Kortfattade lösningsförslag till tentamen i kursen 5B1106, Differential- och integralkalkyl II, del 1, för F 2002-08-15

Per Sjölin

Uppgift 1

Ekvationen $y'' - y = 0$ har karakteristiska ekvationen $m^2 - 1 = 0$ vilket ger $m = \pm 1$. Den allmänna lösningen till diff. ekv. är därmed $y = Ae^x + Be^{-x}$ där A och B är konstanter.

Detta ger $y' = Ae^x - Be^{-x}$. Villkoren på y ger

$$y(0) = A + B = 1$$

och

$$y'(0) = A - B = 0$$

vilket ger $A = B = 1/2$.

Den sökta lösningen är därför $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$.

Uppgift 2

Funktionerna x^2 och e^x är växande och positiva för $x > 0$.

Det följer att f och är växande. Därmed har f invers.

$$f(1) = e \Longrightarrow (f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x) = x^2e^x + 2xe^x \Longrightarrow f'(1) = e + 2e = 3e.$$

Därmed gäller

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{3e}.$$

Uppgift 3

$$f'(x) = e^{-x}\frac{e}{ex} - e^{-x}\ln(ex) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \ln(ex)\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = \ln(ex) \iff e^{1/x} = ex \Longrightarrow x = 1$$

Detta ger

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max.	$\searrow$

Grafen beskrivs av:

$$x = 1 \text{ lokal max. punkt med } f(1) = e^{-1}$$
$$f(x) \longrightarrow -\infty \text{ då } x \longrightarrow 0+$$
$$f(1/e) = 0$$
$$f(x) \longrightarrow 0 \quad \text{då} \quad x \longrightarrow \infty$$

Uppgift 4

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$V(a) = \pi \int_{-a}^{a} f(x)^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \left[\arctan x\right]_{-a}^{a} =$$
$$= \pi(\arctan a - \arctan(-a))$$

Därmed:

$$\lim_{a\to\infty} V(a) = \pi\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi^2.$$

Uppgift 5

$f(0) = 1$ och $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1 \Longrightarrow f$ är kont. i origo.

För $x < 0$ fås $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, och $f^{(3)}(x) = e^x$.

För $x > 0$ fås $f'(x) = -\sin x + 1 + 2x$, $f''(x) = -\cos x + 2$, $f^{(3)}(x) = \sin x$.

Härav fås $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, emedan $f^{(3)}(0)$ inte existerar ty

$$(f'')'_+(0) \neq (f'')'_-(0).$$

f är alltså 2 ggr. deriverbar i origo.

Uppgift 6

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \text{ är } > 0 \text{ för alla } x.$$
$$\text{Sätt } f(x) = \frac{x+3}{x^2-4x+5}, \ x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+6}{x^2-4x+5} = \frac{1}{2}\frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \frac{1}{2}\frac{10}{x^2-4x+5}$$
$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + 5\int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + 5\arctan(x-2) + C$$

Uppgift 7

För stora x gäller

$$4 = 4^{x\frac{1}{x}} \leq (3^x + 4^x)^{1/x} \leq (2\cdot 4^x)^{1/x} = 4\cdot 2^{1/x}$$

Men $4\cdot 2^{1/x} \longrightarrow 4$ då $x \longrightarrow \infty$. Instängningsatsen ger därför

$$\lim_{x\to\infty}(3^x + 4^x)^{1/x} = 4$$

Uppgift 8

Partiell integration ger

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2x(\ln x)\frac{1}{x}dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx =$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2\int x\frac{1}{x}dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

Uppgift 9

$$\text{Sätt } f(x) = \tan x + 2\ln\cos x \text{ för } 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

f är kont. och

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - 2\frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \tan^2 x - 2\tan x = (1 - \tan x)^2$$

Därmed: $f'(x) > 0$ för $0 < x < \pi/4 \Longrightarrow f$ växande på intervallet $[0, \pi/4]$.

Vi har att $f(0) = 0$ så därmed gäller

$$f(x) > 0 \text{ för } 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$f'(x) > 0$ för $\pi/4 < x < \pi/2 \Longrightarrow f$ växande på int. $[\pi/4, \pi/2)$.

$f(\pi/4) > 0$, vilket ger

$$f(x) > 0 \text{ för } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Uppgift 10

För $0 < x < 1$ och $0 \le t \le 1$ fås enligt medelvärdessatsen

$$e^{xt} - 1 = e^{xt} - e^0 = xte^{\xi} \text{ där } 0 \le \xi \le xt.$$

$$0 \le xt \le 1 \Longrightarrow 0 \le \xi \le 1 \Longrightarrow e^{\xi} \le e < 3$$

$$\therefore |e^{xt} - 1| \le 3x \text{ för } 0 < x < 1,\ 0 \le t \le 1$$

$$\therefore \left|\int_0^1 \sqrt{t}e^{xt}dt - \int_0^1 \sqrt{t}dt\right| = \left|\int_0^1 \sqrt{t}(e^{xt} - 1)dt\right| \le$$

$$\le \int_0^1 3xdt = 3x \longrightarrow 0 \text{ då } x \longrightarrow 0+$$

Därmed fås

$$\int_0^1 \sqrt{t}e^{xt}dt \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \text{ då } x \longrightarrow 0+$$

Uppgift 11

Enligt sats om Riemannsummor är

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}$$

dvs

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^n}{n^5}=\frac{1}{5}$$

För $\alpha\neq 5$ fås

$$\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^n}{n^\alpha}=\underbrace{\frac{1^4+2^4+3^4+\ldots+n^n}{n^5}}_{\longrightarrow 1/5}n^{5-\alpha}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\begin{cases}0 & \text{om} \quad \alpha>5\\ \infty & \text{om} \quad \alpha<5\end{cases}\quad \text{då} \quad n\longrightarrow\infty$$