Lösningsförslag till tentamen 16 apr 2004
Diff.-Int för D1

1(a). Funktionen $\arctan(1/x)$ är begränsad, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, vilket medföljer att

$$\lim_{x\to 0}\big(x^2 \arctan(1/x)\big) = 0.$$

Man skall välja $f(0) = 0$.

1(b).

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(x\arctan(1/x)) = 0.$$

2. Normal linje har ekvationen

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

där $k = -1/y'(x_0)$. I vårt fall $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Implicit derivering ger

$$y'(x) = (\ln(x + y(x)) - \ln(x - y(x)))'_x = \frac{1 + y'(x)}{x + y(x)} - \frac{1 - y'(x)}{x - y(x)}.$$

Insättning av $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ ger

$$y'(1) = 2y'(1),$$

vilket ger $y'(1) = 0$. Vi får alltså $k = \infty$. Men geometriskt $y'(1) = 0$ innebär att den tangenta linjen till kurvan är vågrät och den normala linjen då blir lodrät ($k = \infty$ är lutningen av lodräta linjer). Normal linje har ekvationen $x = x_0$ d v s

$$x = 1.$$

3. Vi deriverar först funktionen:

$$f'(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + (x+1)\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \left(x - 1 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right)(x-1)^{-1/3} = \frac{5x/3 - 1/3}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Vi observerar att $f'(x) = 0$ för $x = 1/5$ och $f'(x)$ existerar inte för $x = 1$ (d v s $x = 1$ är en singulär punkt för funktionen $y = f(x)$). Alltså får vi fyra misstänkta punkter där f kan anta min eller max: $x = 0$, $x = 1/5$, $x = 1$ och $x = 2$. Vi har $f(0) = 1$; $f(1/5) = \frac{6}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{25}}$; $f(1) = 0$ och $f(2) = 3$. Uppenbart

$$\min f = f(1) = 0 \quad \text{och} \quad \max f = f(2) = 3.$$

4. Vi har

$$y(1/2) = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6};$$

$$y'(1/2) = \left.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|_{x=1/2} = \frac{1}{\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$y''(1/2) = \left.-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)\right|_{x=1/2} = \left.\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\right|_{x=1/2} = \frac{1/2}{(3/4)^{3/2}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Taylorpolynomet blir då

$$p(x) = y(1/2) + y'(1/2)(x - \frac{1}{2}) + y''(1/2)\frac{(x-1/2)^2}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1/2) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})^2.$$

5.

$$\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}\,dx = \left|\begin{array}{c} x = t^2 \\ \sqrt{x} = t \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right| = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^3}\,2t\,dt = 2\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt =$$

$$= -2\int_1^2 \ln(1+t)\,d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{2}{t}\ln(1+t)\Big|_1^2 + 2\int_1^2 \frac{1}{t}\,d\ln(1+t) = -\ln 3 + 2\ln 2 + 2\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)} =$$

$$= \ln\frac{4}{3} + 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \ln\frac{4}{3} + \left(2\ln t - 2\ln(t+1)\right)\big|_1^2 = \ln\frac{4}{3} + 2\ln 2 - 2\ln 3 - 0 + 2\ln 2 = \ln\frac{64}{27}.$$

6. Partiellbråkuppdelningen ger

$$\frac{6x-16}{x^3+16x} = \frac{6x-16}{x(x^2+16)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+16},$$

och $A = -1$, $B = 1$, $C = 6$. Alltså

$$\int \frac{6x-16}{x^3+16x}\,dx = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+16} + \frac{6}{x^2+16}\right)dx =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+16)}{x^2+16} + \int \frac{6/16}{\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 1}\,dx = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+16) + \frac{6}{4}\arctan\frac{x}{4} + C.$$

7. Vi inför ny koordinat $z = y - 1$ så att kurvorna blir $z = 1 - x^2$ och $z = x^2 - 1$ och gammal linje $y = 1$ blir den linje $z = 0$ d v s x-axel i det nya (x, z)-koordinatsystemet. Vi observerar att de kurvorna är symmetriska med avseende på ny x-axel och att de skär varandra i punkter $x = \pm 1$, $z = 0$.

Rotationsvolymen blir då

$$V = \int_{-1}^1 \pi(1-x^2)^2\,dx = \pi\int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,dx =$$

$$= \pi(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5)\Big|_{-1}^1 = 2\pi(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = 2\pi\frac{8}{15} = \frac{16\pi}{15}.$$

8. Den karakteristiska ekvationen till den homogena ekvationen är

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

med rötter $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Alltså den allmänna homogena lösningen är

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

Partikulär inhomogen lösningen söks i form

$$y_p(t) = at + b$$

och insättningen till ekvationen ger $a = -1/2$, $b = -1/4$. Alltså den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

Begynnelsevillkor ger $C_1 = 1/3$ och $C_2 = -1/12$.

Svar:

$$y(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^t t - \frac{1}{12}e^{-2t}.$$

9. Funktionen är definierad för $x > 0$, $x \neq 1$. Vi får $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ och $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = -\infty$ vilket ger lodräta asymptoter $x = 0$ och $x = 1$. Finns det sneda symptoter? Vi har

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{x^2+1}{x^2-x} \right) = 1,$$

men

$$l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(2\ln x + \frac{1+x}{x-1} \right) = +\infty,$$

vilket ger inga sneda asymptoter.

Derivata:

$$f'(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x(x-1)^2} = \frac{(x-2)(x-(-1-\sqrt{2}))(x-(-1+\sqrt{2}))}{x(x-1)^2}$$

och $f'(x) > 0$ för $x \in (0, \sqrt{2}-1)$ och $x \in (2, +\infty)$ där funktionen är växande och $f'(x) < 0$ för $x \in (\sqrt{2}-1, 1)$ och $x \in (1, 2)$ där funktionen är avtagande. Detta ger en lokal minimumpunkt $x = 2$ och en lokal maximumpunkt $x = \sqrt{2} - 1$.

10. Vi har för $x \to 0$

$$\sqrt[3]{\sin x^3} = \left(x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9) \right)^{1/3} = x\left(1 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \right)^{1/3} =$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{6} + o(x^6) \right) + o(x^6) \right) = x\left(1 - \frac{1}{18}x^6 + o(x^6) \right) = x - \frac{1}{18}x^7 + o(x^7).$$

Då

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x - \sqrt[3]{\sin x^3}}{x^a} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{18}x^7 + o(x^7)}{x^a} = \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{18}x^{7-a}(1 + o(1)).$$

Om $a > 7$, vi får ∞. Om $a = 7$, $\lim = \dfrac{1}{18}$. Om $a < 7$, $\lim = 0$.

11. Funktionen har singularitet i $x = 0$. Enligt definition, integralen är

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{\cos(\ln x)}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \frac{\cos(2\ln t)}{t} 2t\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = e^{-z} \\ dt = -e^{-z}\,dz \\ z = -\ln t \end{array} \right| = -2 \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon}}^0 \cos(2z)e^{-z}\,dz = \left| \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon} = M \right| =$$

$$= 2\lim_{M\to\infty} \int_0^M \cos(2z)e^{-z}\,dz = \left| \,\text{BETA}\, \right| = \lim_{M\to\infty} \frac{2}{5}e^{-z}(-\cos 2z + 2\sin 2z)\Big|_0^M =$$

$$= \frac{2}{5}\lim_{M\to\infty} \left(e^{-M}(\cos 2M + 2\sin 2M) + 1 \right) = \frac{2}{5}.$$

12. Vi har

$$\frac{3n}{n+1} - 3 + \frac{a}{n} = \frac{3n^2 - 3n^2 - 3n + an + a}{n^2+n} = \frac{(a-3)n + a}{n^2+n}.$$

Om $a \neq 3$, då för stora n vi har $(a-3)n + a \approx (a-3)n$ och $n^2 + n \approx n^2$ och vi får serie

$$\sum_n \frac{a-3}{n}$$

som divergerar. Noggrant det kan bevisas på följande sätt för $a > 3$:

$$\frac{(a-3)n+a}{n^2+n} > \frac{(a-3)n}{2n^2} = \frac{a-3}{2n}$$

och

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-3)n+a}{n^2+n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a-3}{2} \cdot \frac{1}{n} = +\infty.$$

För $a < 3$ allt är analogt.

Om $a = 3$, då får vi serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} - \frac{3}{n+1}\right) = \left(3 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{4}\right) + \cdots = 3$$

(teleskoperande serie).