Institutionen för matematik, KTH
Lars Svensson

TENTAMENSSKRIVNING

5B1105 Differential- och integralkalkyl I, del 2
Tisdagen den 13 april 2004, kl 8.00–13.00

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtet hjälpmedel är Råde och Westergren: *BETA, Mathematics Handbook*. För betyg tre krävs minst 15 poäng på del A. För betyg fyra eller fem krävs dessutom minst 9 respektive minst 15 poäng på del B. Under kursens gång har fyra lappskrivningar (LS) och tre hemskrivningar (HS) givits. Godkänd skrivning räknas som 3 poäng på motsvarande uppgift i del A, såsom anges nedan.

DEL A

1. Låt $f(x,y,z) = x\sin y - e^{z^2}$ och låt P vara punkten $(a,b,c) = (1,\pi/3,0)$. Bestäm tangentplanet genom P till ytan $f(x,y,z) = f(a,b,c)$. (3 p, LS 1)

2. Bestäm riktningsderivatan av (3 p, HS 1)

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

i punkten $(1, \frac{1}{2}, 1)$ i riktningen $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$.

3. Avgör om funktionen (3 p, LS 2)

$$f(x,y) = x^2 - y - \frac{y}{x+y-1}$$

har en lokal extrempunkt i $(0,0)$ och bestäm i så fall dennas typ.

4. Beräkna (3 p, HS 2)

$$\iiint_D (x^2+y^2-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

där $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 4, z \le 0\}$.

5. Beräkna taylorpolynomet av grad 2 kring origo till funktionen (3 p, LS 3)

$$f(x) = \frac{1}{1+\tan x}.$$

6. Visa att vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2y^2 + ye^{\sin x}\cos x, 2x^3y + e^{\sin x})$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och bestäm en potential till $\mathbf{F}$. (3 p, HS 3)

7. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yz, xz^2)$ ut ur cylindern $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\}$. (3 p, LS 4)

8. Ett fönster har bredden $2x$ och består av en rektangel med höjd y och en halvcirkel med radie x ovanpå denna. Bestäm den maximala arean av fönstret, om omkretsen är $4+\pi$. (3 p, —)

DEL B

9. Lös differentialekvationen (5 p)

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} = x^2\frac{\partial z}{\partial y} + y$$

genom att införa polära koordinater enligt $x = r\cos v, y = r\sin v$.

10. Antag att funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kontinuerligt deriverbar överallt och att (5 p)

$$2f(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{i hela } \mathbb{R}^2.$$

Låt P_0 vara en fix punkt i planet och visa att

$$g(P) = \int_{P_0}^{P} yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y$$

är oberoende av integrationsvägen från P_0 till P. Visa också att $g(P_1) = g(P_2)$ om P_1, P_2 och origo ligger på linje.

11. Hur skall ytan $\mathcal{S}$ väljas för att flödet av vektorfältet (5 p)

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y - x^3, y + z - y^3, z + x - z^3)$$

ut ur ytan skall bli maximalt? Beräkna detta maximala flöde.

12. Visa att (5 p)

$$(xyz)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$$

för alla icke-negativa x, y, z.
Ledning: Utnyttja att olikheten är sann precis om den gäller då x, y, z ersätts med $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ för godtyckligt $\lambda > 0$. Välj λ så att högerledet blir 1.