Lösningsförslag till tentamen i 5B1105, Differential- och Integralkalkyl I, del 2, 2002-03-04.

1. Ytan är nivåytan $F = 1$ till funktionen $F(x,y,z) = x^3z + x^2 + yz^3$. En normalvektor $\mathbf{n}$ till ytan ges då av $\nabla F = (3x^2z + 2x\,,\ z^3\,,\ x^3 + 3yz^2)$. I punkten $(1,-1,1)$ fås $\mathbf{n} = (5,1,-2)$. Tangentplanets ekvation är då $5x + y - 2z = C$. Insättning av punkten ger $C = 2$. **Svar:** $5x + y - 2z = 2$.

---

2. De kritiska punkterna fås ur systemet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 8x + 2y = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \implies x = y, \text{ insättning i (1) ger } 6x(x-1) = 0 \implies (x,y) = (0,0) \text{ eller } (1,1). \end{cases}$$

De partiella derivatorna av ordnig två ges av: $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 8$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$.

$(0,0)$: $AC - B^2 = 12 > 0$ och $A = -8 < 0 \implies$ max. punkt.

$(1,1)$: $AC - B^2 = -12 < 0 \implies$ sadelpunkt. **Svar:** $(0,0)$ – max. punkt, $(1,1)$ – sadelpunkt.

---

3. $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$ där $|\mathbf{u}| = 1$. $\nabla f = (e^{x-y}\,,\ -e^{x-y}) \implies \nabla f(0,0) = (1,-1)$. $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ ger $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = (1,-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 0$. $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ är maximal då $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(0,0)}{|\nabla f(0,0)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Maximala värdet blir $(1,-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \sqrt{2}$. **Svar:** $D_{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})}f(0,0) = 0$. $D_{\mathbf{u}}f(0,0) \le \sqrt{2}$; likhet då $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

---

4. Parabeln $y = x^2$ och linjen $y = 1$ skär varandra i punkterna $(-1,1)$ och $(1,1)$; området D ges då av olikheterna $D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$. Termen xy är en udda funktion av x och D är symmetriskt med avseende på y-axeln. Den ger då inget bidrag och vi får

$$\iint_D y^2\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} y^2\,dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1 - x^6)\,dx = \frac{2}{3}\left[x - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{4}{7}\cdot$$

Svar: $4/7$.

---

5. Randen till kroppens projektion D på xy-planet fås genom att eliminiera z ur ekvationssystemet $\begin{cases} z = 8 - 3x^2 - y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$ vilket ger $x^2 + y^2 = 2$. Kroppens volym ges då av integralen

$$V = \iint_D [(8 - 3x^2 - y^2) - (x^2 + 3y^2)]\,dxdy = 4\iint_D (2 - x^2 - y^2)\,dxdy = \left\{\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}\right\}$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2)r\,dr = 8\pi\left[r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Svar: 8π.

---

6. Teckna $h = x - 1$ och $k = y - 1$. För små h och k är

$$f(1+h, 1+k) = (1+h)(1+k) - \cos(h-k) = 1 + h + k + hk - \left(1 - \frac{(h-k)^2}{2!} + \mathcal{O}((h-k)^4)\right)$$

$$= h + k + \frac{h^2}{2} + \frac{k^2}{2} + \mathcal{O}(r^4),$$

där $r = |(h,k)|$. Taylorpolynomet $P_2(x,y)$ av grad 2 kring $(1,1)$ ges då av

$$P_2(x,y) = (x-1) + (y-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{2}\cdot$$

Från Taylorpolynomet utläser man att $f'_x(1,1) = 1 \ne 0$. Punkten $(x,y) = (1,1)$ är därför inte kritisk, och därmed ingen lokal extrempunkt.

Svar: $P_2(x,y) = (x-1) + (y-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(y-1)^2}{2}\cdot$ Punkten $(1,1)$ är inte en lokal extrempunkt.

---

7. Vi använder Lagranges multiplikatormetod och bildar funktionen $L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-3)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} &= 2x+2\lambda x+\lambda y &= 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} &= 2y+\lambda x+2\lambda y &= 0 \quad (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2+xy+y^2-3 &= 0 \quad (3) \end{cases}$$

$y\cdot(1)-x\cdot(2)=0$ ger $\lambda(x^2-y^2)=0$. $\lambda=0$ ger $x=y=0$ som ej löser (3). $y^2=x^2$ ger $y=\pm x$.
$\underline{y=x}$: (3) ger $x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1$, d.v.s. punkterna $(1,1)$ och $(-1,-1)$.
$\underline{y=-x}$: (3) ger $x^2=3 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$, d.v.s. punkterna $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ och $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$. Avståndet från origo ges av $\sqrt{x^2+y^2}$. $\pm(1,1)$ ger avstånd $\sqrt{2}$ och $\pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ ger avstånd $\sqrt{6}$.

Svar: Punkterna $\pm(1,1)$ befinner sig närmast och $\pm(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ längst ifrån origo.

---

8. Teckna $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y),Q(x,y)) = (\cos(x^2)-x^2y\,,\, y^4+y^2x)$. Användning av Greens sats ger

$$\oint_C (\cos(x^2)-x^2y)\,dx + (y^4+y^2x)\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dxdy$$
$$= \left\{\begin{matrix} x=r\cos\vartheta \\ y=r\sin\vartheta \end{matrix}\right\} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 r^2\cdot r dr = \frac{\pi}{2}.$$

Svar: $\dfrac{\pi}{2}$.

---

9. Integranden är singulär i origo. Byte till polära koordinater ger

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 r\ln\frac{1}{r^2}\,drd\vartheta\right) = -2\pi\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 r\ln r^2\,dr.$$

Vi integrerar partiellt och använder sedan det bekanta gränsvärdet $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(\varepsilon\ln\varepsilon)=0$:

$$I = -\pi\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\Big[r^2\ln r^2\Big]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 r^2\cdot\frac{2}{r}\,dr\right) = -\pi\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[r^2(\ln r^2-1)\Big]_\varepsilon^1 = \pi.$$

Svar: $I=\pi$.

---

10. a) För att vektorfältet $\mathbf{F}$ ska vara konservativt krävs att att

$$\mathbf{0} = \operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ axy+3yz & x^2+3xz+by^2z & bxy+y^3 \end{vmatrix} = (bx+3y^2-3x-by^2\,,\,3y-by\,,\,2x+3z-ax-3z).$$

Fältet är virvelfritt då $a=2$ och $b=3$, d.v.s. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy+3yz\,,\,x^2+3xz+3y^2z\,,\,3xy+y^3)$.
b) Låt $\Phi(x,y,z)$ vara den sökta potentialen. Villkoret $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 2xy+3yz$ medför att $\Phi(x,y,z) = x^2y+3xyz+f(y,z)$. Å andra sidan är $x^2+3xz+3y^2z = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = x^2+3xz+\dfrac{\partial f}{\partial y}$, d.v.s. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2z$ och då är $f(x,y) = y^3z+g(z)$. Slutligen måste $3xy+y^3 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 3xy+y^3+g'(z)$, så att $g'(z)=0$ och $g(z)=C$. Välj $C=0$ och då är $\Phi(x,y,z) = x^2y+3xyz+y^3z$.
c) Fältet är konservativt på hela $\mathbb{R}^3$ och integralen är därmed oberoende av vägen.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C d\Phi = \Phi(\mathbf{r}(1))-\Phi(\mathbf{r}(0)) = \Phi(0,1,1)-\Phi(0,0,0) = 1-0 = 1.$$

Svar: a) $a=2$ och $b=3$; b) $\Phi(x,y,z) = x^2y+3xyz+y^3z$; c) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 1$.

---

11. Vi bildar en sluten yta genom att lägga till den plana cirkelskivan S_1 med radie 1 i xy-planet, $S_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1\ , z=0\}$. Då kan vi använda Gauss' sats. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2xy+1-y$ ger

$$\iint\limits_{S+S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint\limits_V (2xy+1-y)\,dxdydz = \iiint\limits_V dxdydz = \frac{1}{2}\frac{4\pi\cdot 1^3}{3} = \frac{2\pi}{3}\cdot$$

(Integralerna $\iiint\limits_V 2xy\,dxdydz = \iiint\limits_V y\,dxdydz = 0$ på grund av symmetrin.)

Vi måste dra bort $\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1\,dS$ där $\hat{\mathbf{N}}_1 = (0,0,-1)$ (den utåtriktade normalen). $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1 = -x^2+yz$. Då $z=0$ på S_1 får vi

$$\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1\,dS = -\iint\limits_{S_1} x^2\,dxdy = \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{array}\right\} = -\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\,d\vartheta = -\frac{\pi}{4}\cdot$$

Slutligen fås den sökta flödesintegralen ur

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iint\limits_{S+S_1}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS - \iint\limits_{S_1}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}_1\,dS = \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{12}\cdot$$

Svar: $\dfrac{11\pi}{12}\cdot$

---

12. a) Verifiera först att punkten $(1,-1)$ satisfierar $F(1,-1)=0$. Den partiella derivatan $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,-1) = [x+2y+2]_{(1,-1)} = 1 \ne 0$. Enligt Implicita funktionssatsen existerar en omgivning av $x=1$ där ekvationen $F(x,y)=0$ bestämmer y som en kontinuerligt deriverbar funktion av x som satisfierar $F(x,y(x))=0$.

b, c, d) Taylorpolynomet $P_2(x)$ till $y(x)$ kring punkten $x=1$ ges av $P_2(x) = -1+\dfrac{y'(1)}{1!}(x-1)+\dfrac{y''(1)}{2!}(x-1)^2$. För att beräkna $y'(1)$ och $y''(1)$ deriverar vi ekvationen två gånger implicit m.a.p. x:

$$0 = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) = (2x+y-1)+(x+2y+2)y'(x)$$
$$0 = \frac{d^2}{dx^2}F(x,y(x)) = 2+y'(x)+(1+2y'(x))y'(x)+y''(x)(x+2y+2).$$

Substitution av punkten $(x,y)=(1,-1)$ ger nu de sökta derivatornas värden: $y'(1)=0$ och $y''(1)=-2$. Eftersom $y'(1)=0$ och $y''(1)=-2<0$ har $y(x)$ ett lokal maximum i punkten $x=1$.

Svar: c) $P_2(x) = -1-(x-1)^2$; d) Funktionen $y(x)$ har ett lok. max i punkten $x=1$.
