

5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, torsdagen den 18 dec 2003 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För elever med utländsk bakgrund svensk-utländska ordböcker är tillåtna.

För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	HS1	KS1	HS2	KS2	KS3	HS3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	6	7	8

DEL A

- (3p) 1. Bestäm x -värden där funktionen

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

är icke-deriverbar. För dessa x -värden bestäm funktionens vänster- och högerderivator. (Motivering krävs).

- (3p) 2. Bestäm ekvationen för den linje som är tangent till kurvan

$$2y = 1 + xe^y + ye^x$$

i punkten $(0, 1)$.

- (3p) 3. Bestäm värdemängden (range) till funktionen

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x}$$

definierad för $x > 0$.

- (3p) 4. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 nära $x = \frac{\pi}{2}$ till funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

Resttermen kan anges på valfri form.

- (3p) 5. Beräkna integralen

$$\int_0^2 \arctan(\sqrt{x+1}) dx.$$

- (3p) 6. Bestäm den antiderivata (den primitiva funktionen) $F(x)$ till funktionen

$$f(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)}$$

som uppfyller

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

7. Området mellan kurvor $y = \sin x$ och $y = \cos x$ definierade på intervall $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ roterar kring y -axeln. Bestäm rotationsvolymen.
- (3p) 8. Bestäm konvergensradie till potensserien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n + n^2} .$$

DEL B

- (5p) 9. För vilka värden på parameter a är alla lösningar till differentialekvationen

$$y'' + 4y' + ay = 0$$

begränsade på hela positiva halv-axeln $x \in [0, +\infty)$?

- (5p) 10. För vilka värden på parameter b har ekvationen

$$\frac{x^4 + 1}{(x - 1)^4} = b$$

precis en reell lösning?

- (5p) 11. Den obegränsade kurvan

$$y = \frac{1}{x^c}, \quad 0 < x \leq 1,$$

där $c > 0$ roterar kring y -axeln. Bestäm för vilka värden på parameter c den erhållna rotationsytan är ändlig. Motivering krävs!

- (5p) 12. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \cot^2 x \right).$$