Institutionen för matematik, KTH
Göran Hulth, Henrik Eriksson

5B1125, Differential- och integralkalkyl I, del 2, LV.
5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
Tentamen, tisdag 22 april 2003 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under aktuell kursomgång har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7.

DEL A

(3p) **1.** Avgör om gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{y}$ existerar eller inte.

(3p) **2.** Beräkna derivatan till $f(x,y) = e^{x^2 y}$ i punkten $(-1,1)$ i riktningen $\mathbf{n} = (1,1)$. Vilka värden kan riktningsderivatan i denna punkt anta för olika riktningar $\mathbf{n}$?

(3p) **3.** Bestäm alla kritiska (stationära) punkter till funktionen $f(x,y) = 3x - x^3 - 3xy^2$ och avgör deras karaktär.

(3p) **4.** Beräkna volymen av den ändliga kroppen mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(3p) **5.** Beräkna arean av den del av ytan $z = 2\sqrt{x} + y$ som ges av $0 \le x \le 1,\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}$.

(3p) **6.** Beräkna kurvintegralen $\oint_C (x - y^2)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$

där C är en sluten kurva sammansatt av parabelbågen $y = x^2$ från $(-1,1)$ till $(1,1)$ och den räta linjen $y = 1$ från $(1,1)$ till $(-1,1)$.

(3p) **7.** Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (z,\ y,\ \dfrac{1}{x^2+1})$

uppåt genom den del av planet $z = x + 1$ som ges av $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ och $0 \le y \le 1$.

(3p) **8.** Låt $z = f(x,y)$. Man byter till de nya oberoende variablerna $u = 2y$ och $v = xy$.

Visa att $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{u}{2}\dfrac{\partial z}{\partial v}$ och uttryck $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ i de nya variablerna u och v.

Vänd!

DEL B

(5p) **9.** Härled utgående från formeln för variabelsubstitution uttrycket för dV i sfäriska koordinater och använd detta för att beräkna

$$\iiint_K (x^2 + y^2)\, dV$$

där K är klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

(5p) **10.** Antag att fälten $\mathbf{F}$ och f har kontinuerliga partiella derivator.

a) Visa att $\mathbf{div}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = 0$

b) Är det möjligt att $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, f = (x, y, 1)$?

(5p) **11.** Funktionen $z = f(x, y)$ är definierad i hela planet, har kontinuerliga partiella derivator av alla ordningar och uppfyller ekvationen

$$x^3 - 3x + y^2 + z^3 + z = 0\ .$$

Bestäm alla kritiska (stationära) punkter för f och ange taylorpolynomet av grad 2 kring en sådan punkt.

(5p) **12.** En rätvinklig lådformad container är märkt $\mathbf{6\,m^3}$. Kan detta stämma om avståndet mellan de avlägsnaste hörnen är $3\,\mathrm{m}$?