Tentamen Envariabel för F1, 021216

Förslag till lösningar:

1. Skillnaden mellan de två rotuttrycken kan skrivas

$$\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=\frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}.$$

Bryt ut x. Gränsvärdet blir $4/2 = 2$.

2. Enligt L'Hospitals regel blir gränsvärdet

$$\lim_{x\to -2}\frac{(f(x^2+1))'}{1} = \lim_{x\to -2} f'(x^2+1)\cdot 2x = -28.$$

3. Detta är exempel 6, sid 153, i Adams.
Svar: a) $y' = (2-y)/(x+2y)$. b) $y'' = -8/(x+2y)^3$.

4. Eftersom

$$\frac{d}{dx}(\arctan x + \arctan(1/x)) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\frac{-1}{x^2} = 0$$

måste $\arctan x + \arctan(1/x)$ vara konstant. $x = 1$ ger värdet $2\arctan 1 = \pi/2$.

5. Karakteristiska ekvationen är $r^2+1 = 0$ med rötterna $\pm i$. Den homogena lösningen är därför $C_1\cos x + C_2 \sin x$. Till partikulärlösningen gör vi ansatsen Ae^{-x} vilket leder till $A = 1/2$. Den allmänna lösningen är således $y = C_1\cos x + C_2\sin x + (1/2)e^{-x}$. $x = 0$ ger $1 = C_1 + (1/2)$, varför $C_1 = 1/2$.

Derivera och sätt $x = 0$. Vi får $0 = 0 + C_2 - (1/2)$, så även $C_2 = 1/2$), varför
Svar: $y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^{-x})$.

6. Vi vet att $f^{(14)}(0)/14!$ är koefficienten för x^{14} i f:s MacLaurinserie. Vi vet att $e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$. Välj $t = -x^2$. x^{14}-termen är $(-x^2)^7/7!$, varför

$$f^{(14)}(0) = -\frac{14!}{7!} = -\frac{2^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 13}$$

7. Med substitutionen $t = x^4$ blir integralen

$$\frac{1}{4}\int\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{16}\int\frac{dt}{1+(\frac{t}{2})^2} = \frac{1}{8}\arctan(t/2)+C = \frac{1}{8}\arctan(x^4/2)+C.$$

8. Nämnaren kan faktoriseras som $x(x-1)^2$. Uppdela i partialbråk:

$$\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}.$$

Identifiering ger $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$, varför integralen blir

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx = \left[\ln x - \frac{2}{x-1}\right]_2^4 = \ln 2 + \frac{4}{3}.$$

9. Höjden är $\pm(x^3 - 1)$ så volymen blir $\int_0^2 \pi(x^3-1)^2\,dx = \frac{9\pi}{7}$.

10. Jämför med motsvarande integral. I a) betraktar vi

$$\int_2^A \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \left[u = \ln x, du = \frac{dx}{x}\right] = \int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln A} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A}.$$

$A \to \infty$ ger det ändliga gränsvärdet $\frac{1}{\ln 2}$, så serien **konvergerar**.

I b) leder samma argument till integralen $\int_3^A \frac{dx}{x \ln x \ln\ln x} = [u = \ln\ln x] = \int_{\ln\ln 3}^{\ln\ln A} \frac{du}{u} = \ln\ln\ln A - \ln\ln\ln 3 \to \infty$ då $A \to \infty$. **Divergent** serie.

11. Vi skall minimera $x^2 + \pi r^2$ då $4x + 2\pi r = L$. Alltså: minimera funktionen $f(x) = x^2 + \frac{\pi}{4\pi^2}(L-4x)^2$, $0 \le x \le L/4$. $f'(x) = 2x + \frac{2\pi}{4\pi^2}(-4)(L-4x) = (2+\frac{8}{\pi})x - \frac{2L}{\pi}$, så den enda kritiska punkten är $x = \frac{L}{4+\pi}$, där f antar värdet $\frac{L^2}{4(4+\pi)}$. Jämförelse med värdena i ändpunkterna, $f(0) = \frac{L^2}{4\pi}$ och $f(L/4) = L^2/16$, visar att minimum antas i den kritiska punkten.

12. $y' = 2x^2 - \frac{1}{8x^2}$ så $1 + (y')^2$ blir

$$1 + \left(2x^2 - \frac{1}{8x^2}\right)^2 = 1 + 4x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^4} = 4x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^4} = \left(2x^2 + \frac{1}{8x^2}\right)^2,$$

varför längden av kurvan blir

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_1^2 \left(2x^2 + \frac{1}{8x^2}\right) dx.$$

Uträkning ger **Svar:** $4 + \frac{35}{48}$**.**

13. a) Skriv om: $f(x) = e^{x\ln x}$, varav $f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.
b) $f'(x) > 0$ precis då $\ln x + 1 > 0$ dvs för $x > 1/e$, medan $f'(1/e) = 0$. Alltså är f strängt växande och därmed inverterbar, på intervallet $[1/e, \infty)$.
c) $g(y) = x$ om och endast om $f(x) = y$ ger $\ln y = x \ln x$ och $\ln\ln y = \ln x + \ln\ln x$. Klart att $y \to \infty$ medför $x \to \infty$. Vi får

$$\frac{g(y)\ln\ln y}{\ln y} = \frac{x(\ln x + \ln\ln x)}{x\ln x} = 1 + \frac{\ln\ln x}{\ln x} \to 1, \quad \text{då} \quad x \to \infty.$$

(Eftersom $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln x}{\ln x} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$.)

14. a) Se boken, kap. 6.2, sid 358.
b) $dx/d\theta = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\theta/2))$ ger att integralen är

$$\int_0^1 \frac{2\,dx}{(1+x^2)(1 + \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2})} = \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

15. $\sum_1^\infty \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} \le \sum_1^\infty |x|^n$ (geometrisk serie) visar att serien är (absolut-)konvergent för alla $|x| < 1$. $x = 1$ ger den divergenta serien $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ (p-serie med $p = 1/2$). För $x = -1$ får vi den alternerande serien $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ som konvergerar (enligt Sats 9.4.14 i boken). Om $|x| > 1$ går inte den allmänna termen $x^n/\sqrt{n}$ mot noll. Alltså: **potensserien konvergerar endast i intervallet** $[-1, 1)$**.**

16. a) Allmänt gäller (integralkalylens fundamentalsats) att om $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ med g kontinuerlig, så är f deriverbar med $f' = g$. Vi får alltså $f'(x) = xe^{-x^4}(x^4 - 2x^2 - 3)$. Vi noterar att f' är udda.
b) Enligt a) ges de kritiska punkterna av ekvationen $x(x^4 - 2x^2 - 3) = 0$. Faktoriseringen $x^4 - 2x^2 - 3 = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$ visar att de kritiska punkterna är $x = 0$ samt $x = \pm\sqrt{3}$. Teckenstudium visar att $x = 0$ är en lokal maxpunkt medan $x = \pm\sqrt{3}$ är lokala minpunkter. Funktionen e^{-x^4} går så snabbt mot 0 i $\pm\infty$ att f är begränsad.

Nu gäller att $f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} f'(x)\,dx = 0$ eftersom f' är en udda funktion. **Svar**: Minimum antas för $x = \pm\sqrt{3}$.

17. a) Beräkning ger $\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} + 2) - \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - 2) = 1$ för alla t. För att hamna i första kvadranten måste vi välja $t > 0$.
b) För $x > 0$ kan varje punkt på kurvan $x^2 - y^2 = 1$ skrivas $x = \cosh u$, $y = \sinh u$, och för den del av kurvan som är relevant i problemet gäller $0 \le u \le t$. Arean, ΔA, av området som begränsas av kurvan samt linjerna från origo till punkterna $\mathbf{r} = (x, y)$ resp $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ är approximativt hälften av arean av den parallellogram som spänns av motsvarande vektorer, dvs $\frac{1}{2}$ gånger determinanten

$$\left|\mathbf{r},\ \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}\right| = x\Delta y - y\Delta x = \left(x\frac{\Delta y}{\Delta u} - y\frac{\Delta x}{\Delta u}\right)\Delta u.$$

Bildar vi Riemannsummor och går i limes finner vi att den sökta arean är

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (x(u)y'(u) - y(u)x'(u))\,du = \frac{1}{2}\int_0^t du = \frac{t}{2}.$$

(Eftersom $x(u)y'(u) - y(u)x'(u) = \cosh^2 u - \sinh^2 u$.) Saken är klar.