Institutionen för matematik, KTH
A. Falkne, G. Hulth, T. Ivanov, B. Leander, R. Skjelnes

Tentamensskrivning, 2002-03-04, kl 08.00–13.00.

5B1105, Differential- och Integralkalkyl I, del 2.

För godkänt krävs minst 32 poäng.
Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 48 resp. 62 poäng.
Varje bonuspoäng ger 2 poäng på tentamen.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

---

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^3z + x^2 + yz^3 = 1$ i punkten $(1, -1, 1)$. (4 p)
2. Bestäm de kritiska punkterna till funktionen $f(x, y) = 2x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ samt avgör deras karaktär. (4 p)
3. Beräkna riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = e^{x-y}$ i punkten $(0, 0)$ i den riktning som ges av vektorn $(1, 1)$. Hur stor kan riktningsderivatan av f i origo bli? (4 p)
4. Beräkna (4 p)
$$\iint_D (xy + y^2)\, dxdy$$
där D är det område som begränsas av parabeln $y = x^2$ och linjen $y = 1$.
5. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = 8 - 3x^2 - y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$. (6 p)
6. Bestäm Taylorpolynomet av grad två till funktionen $f(x, y) = xy - \cos(x - y)$ kring punkten $(x, y) = (1, 1)$. Bestäm om f har lokalt extremum i denna punkt. (6 p)
7. Bestäm de punkter på kurvan $x^2 + xy + y^2 = 3$ som ligger närmast respektive längst från origo. (6 p)
8. Låt C vara cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ med positiv omloppsriktning. Beräkna linjeintegralen (6 p)
$$\oint_C (\cos(x^2) - x^2y)\, dx + (y^4 + y^2x)\, dy\,.$$
9. Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \ln \frac{1}{x^2 + y^2}\, dxdy$ där D är cirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$. (6 p)
10. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (axy + 3yz\,,\ x^2 + 3xz + by^2z\,,\ bxy + y^3)$.
    a) Bestäm konstanterna a och b så att rotationen för $\mathbf{F}$ är nollvektorn (d v s $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$). (3 p)
    b) Bestäm för dessa värden på a och b en potential till $\mathbf{F}$. (3 p)
    c) Beräkna linjeintegralen $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där C är kurvan $\mathbf{r}(t) = (t - t^2, t^3, t^4)$, $0 \le t \le 1$. (2 p)
11. Beräkna flödesintegralen $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$ där vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2y, y + z, x^2 - yz)$ och ytan S är den övre halvan av enhetssfären, dvs den definieras av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$. Ytans enhetsnormal $\hat{\mathbf{N}}$ har positiv z-komponent. (8 p)
12. Betrakta ekvationen $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x + 2y + 2 = 0$.
    a) Visa att ekvationen $F(x, y) = 0$ lokalt definierar y som en funktion av x i någon omgivning av punkten $x = 1$, så att $y(1) = -1$. (2 p)
    b) Visa att $x = 1$ är en kritisk punkt för funktionen $y(x)$. (2 p)
    c) Ange Taylorpolynomet av grad två till $y(x)$ kring punkten $x = 1$. (2 p)
    d) Avgör om $y(x)$ har ett lokalt extremum i denna punkt. (2 p)