(-1)$ som antas bara i punkt $x = -1$ eller $b = 1$ som antas i någon punkt mellan -1 och 1.

Alltså svar är $b = f(-1) = 1/8$ eller $b = 1$.

11. Enligt formel för rotationsytan, arean blir

$$A = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+\frac{c^2}{x^{2c+2}}}\,dx.$$

Eftersom $c > 0$, kan vi tillämpa den följande "lösa" motiveringen: nära $x = 0$ termen $\dfrac{c^2}{x^{2c+2}}$ är avgörande i jämförelse med 1, då funktionen kan ersjättas med

$$2\pi x\sqrt{\frac{c^2}{x^{2c+2}}} = \frac{2\pi c}{x^c}$$

som har konvergent integral om och endast om $c < 1$.

Den noggranna motiveringen måste innehålla olkheter och jämförelseprincipeln. I fall $c < 1$ kan man tillämpa jämfrelse

$$1 \le \frac{1}{x^{2c+2}} \quad \text{(som g+"aller för } 0 < x < 1)$$

och då integralen är mindre än

$$2\pi\int_0^1 x\sqrt{\frac{1+c^2}{x^{2c+2}}}\,dx = 2\pi\sqrt{1+c^2}\int_0^1 \frac{dx}{x^c}$$

som är ändlig för $c < 1$.

I fall $c \ge 1$ integralen är större än

$$2\pi\int_0^1 x\sqrt{\frac{c^2}{x^{2c+2}}}\,dx = 2\pi c\int_0^1 \frac{dx}{x^c}$$

som är divergent.

12. Vi har

$$\frac{1}{x^2} - \cot^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 - \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2} =$$

$$= \text{(conjugatregeln)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\left(\frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(2 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right)}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)\left(2 + o(1)\right)}{\left(1 + o(1)\right)}.$$

Det sista uttrycket klart har gränsvärdet 2/3 som är svar.