Institutionen för matematik, KTH
Göran Hulth, Henrik Eriksson

5B1125, Differential- och integralkalkyl I, del 2, LV.
5B1105, Differential- och integralkalkyl I, del 2.
Tentamen, onsdag 27 augusti 2003 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Beta. För betyg tre krävs minst 15 poäng på A-delen. För fyra eller femma ska man dessutom ha minst 9 resp minst 15 poäng på B-delen. Under aktuell kursomgång har sju skrivningar getts och godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i A-delen. Här motsvarar skrivning 1–7 uppgift 1–7.

DEL A

(3p) **1.** Avgör om den funktion som definieras nedan är kontinuerlig!

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \text{ utom i origo, där } f(0,0) = 1$$

(3p) **2.** Beräkna riktningsderivatan till $f(x,y,z) = e^{xy^2+z}$ i punkten $(1,-1,0)$ i riktningen $\mathbf{n} = (2,1,2)$.

(3p) **3.** Bestäm största och minsta värdet för funktionen $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ i kvadraten $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

(3p) **4.** Beräkna volymen av den del av sfären $x^2+y^2+z^2 = 4$ so ligger ovanför konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

(3p) **5.** Beräkna arean av den del av ytan $z = e^x + y$ som ges av $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le e^{2x}$.

(3p) **6.** Beräkna kurvintegralen $\oint_C (x^3 - y^2)\,dx + (x^2 + y^4)\,dy$ där C är enhetscirkeln genomlöpt i positiv led.

(3p) **7.** Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y^2 z,\ y^2 - \sin z,\ 4y^2)$ ur den ändliga kropp som begränsas av planet $x+2y+z = 4$ och de tre koordinatplanen.

(3p) **8.** Låt $z = f(x,y)$ vara definierad för $x \ge 0$ och $y \ge 0$. Man byter till de nya oberoende variablerna $u = x+y$ och $v = y^2$.

Uttryck $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ i de nya variablerna u och v.

Vänd!

DEL B

(5p) **9.** Beräkna integralen

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{1} e^{y^2}\, dy$$

Vad betyder resultatet geometriskt?

(5p) **10.** En parabolantenn utgör en del av ytan $z = x^2 + y^2$, nämligen den som ligger innanför $x^2 + y^2 = 4$. I mitten finns ett runt hål motsvarande $x^2 + y^2 = 1$. Beräkna parabolantennens area!

(5p) **11.** Duschrumsgolvet har formen

$$z = -\frac{1}{1 + 2x^2 + 3y^2}$$

med avlopp i punkten $(0, 0, -1)$. En rännil passerar just $x = 1$, $y = 1$. Bestäm ekvationen för rännilens kurva sedd uppifrån, alltså som $y = f(x)$. (Ledning: Den är av typen $y = ax^b$.)

12. En glasstrut med höjden h och mynningsradie r har arean $\pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ och denna area är fastlagd av struttillverkaren. Som glassälskare ska du nu bestämma proportionerna mellan h och r så att strutens volym maximeras. Räkna inte med eventuellt uppsticking glass.

(5p)