Lösningar till tentamen i kurs 5B1125 Diff&Int I, del 2, LV för L och V 030422

Del A

1. Går vi in mot origo längs y- axeln fås $\lim_{y\to 0} y = 0$. Går vi in mot origo längs parabeln $y = x^2$ fås $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1+x^2) = 1 \neq 0$ dvs gränsvärdet existerar ej.

2. Derivatan av f i enhetsriktningen $\bar{u}$: $D_{\bar{u}}f = \nabla f \cdot \bar{u}$. Normering ger $\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ $\nabla f = (2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y})$. I punkten (-1,1) ger det gradientvektorn $(-2e, e)$. Den sökta derivatan blir då $(-2e,e)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = -\frac{e}{\sqrt{2}}$. Riktningsderivatan uppfyller att $-\|\nabla f\| \le D_{\bar{u}}f \le \|\nabla f\| \Rightarrow -\sqrt{5}e \le D_{\bar{u}}f \le \sqrt{5}e$ i punkten.

3.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3 - 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,-1),\ (0,1),\ (-1,0),\ (1,0).$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x\ ,\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6y\ ,\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x \Rightarrow D = AC - B^2 = 36(x^2 - y^2).$$

För (0,-1) och (0,1) fås: D = -36 dvs sadelpunkter.
För (-1,0) fås : $D = 36$ och A =1 dvs minimum.
För (1,0) fås: $D = 36$ och A =-1 dvs maximum.

4. Den sökta volymen ges av $I = \iint_D (\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2))\,dxdy$. Vi får $\sqrt{x^2+y^2} = x^2+y^2$ vilket i polära koordinater svarar mot $r = r^2$ dvs r =1.
Det betyder att D ges av $x^2+y^2 \le 1$ och vi får

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^2) r dr = 2\pi\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

5. $dS = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2 + 1}\,dxdy$ och $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ger arean

$$\int_0^1 \sqrt{2+\frac{1}{x}}dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy = 2\int_0^1 \sqrt{2+\frac{1}{x}}\sqrt{x}dx = 2\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(2x+1)^{3/2}\right]_0^1 = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3}).$$

6. Vi använder Greens formel. $\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial(x-y^2)}{\partial y} = -2y$ ger då att linje-integralen är ekvivalent med $2\iint_D (x+y)dxdy$ där D ges av $-1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1$.

Vi får alltså $2\iint_D y\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} 2y\,dy = \int_{-1}^{1}(1-x^4)dx = \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = 2(1-\frac{1}{5}) = \frac{8}{5}.$

Här utnyttjades att $\iint_D x\,dxdy = 0$ pga symmetri.

7. Flödet ges av $\iint_S (z, y, \frac{1}{x^2+1}) \cdot \hat{N}dS$ där $\hat{N}dS = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)dxdy = (-1,0,1)dxdy$.

Detta ger integralen

$\iint_D (x+1, y, \frac{1}{x^2+1}) \cdot (-1,0,1)dxdy$ där D ges av $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le 1$. Då fås

$$\int_0^{\pi/4} (\frac{1}{1+x^2} - x - 1)dx \int_0^1 dy = \left[\arctan x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4}.$$

8.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u}{2}\frac{\partial z}{\partial v}. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(y\frac{\partial z}{\partial v}) = \frac{\partial z}{\partial v} + y\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial v}) =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial v} + y\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{\partial z}{\partial v} + y\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\cdot 2 + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot x\right] = \frac{\partial z}{\partial v} + u\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Del B

9. Se sid 860-861 i Adams för härledning av $dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$. I rymdpolära koordinater fås $x^2 + y^2 = (\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 = \rho^2\sin^2\varphi$ .Integralen:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^a \rho^4 d\rho = 2\pi\frac{a^5}{5}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi =$$

$$= 2\pi\frac{a^5}{5}\left[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\, a^5}{15}.$$

10.a)

$$\overline{F} = (F_1, F_2, F_3) \Rightarrow rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow divrot\overline{F} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} = 0$$

b) Antag att f är en sådan funktion och låt $\overline{F} = grad\, f$. Då gäller att $divrot\overline{F} = div(x, y, 1) = 2 \neq 0$ vilket strider mot a) dvs det är ej möjligt.

11. Implicit derivering ger $3x^2 - 3 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $2y + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Ur detta fås

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3 - 3x^2}{1 + 3z^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{1 + 3z^2}$. I kritiska punkter är dessa derivator 0 dvs vi får punkterna (1,0) och (-1,0). Taylorpolynomet av grad 2 kring t ex punkten (1,0) ges av $p_2(x, y) = f(1,0) + \frac{1}{2!}(f''_{xx}(1,0)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,0)(x-1)y + f''_{yy}(1,0)y^2)$. Ytterligare implicit derivering ger andraderivatorna:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-6x(1+3z^2) - 6z\frac{\partial z}{\partial x}(3-3x^2)}{(1+3z^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y\frac{6z}{(1+3z^2)^2}\frac{\partial z}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2(1+3z^2) + 12yz\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+3z^2)^2}$$

Vi ser att z =1 då x =1 och y =0 dvs f (1,0)=1. I punkten (1,0) fås då andraderivatorna $f''_{xx}(1,0) = -\frac{3}{2}$, $f''_{xy}(1,0) = 0$, $f''_{yy}(1,0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow p_2(x, y) = 1 - \frac{1}{4}(3(x-1)^2 + y^2)$.

12. Låt containerns sidor ha längderna x , y och z . Dess volym är då xyz och dess diagonal har längden $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vi söker maximum av xyz då $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ och använder Lagranges metod: $L(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$ ger systemet

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2y\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2z\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

De tre första ekvationerna ger $\lambda = -\frac{yz}{2x} = -\frac{xz}{2y} = -\frac{xy}{2z} \Rightarrow x = y = z \ \ (x > 0,\ y > 0, z > 0)$

Insättning i bivillkoret ger $3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$. Maximum hos volymen är då $3\sqrt{3}$ <6 vilket innebär containern är felmärkt.