Institutionen för matematik, KTH
Göran Hulth, Henrik Eriksson

5B1125, Differential- och integralkalkyl I, del 2, LV.
5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
LÖSNING TILL TENTAMEN, ONSDAG 27 AUGUSTI 2003

DEL A

1. Nej, på linjen $y = -x$ är den ju noll.

2. I punkten är $\partial f/\partial x = e$, $\partial f/\partial y = -2e$, $\partial f/\partial z = e$. Riktningsderivatan i riktningen $(2/3, 1/3, 2/3)$ blir då $\nabla f \cdot (2/3, 1/3, 2/3) = 2e/3$.

3. Partiella derivatorna är lika med noll i punkterna $(0,0)$ och $(1,1)$. I den inre punkten $(1,1)$ är $f = -1$ och för att vara säkra på att det är ett minimum måste vi studera kvadratens rand.

$f(x,0) = x^3$ som växer från 0 till 64 när x växer från 0 till 4. $f(4,y) = 64-12y+y^3$ som har minimum $f(4,1) = 48$ och största värde $f(4,4) = 80$.

Minsta värdet är $f(1,1) = -1$ och största $f(4,4) = 80$.

4. Skärningen är cirkeln $x^2 + y^2 = 2$, $z = \sqrt{2}$ och volymen blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-r^2} - r)\, r\, dr\, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \left[-(4-r^2)^{3/2} - r^3\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(8 - 4\sqrt{2})$$

5. Eftersom $\partial z/\partial x = e^x$, $\partial z/\partial y = 1$, blir arean

$$\int\int \sqrt{1 + e^{2x} + 1}\, dx\, dy = \int_0^1 e^{2x}\sqrt{2 + e^{2x}}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} 2 + e^{2x} = t^2 \\ 2\, e^{2x} = 2t\, dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2+e^2}} t^2\, dt = \frac{(2+e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}}{3}$$

6. Greens formel ger $\int\int (2x - 2y)\, dx\, dy$ över enhetscirkeln och den dubbelintegralen blir noll på grund av symmetrin.

7. Eftersom $\mathbf{div} F = 2y$ så ger Gauss sats att flödet är

$$\int\int\int 2y\, dx\, dy\, dz = \int\int 2y(4-x-2y)\, dx\, dy = \int_0^2 y \left[-(4-x-2y)^2\right]_{x=0}^{x=4-2y} dy =$$

$$= \left[8y^2 - 16y^3/3 + y^4\right]_0^2 = 16/3$$

8. $\partial z/\partial x = \partial z/\partial u$, Kedjeregeln ger därför

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 2y = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \cdot 2\sqrt{v}$$

DEL B

9. Kasta först om integrationsordningen!

$$\int_0^1 e^{y^2}\, dy \int_{-y}^{y} dx = \int_0^1 2y\, e^{y^2}\, dy = \left[e^{y^2}\right]_0^1 = e - 1$$

Det är volymen av kroppen $0 \le z \le e^{y^2},\ -y \le x \le y,\ 0 \le y \le 1$.

10. Eftersom $\partial z/\partial x = 2x$ och $\partial z/\partial y = 2y$ blir arean $\int\int \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy$, dvs

$$\int\int \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\right]_1^2 = \frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2})$$

11. Rännilen går genom $(1,1)$, så $a = 1$. Kurvans lutning är då $y' = b\, x^{b-1}$ och den ska stämma med gradientvektorn $(\partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$. Derivering visar att gradienten lutar $6y/4x$ och med insatt $y = x^b$ blir det $(3/2)x^{b-1}$. Alltså är $b = 3/2$.

12. Maximera $\pi r^2 h/3$ med bivillkoret $\pi r\sqrt{h^2+r^2}$ =konstant. Lagranges multiplikatormetod ger

$$\frac{2\pi r h}{3} + \pi\lambda\left(\sqrt{h^2+r^2} + \frac{r^2}{\sqrt{h^2+r^2}}\right) = 0$$

$$\frac{\pi r^2}{3} + \pi\lambda \frac{rh}{\sqrt{h^2+r^2}} = 0$$

Elimination av λ ger $h^2 = 2r^2$. Tydligen fås maximal volym då $h = r\sqrt{2}$.