Institutionen för matematik, KTH
Lars Svensson

Lösningsförslag till
TENTAMENSSKRIVNING

5B1105 Differential- och integralkalkyl I, del 2
Tisdagen den 13 april 2004, kl 14.00–19.00

DEL A

1. Vi har $f'(x,y,z) = [\sin y, x\cos y, -2ze^{z^2}] \Rightarrow f'(a,b,c) = [\sqrt{3}/2, 1/2, 0]$. Tangentplanets ekvation är då $f'(a,b,c)[x-a, y-b, z-c]^\mathsf{T} = 0$, d v s

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

2. f:s derivata är

$$f'(x,y,z) = \left[\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right] \Rightarrow f'\left(1, \frac{1}{2}, 1\right) = \left[1, -3, \frac{1}{2}\right],$$

och eftersom riktningsvektorn redan är normerad ges riktningsderivatan av

$$f'\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right]^\mathsf{T} = -2.$$

3. Maclaurinutveckling av den rationella termen ger

$$f(x,y) = x^2 - y + \frac{y}{1-(x+y)} = x^2 - y + y(1 + (x+y) + \mathcal{O}(2)) =$$
$$= x^2 + xy + y^2 + \mathcal{O}(3) = [x, y]\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mathcal{O}(3).$$

Det faktum att första ordningens termer försvinner är liktydigt med att $(0,0)$ är en kritisk punkt. Vidare är principalminorerna

$$D_1 = \det[1] = 1 \quad \text{och} \quad D_2 = \det\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = 1 - \frac{1}{4}$$

båda positiva. Det är alltså fråga om en lokal minimipunkt.

4. Låt $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 2^2\}$. På grund av den sfäriska symmetrin är $\iiint_D z^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_B z^2 \mathrm{d}V$ och $\iiint_B x^2 \mathrm{d}V = \iiint_B y^2 \mathrm{d}V = \iiint_B z^2 \mathrm{d}V$. Vi kan därför göra följande förenklande omskrivningar innan vi beräknar integralen:

$$\begin{aligned}
&\iiint_D (x^2+y^2-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\iiint_B (x^2+y^2-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{2}\iiint_B x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{6}\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \{\text{sfäriska koordinater}\} = \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho^4 \mathrm{d}\rho = \frac{2^5\pi}{15}.
\end{aligned}$$

5. Insättning av $\tan x = x + \mathcal{O}(x^3)$ och därefter maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+\tan x} = \frac{1}{1+x+\mathcal{O}(x^3)} = \\
&= 1-(x+\mathcal{O}(x^3)) + (x+\mathcal{O}(x^3))^2 + \mathcal{O}(x^3) = 1 - x + x^2 + \mathcal{O}(x^3).
\end{aligned}$$

6. Om $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ har en potential U, måste $U_x = F_1 = 3x^2y^2 + ye^{\sin x}\cos x$. Integration med avseende på x ger $U(x,y) = x^3y^2 + ye^{\sin x} + A(y)$, vars y-derivata vi identifierar med F_2: $2x^3y + e^{\sin x} + A'(y) = 2x^3y + e^{\sin x}$. Enklast väljer vi $A(y) \equiv 0$. Den funna potentialen $U(x,y) = x^3y^2 + ye^{\sin x}$ satisfierar $\mathbf{F} = \nabla U$ i hela $\mathbb{R}^2$ och $\mathbf{F}$ är alltså ett konservativt vektorfält.

7. Gauss' sats ger

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\mathrm{d}V = 2\iiint_D (z+xz)\mathrm{d}V.$$

Eftersom $x \mapsto xz$ är udda och cylindern är symmetrisk med avseende på origo i x-led, ger integrandens andra term inget bidrag. Flödet är därför

$$\iiint_D 2z\mathrm{d}V = \iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^1 2z\mathrm{d}z = \pi.$$

8. Uppgiften är att maximera omkretsen $f(x,y) = \pi x^2/2 + 2xy$ under bivillkoren $g(x,y) = (2+\pi)x + 2y - 4 - \pi = 0$ och $x, y \ge 0$. Det är uppenbart att bivillkoren definierar en sluten och begränsad delmängd av $\mathbb{R}^2$, och eftersom f är en kontinuerlig funktion, antar den ett största och ett minsta värde på denna mängd.

På randen är $x = 0$ eller $y = 0$, varav den första randpunkten ger arean 0. $y = 0$ tillsammans med villkoret $g(x,y) = 0$ ger

$$x = \frac{4+\pi}{2+\pi} \;\Rightarrow\; f\left(\frac{4+\pi}{2+\pi}, 0\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4+\pi}{2+\pi}\right)^2.$$

Detta värde sparas som kandidat. I ett optimum i det inre av mängden måste f' och g' vara linjärt beroende. Med $f'(x,y) = [\pi x + 2y, 2x]$ och $g'(x,y) = [2+\pi, 2]$

fås $2\pi x + 4y = 4x + 2\pi x \;\Leftrightarrow\; x = y$. Kravet $g(x,y) = 0$ innebär då att $y = 1$, som ger $f(1,1) = \pi/2 + 2$. Men

$$\frac{f\left(\frac{4+\pi}{2+\pi}, 0\right)}{f(1,1)} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4+\pi}{2+\pi}\right)^2 \frac{2}{4+\pi} = \frac{\pi(4+\pi)}{(2+\pi)^2} < \frac{3.2(4+3.2)}{(2+3.1)^2} = \frac{23.04}{26.01} < 1.$$

Detta visar att $\pi/2 + 2$ är den maximala arean.

DEL B

9. Vi tar först fram sambanden mellan de partiella derivatorna i (x,y)- och (r,v)-koordinatsystemen. Avståndet till origo ges av $r^2 = x^2 + y^2$. Derivering med avseende på x respektive y ger

$$\begin{cases} 2rr_x = 2x \\ 2rr_y = 2y \end{cases} \overset{r>0}{\Longrightarrow} \begin{cases} r_x = \cos v \\ r_y = \sin v \end{cases}.$$

Vidare fås, genom y-derivering av $x = r\cos v$ och x-derivering av $y = r\sin v$,

$$\begin{cases} 0 = r_y \cos v - r\sin v\, v_y = \sin v(\cos v - rv_y) \\ 0 = r_x \sin v + r\cos v\, v_x = \cos v(\sin v + rv_x) \end{cases} \overset{r>0,\ v\neq m\pi/2}{\Longrightarrow} \begin{cases} v_x = -\sin v/r \\ v_y = \cos v/r \end{cases}$$

och kedjeregeln ger slutligen

$$\begin{cases} z_x = z_r r_x + z_v v_x = z_r \cos v - z_v \sin v/r \\ z_y = z_r r_y + z_v v_y = z_r \sin v + z_v \cos v/r \end{cases}.$$

Övergång till polära koordinater ger den partiella differentialekvationen utseendet $r(z_v \cos v + \sin v) = 0$. Om $r > 0 \neq \cos v$ kan vi lösa ut

$$z_v = -\tan v = \frac{\partial}{\partial v} \ln|\cos v| \;\Rightarrow\; z(r,v) = \ln|\cos v| + G(r).$$

Återgången till kartesiska koordinater sker enklast genom att addera och subtrahera $\ln r$:

$$\ln|\cos v| + \ln r + G(r) - \ln r = \ln|r\cos v| + F(r^2) = \ln|x| + F(x^2 + y^2),$$

där F liksom G är en godtycklig kontinuerligt deriverbar funktion av en variabel. Man övertygar sig lätt om att $z(x,y) = \ln|x| + F(x^2+y^2)$ löser den ursprungliga differentialekvationen för alla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

10. Integranden är på formen $(P(x,y), Q(x,y)) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$, där $Q_x - P_y = -f - xf_x - f - yf_y = 0$ enligt förutsättningarna. (P,Q) är alltså ett konservativt vektorfält och kurvintegralens värde bestäms entydigt av integrationsvägens ändpunkter.

För att visa det andra påståendet, antag att $P_1 = (a,b)$ och $P_2 = (Ta, Tb)$, $T \in \mathbb{R}$. Det gäller $g(P_2) - g(P_1) = \int_{P_0}^{P_2} - \int_{P_0}^{P_1} = \int_{P_1}^{P_2}$. En väg från P_1 till P_2 kan parametriseras $(x,y) = (at, bt)$ och $1 \le t \le T$ (eller $T \le t \le 1$ om $T < 1$). Vi får

$$g(P_2) - g(P_1) = \int_1^T (btf(at,bt)a - atf(at,bt)b)\mathrm{d}t = \int_1^T 0\mathrm{d}t = 0$$

oberoende av T.

11. Enligt Gauss' sats gäller $\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \mathrm{d}S = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \mathrm{d}V$, $\mathcal{S} = \partial D$. Flödesintegralen antar alltså sitt största värde om D är hela den delmängd av $\mathbb{R}^3$ där $\operatorname{div} \mathbf{F} \geq 0$. I vårt fall är $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3(1 - x^2 - y^2 - z^2) \geq 0$ i hela enhetsklotet $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Således:

$$\max_{\mathcal{S}} \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \mathrm{d}S = \iiint_B 3(1 - x^2 - y^2 - z^2) \mathrm{d}V =$$
$$= \{\text{sfäriska koordinater}\} = 3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 (1 - \rho^2)\rho^2 \mathrm{d}\rho = \frac{8\pi}{5}.$$

12. Enligt ledningen kan vi för varje (x, y, z) välja $\lambda = 3/(x + y + z)$, så att olikheten övergår i $(xyz)^{1/3} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad xyz \leq 1$. Formulerad som ett optimeringsproblem är uppgiften att visa att maximum av $f(x, y, z) = xyz$ under bivillkoren $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$ och $x, y, z \geq 0$ är högst 1. Eftersom $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 3,\ x, y, z \geq 0\}$ är kompakt och funktionen f kontinuerlig, antas säkert ett maximum på mängden. $f(x, y, z) = 0$ på ränderna, där maximum alltså inte antas. I ett maximum i det inre av mängden måste f' och g' vara linjärt beroende. Med $f'(x, y, z) = [yz, xz, xy]$ och $g'(x, y, z) = [1, 1, 1]$ fås $f' || g' \ \Rightarrow\ x = y = z = 1 \ \Rightarrow\ f(x, y, z) \leq f(1, 1, 1) = 1$ som önskat.