Lösningar till tentamen i kurs 5B1125 Diff&Int I, del 2, LV för L och V 030306

Del A

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x} e^x (\cos xy) x = e^x \cos xy \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^x \cos xy - e^x (\sin xy) y$

   I punkten $(1, \frac{\pi}{2})$ fås värdet $-e\frac{\pi}{2}$.

2. Vi utnyttjar cos-funktionens Maclaurinutveckling och får

   $f(x,y) = 2x + y + 2\left[1 - \frac{1}{2!}(x+2y)^2 + \ldots\right] = 2x + y + 2 - x^2 - 4xy - 4y^2 + \ldots \Rightarrow$

   $p_2(x,y) = 2 + 2x + y - x^2 - 4xy - 4y^2 \Rightarrow f(0.1, 0.2) \approx p_2(0.1, 0.2) = 2.15.$

3. Vi undersöker först det inre av området: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

   Denna punkt ligger ej i det inre av området. Vi undersöker nu randen :

   På halvcirkelbågen ges f av $g(x) = f(x, \pm\sqrt{1-x^2}) = x(1-x^2) - x^2 = x - x^2 - x^3$

   där $0 \le x \le 1$. $g'(x) = 1 - 2x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, -1$ där -1 är utanför intervallet.

   $g(\frac{1}{3}) = \frac{5}{27}$. I intervallets ändpunkter fås värdena $g(0) = 0$ och $g(1) = -1$.

   På den del av randen som utgörs av intervallet $-1 \le y \le 1$ är $f = 0$.

   Slutsats: Största värdet är $\frac{5}{27}$ och det minsta är -1.

4. Den sökta volymen ges av $\iint_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ där D är cirkelringen $a \le \sqrt{x^2+y^2} \le a+17$.

   Polära koordinater ger då $\int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{a+17} \frac{1}{r} r dr = 2\pi \left[r \right]_a^{a+17} = 34\pi$ som ej beror av a.

5. En tangentvektor ges av $(x', y') = (3t^2 - 2, 3t^2 + 1)$. $t = 1$ ger tangentvektorn $(1,4)$. $t = 1$ svarar mot punkten (-1,2) på kurvan. En parametrisering av tangentlinjen är då $(x,y) = (-1,2) + t(1,4)$.

6. Med $F_1 = 2xy$ och $F_2 = x^2 - 3y^2$ fås $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2x - 2x = 0$ dvs vektorfältet är konservativt och vi kan byta väg. Vi väljer att gå längs x–axeln (där $dy = 0$) till origo och sedan därifrån längs y–axeln (där $dx = 0$) till punkten (0,1) och får

   $\int_1^0 0\, dx + \int_0^1 (-3y^2)\, dy = \left[-y^3 \right]_0^1 = -1.$

7. Flödet ges av $\iint_S (y,-x,z)\cdot \hat{N}dS$ där S är den del av paraboloidytan som är ovanför $xy-$planet. $\hat{N}dS = (-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1)dxdy = (2x,2y,1)dxdy$. Detta ger integralen $\iint_D (y,-x,4-x^2-y^2)\cdot(2x,2y,1)dxdy = \iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$ där D är en cirkelskiva i $xy-$planet. Polära koordinater ger $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4-r^2)r\,dr = 2\pi\left[2r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$.

8. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos u\cos v+\frac{\partial f}{\partial y}(v+1)$. $(u,v)=(0,0)\Rightarrow(x,y)=(0,0)$ och vi får $\frac{\partial z}{\partial u} = 1+2=3$.

Del B

9. Eftersom integranden saknar elementär antiderivata måste vi börja med $y-$integrationen. Vi ser att integrationsområdet är en rätvinklig triangel med basen längs $x-$axeln mellan 0 och 1. Den andra kateten är den del av linjen $x=1$ för vilken $0\le y\le 2$. Hypotenusan utgörs av linjestycket $y=2x$, $0\le x\le 1$. Då kan integralen beräknas som $\int_0^1 \sin(\pi x^2)dx\int_0^{2x} dy = \int_0^1 2x\sin(\pi x^2)dx = \left[-\frac{\cos(\pi x^2)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.

10. Låt $z=f(x,y)$. $x=y=1\Rightarrow z+e^z=1\Rightarrow z=0$. Det ger att $f(1,1)=0$. Vi deriverar implicit map x resp y : $2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}+e^z\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $x^2\frac{\partial z}{\partial y}+e^z\frac{\partial z}{\partial y}=2y$. I punkten $(1,1)$ fås ur detta : $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=1\Rightarrow \nabla f(1,1)=(0,1)$. Låt $\bar{u}=\frac{1}{\sqrt{25}}(3,4)$. Då är $\|\bar{u}\|=1$ och riktningsderivatan ges av $D_{\bar{u}}f=\nabla f\cdot\bar{u}$ vilket i punkten $(1,1)$ blir $(0,1)\cdot\frac{1}{5}(3,4)=\frac{4}{5}$.

11. Avståndet till origo ges av $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Bivillkoret är den givna ekvationen. Vi använder Lagranges multiplikatormetod och bildar Lagrangefunktionen $L=x^2+y^2+z^2+\lambda\,(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{y^2}+\frac{16}{z^2}-1)$. Vi får systemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\dfrac{\lambda}{x^3} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 8\dfrac{\lambda}{y^3} = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - 32\dfrac{\lambda}{z^3} = 0 & (3) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{y^2} + \dfrac{16}{z^2} - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

(1), (2) och (3) ger $\lambda = x^4 = \dfrac{y^4}{4} = \dfrac{z^4}{16}$ dvs

$x^2 = \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{z^2}{4}$ som i (4) ger $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow y^2 = 14$, $z^2 = 28$ och det minsta avståndet till origo blir $\sqrt{7+14+28}$ =7 l.e

12. Vi sluter ytan genom att lägga till en ”bottenplatta” i form av enhetscirkelskivan S_1 .
Låt S_2 vara övre halvan av enhetssfären. Divergenssatsen ger då:
$\oiint_{S_1+S_2} \overline{F} \cdot \hat{N} dS = \iiint_V div\overline{F} dzdydz$ där V är det inneslutna området och $\hat{N}$ är det utåtriktade normalvektorfältet till den slutna ytan. $div\overline{F} = 2z$ ger trippelintegralen

$$\iint_{S_1} dxdy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2zdz = \iint_{S_1} (1-(x^2+y^2))dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} .$$

För att få det sökta flödet måste vi från detta dra bort flödet genom den tillagda ytan S_1.
På denna är $\overline{F} = (y, 0, y^2)$ och $\hat{N} = (0,0,-1)$. Detta ger

$$\iint_{S_1} (ye, 0, y^2) \cdot (0,0,-1) dS = -\iint_{S_1} y^2 dS = -\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^1 r^2 r dr = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{4} .$$

Det sökta flödet blir alltså $\dfrac{\pi}{2} - (-\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{3\pi}{4}$.