

5B1104, Differential- och integralkalkyl I, del 1.
Tentamen, fredagen den 16 apr 2004 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För elever med utländsk bakgrund svensk-utländska ordböcker är tillåtna.

För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under kursen har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Följande tabell gäller:

Skrivning	HS1	KS1	HS2	KS2	KS3	HS3	KS4
Uppgift	1	2	3	4	6	7	8

DEL A

1. Funktionen $f(x)$ definieras för $x \neq 0$ som

$$f(x) = x^2 \arctan \frac{1}{x}.$$

- (1p) (a) Definiera $f(0)$ så att f blir kontinuerlig i $x = 0$.
(2p) (b) Räkna ut $f'(0)$ för den erhållna kontinuerliga funktionen.

- (3p) 2. Ekvationen

$$y = \ln \left(\frac{x+y}{x-y} \right)$$

definierar en funktion $y = y(x)$ sådan att $y(1) = 0$. Bestäm ekvationen för den linje som är normal till kurvan $y = y(x)$ i punkt $(1, 0)$.

- (3p) 3. Bestäm de största och minsta värden som antas av funktionen

$$f(x) = (x+1)\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

på intervallet $x \in [0, 2]$.

- (3p) 4. Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 nära $x = 1/2$ till funktionen

$$y = \arcsin x.$$

- (3p) 5. Beräkna integralen

$$\int_1^4 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} dx.$$

- (3p) 6. Bestäm samtliga antiderivator (de primitiva funktioner) till funktionen

$$f(x) = \frac{6x-16}{x^3+16x}.$$

(3p) 7. Området mellan kurvor $y = x^2$ och $y = 2 - x^2$ roterar ett varv kring linjen $y = 1$. Bestäm rotationsvolymen.

(3p) 8. Bestäm den lösningen till differentialekvationen

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t$$

som uppfyller begynnelsevillkor $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

DEL B

(5p) 9. Undersök funktionen och rita kurvan

$$y = 2 \ln x + \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad x > 0.$$

Du skall ange eventuella asymptoter och lokala maximum- och minimumpunkter.

(5p) 10. För vilka reela a gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x - \sqrt[3]{\sin(x^3)}}{x^a}$$

är ändligt? Bestäm gränsvärdet för sådana a .

(5p) 11. Visa att generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos(\ln x)}{\sqrt{x}} dx$$

konvergerar och bestäm dess värde.

(5p) 12. Bestäm den reela konstanten a så att serien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n}{n+1} - 3 + \frac{a}{n} \right)$$

konvergerar. Beräkna sedan seriens summa för detta värde på a .